Московский государственный технический
университет имени Н.Э.Баумана

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШАГ В БУДУЩЕЕ

ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА

демонстрационные варианты и задания для тренировки

тематический сборник информационно-методических
и образовательных материалов

2011

Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Демонстрационные варианты и задания для тренировки по физике и математике

Под ред. канд. техн. наук, доцента *Н.Я.Ирьянова*

Тематический сборник информационно-методических и образовательных материалов

Москва

2011

Составители: Власова Елена Александровна,

Ирьянов Николай Яковлевич,

Паршев Леонид Петрович,

Струков Юрий Алексеевич,

Шишкина Светлана Ивановна

Рецензент: д.т.н., проф. каф. ФН-2 Зарубин Владимир Степанович

Олимпиада школьников “Шаг в будущее”. Демонстрационные варианты и задания для тренировки по физике и математике. Тематический сборник информационно-методических и образовательных материалов / Под ред. Н.Я.Ирьянова.- М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2011.- 150 с.

В сборнике представлены сведения о правилах организации и проведения, методическом и технологическом обеспечении академического соревнования по физике и математике Олимпиады школьников «Шаг в будущее», дана информация о правилах участия, определении победителей и призеров олимпиады и их правах.

Демонстрируются варианты олимпиадных заданий по физике и математике с включением решенных в них задач, что дает представление об уровне требований к подготовленности конкурсантов, предложен набор тренировочных задач и вариантов заданий.

Назначение этого сборника – помочь школьникам и их наставникам подготовиться к участию в Олимпиаде.

Для школьников, абитуриентов и слушателей подготовительных курсов МГТУ им. Н.Э. Баумана, преподавателей и организаторов.

Предисловие

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана проводит целенаправленную работу как научно-методического, так и организационно-технического характера по созданию кадровой базы контингента абитуриентов для формирования состава студентов университета из учащихся, нацеленных на получение образования по инженерно-техническому направлению, проявляющих интерес к научно-исследовательской деятельности и наиболее подготовленных и способных к освоению учебных программ ВУЗа. Главная цель организационной работы - вовлечение возможно большего количества учащейся молодежи в сферу научно-технической деятельности путем научного просвещения, выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к физико-математическим наукам, создания положительной мотивации овладения инженерной специальностью и профориентация.

В последние годы в сложных социально-экономических условиях и демографическом спаде, в условиях непрерывного реформирования системы образования, когда осложнилась задача обеспечения и повышения качества набора, в МГТУ им. Н.Э.Баумана на базе накопленного опыта усилиями ректората и всего коллектива университета при государственной поддержке была построена комплексная, динамично развивающаяся, адаптированная к современным условиям система профориентации и приема на первый курс. Основой ее функционирования является тесное взаимодействие ученых и преподавателей университета с педагогическими коллективами школ, учащимися и их родителями. Эта совместная деятельность в рамках широкомасштабной программы «Шаг в будущее», Молодежного космического центра, Специализированного учебно-научного центра, Физико-математической школы, лицеев №1580, №1581, около двухсот профильных школ, подготовительных курсов и др. направляется Ректоратом и Приемной комиссией и координируется недавно созданным Центром довузовской подготовки университета.

Охватывая широкие круги школьников во многих регионах России, разработанная система обеспечивает достаточно эффективное вовлечение молодых людей в сферу инженерного творчества и исследовательской работы, поиск, воспитание и научно-образовательную подготовку абитуриентов, желающих учиться в МГТУ им. Н.Э.Баумана. Задача формирования состава студентов первого курса – набор абитуриентов, способных осваивать непростые образовательные программы, решается путем конкурсного отбора по результатам ЕГЭ, вступительных испытаний, проводимых

МГТУ самостоятельно для установленного Министерством образования круга абитуриентов, а также по результатам участия школьников в системе предметных олимпиад по физике и математике разного уровня, олимпиады школьников «Шаг в будущее», проводимых МГТУ им. Н.Э.Баумана и Российским советом олимпиад школьников (РСОШ).

Хотя элементы процедуры проведения, значимость олимпиад, количество призеров из года в год корректируется, победители и призеры олимпиад, включаемых в утверждаемый РСОШ перечень, получают существенные льготы при поступлении в ВУЗ. Так в 2010 году победители и призеры олимпиады «Шаг в будущее» по комплексу предметов «Техника и технологии», предметных олимпиад по физике и математике, по решению Ученого совета в зависимости от статуса дипломанта и выбранной специальности могли быть либо зачислены на специальность без вступительных испытаний, либо им засчитывалось 100 баллов вместо их оценки за ЕГЭ по соответствующему предмету. Этим правом воспользовалось около 1500 человек. Таким образом участие в этих олимпиадах является для школьников своеобразным способом поступления в университет, а для ВУЗа проведение таких мероприятий является приоритетным, поскольку их результаты – важный источник набора на первый курс мотивированных, осознанно выбравших специальность молодых людей.

Итоги набора 2009 – 2010 года, анализ успеваемости студентов, зачисленных по результатам олимпиад, беседы с победителями свидетельствуют о том, что участие школьников в разного формата интеллектуальных соревнованиях, олимпиадах и других контрольно-диагностических мероприятиях, поэтапно проводимых университетом в рамках функционирования системы «ВУЗ - средняя школа» играет важную образовательно-воспитательную роль в развитии школьников. Оно способствует формированию базовой грамотности школьников и ее совершенствованию, стимулирует их творческую активность, дает возможность освоения приемов научно-исследовательской деятельности и приобретения соревновательного опыта, позволяет им тщательно и планомерно подготовиться и реализовать свое стремление поступить туда, куда хотел, а затем успешно использовать приобретенные навыки самообразования в своем образовательном маршруте.

В свете этого развитие и повышение эффективности созданной в МГТУ им. Н.Э.Баумана системы довузовской подготовки и набора на первый курс является актуальной задачей. Решение ее связано с расширением олимпиадного движения, с совершенствованием методического сопровождения.

Основное назначение предлагаемых материалов – предоставить информацию участникам олимпиады, родителям и педагогам об организационно-технологическом и контрольно-диагностическом обеспечении многопредметной олимпиады «Шаг в будущее» МГТУ им. Н.Э. Баумана, продемонстрировать уровень требований, предъявляемых к подготовленности абитуриента для поступления и дальнейшего обучения, показать образцы вариантов заданий олимпиад по физике и математике с решением включенных в них задач, предложить набор тренировочных задач и вариантов.

Надеемся, что учебные материалы сборника и работа с ними позволят школьникам не только хорошо подготовиться к участию в олимпиаде, но и увереннее чувствовать себя на ЕГЭ или при сдаче вступительных экзаменов по физике и по математике.

Раздел 1. Общие сведения и методические материалы по проведению Олимпиады школьников «Шаг в будущее» (физика, математика)

1.1. Алгоритм и технология проведения мероприятия

В системе набора МГТУ им. Н.Э. Баумана при организации различных творческих и научно-образовательных конкурсов, олимпиад школьников и других контрольно-диагностических мероприятий используется корректируемая применительно к конкретным мероприятиям следующая технология и схема их организации:

- Принятие решения и разработка регламентирующих и организационно-методических материалов по проведению мероприятия.

- Формирование круга участников и информирование образовательных учреждений (ОУ) о мероприятии. Разработка системы информационного обеспечения (сопровождения).

- Проведение конференции: обмен мнениями представителей ОУ и организаторов мероприятия.

- Прием документов и регистрация участников в базе данных.

- Формирование потоков учасников и оперативного расписания «технологии» проведения конкретной Олимпиады.

- Формирование системы обеспечения: кадрового (организаторы, эксперты, операторы), материально-технического (аудиторный фонд, комплекты бумаги и др.) и контрольно-диагностического (варианты заданий, правила оценивания и определения рейтинга).

- Проведение мероприятия (олимпиады) в соответствии с утвержденным порядком и регламентом.

- Предварительная обработка аудиторных материалов в пункте приема в соответствие с инструкцией по информационной безопасности. Формирование папок с выполненными работами для экспертной оценки заданий.

- Экспертиза и выставление баллов за выполненные задания в соответствии с установленными правилами оценивания.

- Сбор и обработка проверенных материалов Олимпиады. Фиксация поименных результатов на бумажных носителях и в электронном виде.

- Информирование участников о личных достигнутых результатах, организация показа работ, разбор задач и консультация участников.

- Работа апелляционной комиссии.

- Статистическая обработка результатов и формирование рейтинг-листа участников Олимпиады.

- Информирование участников о результатах Олимпиады, личных достижениях каждого и возможности использования этих результатов для продолжения образования (в качестве одной из форм участия в конкурсе).

1.2. Основополагающие документы и регламент проведения Олимпиады «Шаг в будущее»

Согласно Порядку проведения Олимпиад школьников («Порядок»), утвержденному Приказом №285 Министерства образования и науки РФ «Порядок проведения Олимпиад школьников» от 22 октября 2007 года (в редакции Приказов Министерства образования и науки Российской Федерации от 4 сентября 2008 г. №255, от 22 марта 2009 г. №92, от 6 октября 2009 г. №371, от 1 октября 2010 г. №1006) Олимпиада состоит из двух этапов – отборочного и заключительного (очного). К участию в заключительном (очном) этапе Олимпиады школьников допускаются только победители и призеры отборочного этапа Олимпиады. Победители и призеры Олимпиады определяются по результатам заключительного этапа. При этом общее количество победителей и призеров не должно превышать 35 процентов от общего числа участников заключительного этапа Олимпиады.

При поступлении в государственные и муниципальные образовательные учреждения среднего профессионального образования, а также в государственные и муниципальные образовательные учреждения высшего профессионального образования по решению образовательного учреждения, в зависимости от общеобразовательного предмета, соответствующего профилю Олимпиады, и уровня Олимпиады, победителям и призерам Олимпиады в течение одного года с момента утверждения списков победителей и призеров Олимпиады, в соответствии с законом Российской Федерации «Об образовании», представляется одна из следующих льгот первого или второго порядков:

- льгота первого порядка - быть зачисленным в образовательное учреждение без вступительных испытаний на направления подготовки (специальности), соответствующие профилю Олимпиады; соответствие реализуемых образовательным учреждением направлений подготовки (специальностей) профилю Олимпиады определяется образовательным учреждением самостоятельно;

- льгота второго порядка – быть приравненным к лицам, набравшим максимальное количество баллов по единому государственному экзамену по общеобразовательному предмету, соответствующему профилю Олимпиады.

Основным организационно-методическим документом, регламентирующим подготовку и проведение предметных Олимпиад по физике и математике Олимпиады школьников «Шаг в будущее» (академическое соревнование), является «Положение об «Олимпиаде школьников «Шаг в будущее» (Олимпиаде), которое составляется в соответствии с «Порядком» и утверждается приказом Ректора МГТУ им. Н.Э. Баумана. Согласно этому приказу Центром довузовской подготовки, на который возлагается ответственность за организацию и проведение Олимпиады, создается и разрабатывается «Регламент проведения Олимпиады», создаются и утверждаются состав Оргкомитета, Методическая комиссия и Жюри Олимпиады.

Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана ежегодно утверждает список базовых организаций, участвующих в подготовке и проведении Олимпиады и согласовывает его с РСОШ. Список базовых организаций Олимпиады формируется Центром довузовской подготовки МГТУ им. Н.Э. Баумана из числа координационных центров, ассоциированных участников, организаций и ВУЗов-партнеров Олимпиады школьников «Шаг в будущее», зарегистрированных в установленном порядке.

1.3. Методика проведения Академического соревнования

Первый этап академического соревнования организуется в очной и заочной форме и (или) с применением дистанционных образовательных технологий в период с 1 сентября по 31 января.

Второй (заключительный этап) академического соревнования организуется только в очной форме в виде выполнения заданий по общеобразовательным предметам физике и математике и/или комплексам предметов с 1 февраля по 31 марта в городе Москве, а также в других городах Российской Федерации с участием базовых организаций и ВУЗов-партнеров Олимпиады.

Конкретные сроки и периоды проведения мероприятий академического соревнования, правила участия, и форма регистрации ежегодно утверждаются председателем оргкомитета Олимпиады и размещаются на сайте МГТУ им. Н.Э. Баумана www//bmstu.ru и официальном портале Олимпиады школьников «Шаг в будущее» http://priem.bmstu.ru/olimpiada/.

Для участия в первом этапе академического соревнования обучающиеся в образовательных учреждениях регистрируются в оргкомитетах соответствующих Олимпиад по общеобразовательным предметам в определенные Оргкомитетом Олимпиады сроки, выполняют олимпиадные испытания по заданиям, утвержденным Методической комиссией Олимпиады.

По результатам первого этапа академического соревнования оргкомитеты Олимпиад по общеобразовательным предметам определяют победителей и призеров первого этапа Олимпиады. Общее количество победителей и призеров первого этапа академического соревнования Олимпиады не должно превышать 35 процентов от общего числа участников первого этапа академического соревнования Олимпиады. Победители и призеры первого этапа академического соревнования Олимпиады допускаются к участию во втором (заключительном) этапе академического соревнования Олимпиады.

Для участия во втором этапе академического соревнования, обучающиеся образовательных учреждений, подают заявку на регистрацию по установленному образцу в Центр довузовской подготовки МГТУ им. Н.Э. Баумана.

При регистрации участники в личном заявлении указывают специальности (с указанием вуза и факультета), при поступлении на которые они хотели бы реализовать право получения льгот, в том случае, если станут победителями (призерами) Олимпиады. Максимальное количество специальностей, которое может указать в проиоритетном порядке участник, устанавливается ежегодно регламентом Олимпиады.

Победители и призеры Олимпиады определяются по результатам заключительных этапов каждого вида конкурсных испытаний Олимпиады, проводимых в МГТУ им. Н.Э. Баумана, базовых организациях и ВУЗах-партнерах Олимпиады «Шаг в будущее».

Победителям и призерам Олимпиады выдаются дипломы, подписанные председателем Оргкомитета Олимпиады, утвержденные Министерством образования и науки Российской Федерации.

Победителями Олимпиады считаются участники Олимпиады, награжденные дипломами 1-ой степени. Призерами Олимпиады считаются участники Олимпиады, награжденные дипломами 2-ой и 3-ей степени. Участники Олимпиады могут награждаться свидетельствами участника, грамотами, памятными подарками.

Количество победителей и призеров Олимпиады не должно превышать 35 процентов от общего числа участников заключительного этапа Олимпиады. Количество победителей Олимпиады не должно превышать 10 процентов от общего числа участников заключительного этапа Олимпиады по соответствующему общеобразовательному предмету (комплексу предметов).

1.4. Порядок проведения Олимпиады

Для непосредственного проведения Олимпиады распоряжением председателя методической комиссии создаются предметные экспертные комиссии, бригада организаторов, группа обработки выполненных олимпиадных работ. В соответствии с количеством участников готовятся комплекты бланков бумаги, аудиторный фонд и комплекты вариантов заданий. Олимпиадные задания разрабатываются и формируются методической комиссией. Вся ответственность за обеспечение информационной безопасности на этапе подготовки этих заданий возлагается на разработчика и одного из назначаемых членов методической комиссии. Задания разрабатываются комплектами, содержание каждого из которых соответствует профилю Олимпиады.

Подготовленные комплекты вариантов тиражируются их разработчиком в специально отведенном для этих целей помещении в количестве, соответствующем числу участников по каждому профилю Олимпиады.

Растиражированные комплекты вариантов раскладываются разработчиком по отдельным конвертам, количество которых соответствует числу аудиторий, выделенных для проведения Олимпиады по соответствующему профилю. После чего конверты опечатываются и передаются лицу, ответственному за хранение и выдачу олимпиадных заданий. Член методической комиссии, ответственный за хранение и выдачу заданий, помещает опечатанные конверты вместе с журналом учета в специальный сейф, ключ от которого хранится у председателя методической комиссии - первого проректора-проректора по учебной работе Университета.

Процедура выдачи комплектов заданий начинается в день проведения Олимпиады по соответствующему профилю за 30 минут до её начала. Распределение участников Олимпиады по аудиториям проводится накануне её проведения системой «Электронный университет». Плакаты с регистрационными номерами школьников и номерами аудиторий, где проводится Олимпиада, вывешиваются в помещениях оргкомитета в день её проведения. Перед началом Олимпиады комплект опечатанных заданий в присутствии руководителя бригады организаторов Олимпиады извлекается из сейфа перного проректора лицом, ответственным за их хранение и выдачу, и конверты с заданиями передаются руководителю бригады организаторов. Руководитель бригады организаторов сообщает старшим организаторам номера аудиторий для работы и раздаёт конверты с вариантами заданий и комплекты бланков бумаги для участников.

В аудитории организаторы проверяют количество явившихся участников Олимпиады, о чем старший организатор делает соответствующую запись в посадочной ведомости. Участники, опоздавшие на Олимпиаду и явившиеся после вскрытия конверта с заданиями Олимпиады, в аудиторию не допускаются. Размещение участников по местам в аудитории осуществляется в соответствии с установленным правилом.

Организаторы проводят краткий инструктаж по порядку проведения Олимпиады с изложением следующей информации:

— продолжительность выполнения заданий Олимпиады 240 минут;

- после посадки в аудиторию участник до сдачи выполненной работы имеет право не более одного раза выйти в туалет в сопровождении одного из организаторов, порядок выхода определяется старшим организатором;

— на рабочем месте участника при выполнении задания могут находиться только паспорт, материалы, выданные организатором, а так же удостоверение и авторучки;

- при заполнении титульного листа и написании выполненной работы участники могут использовать только ручки с пастой черного или синего цвета;

— запрещается вставать с мест, пересаживаться, разговаривать с другими участниками и решать задачи других вариантов, а так же запрещается использовать источники информации, средства оперативной связи и вычислительной техники;

— за нарушение правил поведения на Олимпиаде, в частности за пользование шпаргалками или электронной техникой, участник удаляется независимо от числа правильно решенных заданий без проверки работы;

— сообщают участникам, что на титульном листе запрещено записывать результаты решений и ответы по заданию. Все чистовые решения необходимо представить на полученном от организатора чистовом бланке, на этом бланке категорически запрещено писать Ф.И.О. и номер удостоверения; на чистовике все оставшиеся пустые места, незаполненные ответами на вопросы, участники обязаны прочеркнуть латинской буквой Z;

— сообщают участникам, что работы проверяются в зашифрованном виде, на проверку поступают только чистовики, черновики сдаются отдельно.

После проведения инструктажа участникам Олимпиады раздают комплекты экзаменационных бланков, объясняют, как заполнять титульный лист, каждому участнику выдают олимпиадное задание, сообщают о необходимости записи № задания на титульном листе и в чистовике. Объявляют устно и записывают на доске время начала и окончания работы, а также дату и время объявления результатов проверки выполненных заданий.

Во время проведения Олимпиады организаторы следят за порядком, не комментируют выполняемые задания и не занимаются их решением. При необходимости выдают участникам дополнительные чистовые бланки с обязательной последующей отметкой их количества на титульном листе участника. Организаторам запрещается во время проведения Олимпиады посещение других аудиторий, а также использование средств мобильной связи.

По окончании Олимпиады, после завершения сбора работ старший организатор пересчитывает их, сопоставляет число сданных работ с количеством участников Олимпиады, присутствующих в аудитории, вносит число сданных работ в соответствующую графу посадочной ведомости. Затем он доставляет работы в пункт приема и обработки письменных работ, где сдаёт их представителю оргкомитета, под руководством которого, производится шифровка работ.

Зашифрованные работы обезличиваются путем удаления титульных листов с информацией об участниках Олимпиады, вновь пересчитываются и передаются председателю предметной экспертной группы для оценки их содержания. Факт передачи оформляется соответствующим образом в журнале учета.

Титульные листы с информацией об участниках Олимпиады пересчитываются представителем оргкомитета и помещаются им в сейф до завершения процедуры проверки и оценивания зашифрованных письменных работ.

Проверка анонимных письменных работ производится в специально отведенной для этих целей аудитории, оборудованной системой сигнализации. Вынос работ из аудитории и доступ в нее посторонних лиц запрещен. Выход члена экспертной группы из аудитории допускается только после сдачи всех проверяемых им работ председателю экспертной группы или его заместителю. Работы, не находящиеся на проверке, хранятся в сейфе, которым оборудована аудитория. Ответственность за соблюдения режима проверки возлагается на руководителя экспертной группы и двух его заместителей.

В процессе проверки работы член экспертной группы проводит оценку ее содержания согласно правилам оценивания, разработанным методической комиссией по проведению Олимпиады и утвержденным Ректором университета. Результаты оценивания каждой задачи в баллах и общая сумма баллов вносятся в специальную таблицу, содержащуюся на бланке чистовика письменной работы. По завершении проверки всех письменных работ каждый член экспертной комиссии заполняет специальную ведомость с указанием шифра работы и суммы баллов, в которых оценено ее содержание.

Проверенные в зашифрованном виде работы передаются на дешифровку представителю оргкомитета по проведению Олимпиады.

Дешифровка работ производится группой шифровальщиков под руководством представителя оргкомитета в пункте приема и учета письменных работ. Дешифрованные работы обрабатываются, а результаты оценивания их содержания заносятся в протокол результатов и в электронную базу данных участников Олимпиады. Протокол результатов заверяется представителем оргкомитета и членами предметной экспертной комиссии.

После обработки письменные работы передаются на ответственное хранение в оргкомитет Олимпиады.

1.5. Структура, содержание и правила оценивания олимпиадных заданий

Успешность освоения образовательных программ университета зависит, как показывает опыт, не только от интеллектуального потенциала абитуриента, но и от степени его интереса к овладению избранной профессией, его эмоционально-волевой устойчивости, психофизической мобильности. Олимпиада, как интеллектуальное соревнование школьников, мотивированных на деятельность в определенной предметной области, проводимая в ограниченных временных рамках, является как раз тем мероприятием, когда есть возможность оценить общий уровень подготовленности абитуриента к обучению в университете. Средством же или инструментом, который позволяет распределить (дифференцировать) абитуриентов по степени подготовленности их к обучению в университете является олимпиадное задание. Содержание задания, его объём и состав задач, должны быть структурированы таким образом, чтобы по результатам выполнения такого задания можно было с приемлемой достоверностью судить о степени сформированности предметно-значимых качеств абитуриента и его умении творчески их применять в жёстких соревновательных и временных условиях.

Опыт проведения в МГТУ им. Н.Э. Баумана различных четырёхчасовых контрольно-диагностических мероприятий (КДМ) - вступительных экзаменов, тестирований, Олимпиад – показал, что десять разных и по трудности, и по тематике, и по назначению задач – объём задания, достаточный, чтобы уверенно судить о «профессиональном» портрете конкурсанта и установить его рейтинг.

В процессе подготовки Олимпиад задачи разрабатываются и подбираются методической комиссией, а её ответственные сотрудники формируют задания и комплекты заданий, содержание каждого из которых соответствует профилю Олимпиады. Комплект формируется из шести параллельных вариантов заданий, что минимизирует возможность контактов участников Олимпиады с одинаковыми номерами вариантов заданий в ходе Олимпиады. Варианты заданий каждого комплекта по своей структуре и сложности параллельны, т.е. содержат одинаковое как общее количество, так и количество задач одинаковой сложности. Формирование вариантов заданий осуществляется на основе, разработанной в университете модели оценивания трудности задач и вариантов заданий, а так же опыта специалистов-предметников. Демонстрационные (типовые) варианты обсуждаются методической комиссией и утверждаются ректором – председателем оргкомитета Олимпиады.

Методика составления олимпиадных заданий содержательно базируется на основных положениях образовательных программ по математике и физике федерального компонента Государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования. В соответствии с целями Олимпиады каждый вариант задания делится на три части по уровню сложности задач (например: с соотношением сложности 1,0; 1,25; 1,5). Задачам каждой из частей назначается определённый максимальный балл (например: 8, 10, 12) таким образом, чтобы сумма баллов, за полностью безупречно выполненное задание составляла 100. Такое деление предполагает наличие задач, одни из которых нацелены на выявление базовых теоретических знаний, навыков владения терминологией, понятийным аппаратом и стандартными алгоритмами; другие – на выявление комплексных предметных интеллектуальных умений применять для решения конкретных задач знания нескольких разделов школьной программы, а третий – на выявление общей эрудиции, степени ориентированности в теоретическом материале, логики мышления, способности анализировать ситуацию и находить подходы и верный путь решения в нестандартных случаях. Варианты олисмпиадных заданий по своему содержанию носят комплексный, сбалансированный характер, охватывая все ключивые, наиболее важные элементы программного учебного материала. Отличительной особенностью заданий по математике является относительно высокий «вес» в них геометрических задач, вкючая задачу по стериометрии. Поэтому для успеха на Олимпиаде от конкурсанта требуется, как свободное владение теоретическим материалом школьного курсов планиметрии и стериометрии, так и практические навыки определения в задачах элементов плоских фигур и пространственных тел, умение строить различные сечения, анализировать их конфигурацию и выполнять теоретические обоснования ключевых шагов решения. Примеры и конкретные характеристики задач и вариантов заданий предметных Олимпиад приведены ниже.

Проверка работ участников Олимпиады осуществляется предметными экспертными комиссиями университетского жюри Олимпиады в состав которых входят ведущие преподаватели и профессора факультета «Фундаментальные науки». С целью исключенния влияния субъективизма и его последствий каждый вариант задания проверяется двумя экспертами. При проверке применяется алгоритм пошагового оценивания решения каждой задачи, когда эксперт положительно оценивает всякое верное действие, каждый аргументированный «шаг» конкурсанта на пути продвижения его к ответу.

Для оценки степени решенности задачи используется пятиразрядный ряд: -1; 0,75; 0,5; 0,25; 0 – отметки, зависящие от количества ошибок при решении задач. Диагноз «1» ставится при полностью безупречном решении и наличии ответа, а «0» - если конкурсант либо не приступал к решению задачи или в решении отсутствуют положительные признаки. Промежуточные отметки (диагнозы) устанавливаются председателем предметной экспертной комиссии после коллегиального обсуждения экспертами задач варианта при проверке. Оценка за выполненную задачу фиксируется как колличество баллов, определяемое произведением отметки (диагноза) на максимальное количество баллов, назначенное за задачу. Так, если за задачу назначено 12 баллов, то в зависимости от степени её решенности , конкурсант может получить 12, 9, 6, 3 или 0 баллов. Конечный результат определяется суммированием «заработанных» баллов за решенные им задачи.

Такая схема оценивания обеспечивает широкую балльную вариативность (от 0 до 100 уровней), надёжную дифференциацию в определении рейтинга участников. Правила оценивания устанавливаются при формировании вариантов заданий и утверждаются ректором.

Раздел 2. Математика

2.1. Содержание варианта задания Олимпиады по математике в МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задания Олимпиады разработаны на основе Федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования. Тексты заданий в целом соответствуют формулировкам, принятым в учебниках и учебных пособиях, включенных в Федеральный перечень.

Контрольно - диагностические материалы (КДМ) позволяют установить уровень усвоения выпускниками федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования, а также позволяют проявить творческий потенциал, способность к самостоятельному мышлению, необходимые для успешного освоения вузовской программы технического профиля.

Каждый вариант по математике состоит из 10 заданий: четырех заданий первого уровня сложности, двух заданий второго уровня и четырех задач третьего уровня сложности.

Все задания требуют от участников развернутого ответа, т.е. должно быть записано полное обоснованное решение задачи. Задачи одного билета охватывают все основные разделы школьного курса математики.

ЗАДАЧИ ПЕРВОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ требуют знания алгоритмов решения задач из одного или двух разделов математики. Для их решения требуются простые математические преобразования и вычисления. Это могут быть текстовые задачи: задачи на движение, производительность, на пропорции и процентные отношения, на прогрессии; тригонометрические уравнения или системы уравнений, примеры на тождественные преобразования тригонометрических выражений; рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения, и их системы; задачи, связанные со свойствами геометрических фигур, в том числе, задачи по планиметрии и простейшие стереометрические задачи.

2.2. Примеры задач первого уровня сложности:

Текстовые задачи

1. Два экскаватора, работая одновременно, могут вырыть котлован за 4 часа. Один пер-

вый экскаватор затратит на эту работу на 6 ч больше, чем один второй. За какое время может вырыть котлован каждый экскаватор, работая отдельно? Ответ: 12 и 6 ч.

2. Расстояние между станциями А и В равно 103 км. Из А в В вышел поезд и, пройдя некоторое расстояние, был задержан, а потому оставшийся путь до В проходил со скоростью, на 4 км/ч больше прежней. Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что оставшийся путь до В был на 23 км длиннее пути, пройденного до задержки, и на прохождение пути после задержки было затрачено на 15 мин больше. Чем на прохождение пути до задержки. Ответ: 80 км/ч.

3. Два лыжника стартовали друг за другом с интервалом в 6 минут. Второй лыжник догнал первого в двух километрах от точки старта. Дойдя до отметки 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого на расстоянии 1 км от точки поворота. Найдите скорости лыжников. Ответ: 10 и 20 км/ч.

4. Турист проехал на автомобиле 5/8 всего пути, а остальную часть – на катере. Скорость катера на 20 км/ч меньше скорости автомобиля. На автомобиле турист ехал на 15 мин дольше, чем на катере. Чему равны скорость автомобиля и скорость катера, если весь путь туриста равен 60 км? Ответ: 100 км/ч и 90 км/ч, или 80 км/ч и 60 км/ч.

5. Если сначала половину заказа выполнит один рабочий, а потом другую половину – второй рабочий, то весь заказ будет выполнен за 2 часа. Если же первый рабочий выполнит одну треть заказа, а потом оставшуюся часть выполнит второй, то весь заказ будет сделан за 2 ч 10 мин. За сколько времени каждый рабочий отдельно может выполнить весь заказ? Ответ: 1.5 и 2.5 ч.

6. Поезд вышел из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 230 км. Через час навстречу ему вышел из пункта В торой поезд, скорость которого на 15 км/ч больше, чем у первого. Определите скорости поездов, если известно, что они встретились на расстоянии 120 км от пункта А. Ответ:40 и 55 км/ч.

7. Рабочий должен был по плану изготовить за несколько дней 72 детали. Так как рабочий каждый день изготавливал на 2 детали меньше плана, то закончил работу через 3 дня после срока. Сколько деталей в день должен был изготовлять рабочий по плану? Ответ: 8 деталей.

8. Вкладчик взял из банка сначала 1/4 своих денег, а потом 4/9 оставшихся и еще 64 тыс. руб. После этого у него осталось на вкладе 3/20 всех его денег. Какова сумма вклада? Ответ:240 тыс. руб.

9. Найти сумму трех чисел, зная, что третье относится к первому как 4,5: 15\4 и составляет 40 % второго, а сумма первого и второго равна 400. Ответ: 500.

10. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди? Ответ: 13,5 кг.

Прогрессии

1. Сумма первых девяти членов арифметической прогрессии равна 117, а сумма последовательных членов этой прогрессии, начиная с десятого номера и до пятнадцатого включительно, равна 213. Найдите четвертый член прогрессии. Ответ: 10.

2. Сколько членов содержится в возрастающей арифметической прогрессии с положительными членами, у которой сумма членов с нечетными номерами составляет 52% суммы членов всей прогрессии? Ответ: 51.

3. Укажите все значения n, при которых сумма n последовательных членов арифметической прогрессии 25, 22, 19,..., начиная с первого, не меньше 66. Ответ: $3 \le n \le 14$, $n \in N$.

4. Сколько последовательных членов арифметической прогрессии 36, 33, 30, ..., начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, большую 201? Ответ: $8 \le n \le 17$, $n \in N$.

5. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 68, 65, 62...? Ответ: 805.

6. В арифметической прогрессии 10 членов, их сумма равна 245. Сумма членов с четными номерами относится к сумме членов с нечетными номерами, как 27: 22. Определите первый член и разность прогрессии. Ответ: $a_1 = 2$, $d = 5$.

7. Найти три числа, которые образуют возрастающую арифметическую прогрессию если известно, что сумма их равна 30, и что если к ним прибавить соответственно 1, 2, 9, то новые три числа образуют геометрическую прогрессию. Ответ: 5, 10, 15.

8. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Если вместо третьего числа поставить сумму трех чисел, а остальные числа оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа, если второе число равно 12. Ответ: 4; 12; 20.

Логарифмические и показательные уравнения

1. Решите уравнение $2^{1+\sqrt{x}} + 4 = 9\sqrt{2^{\sqrt{x}}}$. Ответ: 16.

2. Решите уравнение $8 \cdot 64^{\frac{1}{x}} - 3 \cdot 2^{\frac{3x+3}{x}} + 16 = 0$. Ответ: 3.

3. Решите уравнение $2^{\frac{3x+2}{2x+3}} - 2^{\frac{1-x}{2x+3}} = 1$. Ответ: 1.

4. Решите уравнение $64 \cdot 9^x + 12^{x+1} - 27 \cdot 16^x = 0$. Ответ: 2.

5. Решите уравнение $9^{|x^2-4x|+1} - 81^{|x-4|} = 12 \cdot 3^{|x^2-4x|} - 4 \cdot 9^{|x-4|}$. Ответ: $1-2\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$, 4.

6. Решите уравнение $2x^2 \cdot 2^{\sqrt{x+2}} + x \cdot 2^{x+1} = 2x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{1+\sqrt{x+2}}$. Ответ: 0; 1; 2.

7. Решите уравнение $x^{\log_2 9} - 8 \cdot 3^{\log_2 x} = 9$. Ответ: 4.

8. Решите уравнение $2^x \cdot 9^{\frac{x}{x-1}} = \frac{3}{2}$. Ответ: -1; $1-\log_2 3$.

9. Решите уравнение $x^{\log_{64}(3x)} = 3^{\frac{1}{\log_3 2}}$. Ответ: 9; $\frac{1}{27}$.

10. Решите уравнение $3^{1-2|x|} + 9^{1+|x|} = 28$. Ответ: $x = \pm\frac{1}{2}$.

11. Решите уравнение $(\log_2 x + \log_x 2 + 2)(\log_2 x - \log_{2x} x) = 6$. Ответ: 4; $\frac{1}{8}$.

12. Решите уравнение $2\log_{0,25}^2 16x + \log_2 \frac{x^2}{64} + 8 = 0$. Ответ: $\frac{1}{1024}$, $\frac{1}{4}$.

13. Решите уравнение $\sqrt{\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) + 1} = x - 4 + \sqrt{\log_3(x-1) - 1}$. Ответ: 4.

14. Решите уравнение $\log_2\left(3\left|x - \frac{17\pi}{6}\right| + 4\right) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$. Ответ: $\frac{17\pi}{6}$.

15. Решите уравнение $\left(1 + \log_2\left(\frac{3}{2} - x\right)\right) \cdot \log_x \frac{1}{2} = 1$. Ответ: $x = 1/2$.

16. Решите уравнение $\log_{x/9} x^2 + 5\log_{9x} x^3 - 12\log_{3x} \sqrt{x} = 0$. Ответ: 1; 3; $3^{\frac{2}{11}}$.

ЗАДАЧИ ВТОРОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ содержат рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические неравенства, смешанные неравенства и их системы; задачи, связанные с исследованием функций, проверяющие умение выполнять действия с функциями, строить их графики, использовать основные свойства элементарных функций, а именно: находить области определения и множества значений, учитывать непрерывность, монотонность.

2.3. Примеры задач второго уровня сложности:

Неравенства

1. Решите неравенство $\dfrac{3^{-\frac{1}{x}}-3}{\lg\left(\frac{1}{2}-x\right)}\ge 0$. Ответ: $x\in[-1;-0,5)\cup(0;\,0,5)$.

2. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{x}-8}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}}$.

Ответ: $x\in[0;\,9)\cup(16;\,25]$.

3. Решите неравенство $\left(\log_2\dfrac{3x+2}{2x}\right)\sqrt{x^4-3x^2+2}<0$. Ответ: $x\in(-2;-\sqrt{2})\cup(-1;-\frac{2}{3})$.

4. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}\ge\dfrac{2\sqrt{x}+11}{x-7\sqrt{x}+10}$. Ответ: $x\in[0;\,4)\cup(4;\,16]$

5. Найдите область определения функции $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x}{4-x}\right)+\sqrt{x^2-4x+3}$.

Ответ: $x\in(0;\,1]\cup[3;\,4)$.

6. Решите неравенство $\dfrac{x-7\sqrt{x}+10}{2-\sqrt{x}}\ge\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$. Ответ: $x\in[0;\,4)\cup(4;\,16]$.

7. Решите неравенство $(\cos x-1)(1-\sqrt{x+5})\le 0$. Ответ: $x\in[-5;-4]\cup\{2\pi n,\ n=0,1,2,\ldots\}$.

8. Найдите область определения функции $y=\dfrac{\log_3(2^x+4^x-2)}{x-3}$. Ответ: $x\in(0;3)\cup(3;+\infty)$.

9. Решите неравенство $(\lg(x+1)-1)\sqrt{x^2-3x+2}\le 0$. Ответ: $x\in(-1;\,1]\cup[2;\,9]$.

10. Решите неравенство $\dfrac{6-x}{\sqrt{x-1}-1}\le 1$. Ответ: $x\in[1;\,2)\cup[5;\,\infty)$.

11. Решите неравенство $\dfrac{(4^x-12\cdot 2^x+32)(x-1)}{\sqrt{x}-1}>0$. Ответ: $x\in[0;\,1)\cup(1;\,2)\cup(3;\,+\infty)$.

12. Решите неравенство $\left(\sqrt{4-x^2}-2\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right)\ge 0$. Ответ: $x\in[1;\,2]\cup\{0\}$.

13. Решите неравенство $\dfrac{x-3\sqrt{x-3}-1}{4\sqrt{x-3}-x}\le 0$. Ответ: $x\in[3;\,4)\cup(4;\,7]\cup(12;\,\infty)$.

14. Решите неравенство $\dfrac{5}{x-4\sqrt{x}+3}\le\dfrac{3}{x-2\sqrt{x}+1}$. Ответ: $x\in[0;\,1)\cup(1;\,9)$.

15. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{20-x^2+x}}{2x-3} \le \dfrac{\sqrt{20-x^2+x}}{x-6}$. Ответ: $x \in \{-4; 5\} \cup [-3; 1{,}5)$.

16. Решите неравенство $\sqrt{x^2-3x-18} \le \dfrac{9\sqrt{x^2-3x-18}}{x-2}$. Ответ: $x \in \{-3\} \cup [6; 11]$.

17. Решите неравенство $(3^x-1)\sqrt{x^2-4x+3} \ge 0$. Ответ: $x \in \{1\} \cup [2; +\infty)$.

18. Решите неравенство $(x-1)\sqrt{1-x^2} \ge (3x-2)\sqrt{1-x^2}$. Ответ: $x \in \{1\} \cup [-1; 0{,}5]$.

19. Решите неравенство $\sqrt{2\sqrt{x+1}-2} > \sqrt{1+x}-5$. Ответ: $x \in [0; 80)$.

20. Решите неравенство $(\log_x 4)(\log_{8x} 0{,}25)(\log_7 32x) \ge \log_7\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$.

Ответ: $x \in (0; 2^{-\sqrt{15}}] \cup (1/8; 1) \cup [2^{\sqrt{15}}; +\infty)$.

Тригонометрия

1. Решите уравнение $\sqrt{2}\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = 3\sin x$. Укажите его корни, лежащие в промежутке $[-2\pi; \pi/2]$. Ответ: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ x_1 = -\dfrac{7\pi}{4},\ x_2 = -\dfrac{5\pi}{4},\ x_3 = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Решите уравнение $\cos 2x + 5\sin|x| = 3$. Ответ: $x = \pm\left((-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n\right),\quad n \in Z,\quad n \ge 0$.

3. Решите уравнение $3 + 2\sin 2x = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$. Ответ: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z$.

4. Решите уравнение $\cos(3x+\pi) - \cos 5x + \sqrt{2}\sin\left(4x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$. Укажите его корни, лежащие в промежутке $[\pi/2; \pi]$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4},\quad x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;\quad x_1 = \dfrac{5\pi}{8},\quad x_2 = \dfrac{7\pi}{8}\pi,\quad x_3 = \dfrac{3\pi}{4}$.

5. Решите уравнение $\sin 9x - 2\sin 3x = 0$. Ответ: $x = \dfrac{\pi n}{3},\ x = \pm\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z$.

6. Решите уравнение $\sin^2 4x - \sin^2 x = \sin^2 3x$. Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi n}{3},\ x_2 = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4},\ n \in Z$.

7. Решите уравнение $|\cos 3x| + \sin 6x = 0$. Ответ: $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\quad x = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z$.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 1. \end{cases}$

Ответ: $(\pi n; 2\pi k)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$.

9. Решите уравнение $3\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{6}\sin x=0$. Ответ: $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n, \quad x=2\pi n, \quad n\in Z$.

10. Решите уравнение $\sin(4\sqrt{x})+2\cos^2\sqrt{x}=1$. Ответ:

$x=\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)^2, n\in Z, n\geq 1;\ x=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)^2, k\in Z, k\geq 0.$

11. Решите уравнение $(1+\mathrm{tg}^2x)(1+\cos 2x)\mathrm{ctg}x+4\cos x=0$. Ответ: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

12. Решите уравнение $2\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos x\cos^2 4x+\cos^2 4x=0$. Ответ: $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

13. Решите уравнение $\cos 2x=2\cos x\cos 5x-1$. Ответ: $x=\frac{\pi n}{3},\ x=\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

14. Решите уравнение $\sin^4 9x+\cos^7 15x\cos^2 9x=1$. Ответ: $x=\frac{2\pi n}{3},\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{9},\ n\in Z$.

15. Решите уравнение $\cos x\sqrt{16(\mathrm{tg}x+1)|\mathrm{tg}x-1|+9}=4\sin x+\cos x$. Ответ: $x=\mathrm{arctg}\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

Множества значений функций

1. Найдите множество значений функции $f(x)=\log_{0,5}(3+\sin x)$. Ответ: $E=[-2;-1]$.

2. Найдите множество значений функции $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin(x^2+2x+2)\right)$. Ответ: $[\sqrt{2};2]$.

3. Найдите множество значений функции $f(x)=\log_{0,25}(5-\log_3 x)+\log_{0,25}(\log_3 x-1)$.

Ответ: $[-1;+\infty)$.

4. Найдите множество значений функции $f(x)=4\cdot 0{,}5^{(2-\log_3 x)\log_3 x}$. Ответ: $[2;+\infty)$.

5. Найдите множество значений функции $f(x)=\log_{0.5}\left(\frac{\sin x}{\sin x+7}\right)$. Ответ: $[3;+\infty)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\arccos\left(\frac{\cos x}{\cos x+2}\right)$. Ответ: $[\arccos 1/3;\pi]$.

7. Найдите множество значений функции $f(x)=\arcsin(\sqrt{x^2-4}-\frac{1}{2})$. Ответ: $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

8. Найдите множество значений функции $f(x)=4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{7\pi}{12}(\sqrt{4-x^2}-1)^2\right)$.

Ответ: $\left[-2\sqrt{2};\, 2\sqrt{3}\right]$.

9. Найдите множество значений функции $f(x) = 15 - x^2 - 4\sqrt{9 - x^2}$. Ответ: $E_f = [2;\, 6]$.

10. Найдите множество значений функции $f(x) = 2^{-(2\arccos x)/\pi}$, если $x \geq -1/\sqrt{2}$.

Ответ: $[1/\sqrt{8};\, 1]$.

11. Найдите множество значений функции $f(x)=\log_{0,2}\left(\dfrac{80}{13+\log_5(125+x^4)}\right)$. Ответ: $[-1; +\infty)$.

ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ включают задания по планиметрии на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей), проверяющие знания основных свойств и соотношений в треугольниках, четырехугольниках, многоугольниках, свойств окружностей и их касательных, умение выполнять геометрические построения. Так же предлагается задача на использование производной, которая проверяет умение выполнять действия с функциями, вычислять производные, использовать геометрический смысл производной, составлять уравнения касательных к графикам функций, находить экстремумы функций, наибольшие и наименьшие значения на отрезке и владеть основами аналитической геометрии (выполнять действия с координатами и векторами на плоскости). К этой группе относится и задача, которая требует умения решать алгебраические уравнения, неравенства или системы уравнений с параметрами при наличии ограничений на неизвестные. Умение решать подобные задачи показывает уровень логического мышления участника, его способность находить выход из нестандартной ситуации. Последней задачей является задача по стереометрии. Для ее решения необходимо владеть методикой построения стереометрических чертежей и навыками применения теорем планиметрии и стереометрии для вычисления требуемых элементов. Успешное решение данной задачи показывает уровень пространственного воображения школьника, которое необходимо будущему инженеру.

2.4. Примеры задач третьего уровня сложности:

Планиметрии

1. Площадь треугольника ABC равна $16\sqrt{3}$, сторона $AB = 8$, угол $\angle B = 60°$. На сторонах AB, BC и AC выбраны точки K, L и M так, что $AK : KB = 3 : 5$, $BL : LC = 1 : 7$, $AM : MC = 3 : 1$. Найдите площадь круга, описанного около треугольника KLM.

Ответ: $\frac{91}{9}\pi$.

2. В равностороннем треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC выбраны точки K, L и M так, что $AK:KB=3:5$, $BL:LC=1:7$, $AM:MC=3:1$. Площадь круга, описанного около треугольника KLM равна $\frac{91}{9}\pi$. Найдите длину стороны треугольника ABC. Ответ: 8.

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK. Медиана CM треугольника ACK равна 3, а медиана CN треугольника BCK равна $2\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника ABC. Ответ: $6\sqrt{2}$.

4. Окружность с центром O касается сторон угла B в точках A и C. Лучи AO и BC пересекаются в точке M, $OM=5$, $\angle CAM=0{,}5\arccos 0{,}6$. Найдите площадь треугольника BOM. Ответ: 15.

5. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. Известно, что $\angle B+\angle C=\angle AKB$, $AK=5$, $BK=16$, $KC=2$. Найдите площадь круга, вписанного в треугольник ABC. Ответ: $\frac{243}{52}\pi$.

6. Площадь прямоугольного треугольника равна 12, а его гипотенуза равна $2\sqrt{13}$. Найдите косинус острого угла между медианами данного треугольника, проведенными к его катетам. Ответ: $\frac{13\sqrt{10}}{50}$.

7. Один из углов трапеции $ABCD$ равен 30°, а прямые, содержащие боковые стороны AB и CD, пересекаются в точке M под прямым углом. Радиус вписанной в треугольник AMD окружности равен $2(\sqrt{3}-1)$, а площадь трапеции $ABCD$ равна $\frac{15\sqrt{3}}{2}$. Найдите длины оснований трапеции. Ответ: 2, 8.

8. Около окружности радиуса 2 описана равнобокая трапеция $ABCD$ с углом A, равным 60°. Точки K и N - точки касания окружности с боковыми сторонами AB и CD, соответственно. Найдите площадь четырехугольника $KBCN$. Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

9. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 28, угол A составляет 120°, BK и BN - высоты параллелограмма, проведенные к прямым, содержащим стороны AD и CD со-

ответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если длина отрезка KN равна $\sqrt{111}$. Ответ: $S = 24\sqrt{3}$.

10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD пересекаются в точке F, причем $AF : FC = 3:1$, $BF : FD = 4:3$, угол $\angle AFD = \arccos\frac{1}{4}$. Найдите радиус описанной около треугольника AFD окружности, если $AC = 4$. Ответ: $\frac{6}{\sqrt{15}}$.

11. В равнобедренном треугольнике ABC вписанная окружность касается основания AC в точке D, а боковой стороны AB в точке E. Отрезок FD, где F – середина стороны AB, пересекает вписанную окружность в точке G, причем G не совпадает с D. Через точку G проведена касательная к окружности, пересекающая сторону AB в точке H. Найдите величину угла BCA, если $FH : HE = 2:3$. Ответ: $\arccos\frac{3}{4}$.

12. В трапеции $ABCD$ основания $AD = 9$, $BC = 2$, углы A и D при основании равны $\operatorname{arctg} 4$ и $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник CBE, где E – точка пересечения диагоналей трапеции. Ответ: $\frac{2}{4+\sqrt{5}}$.

13. В треугольнике ABC со сторонами $AB = \sqrt{13}$ и $BC = \sqrt{6}$ проведена медиана BD. Окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC, касаются отрезка BD в точках M и N. Найдите длину отрезка MN. Ответ: $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{6}}{2}$.

14. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол $\angle EDC$ равен $30°$, площадь треугольника AEC равна $\sqrt{3}/2$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1:2$. Найдите стороны треугольника ABC.
Ответ: $2;\ \sqrt{6};\ \sqrt{3}+1$.

Задачи на производную

1. Найдите площадь треугольника, одна сторона которого лежит на касательной к графику функции $y = 0{,}25x^2 - x + 4$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$, а две стороны – на касательных к этому графику, проходящих через точку $A(5;\ 3)$. Ответ: 3.

2. Разность одной стороны треугольника и половины второй равна 3, а угол между ни-

ми равен $\arccos\frac{4}{5}$. Какую наименьшую длину может иметь третья сторона этого треугольника? Ответ: $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

3. На кривой $y = x^2 + x$ найдите точку, расстояние от которой до точки $M(-1; 1)$ является наименьшим. Найдите это расстояние. Ответ: точка $A(-1,5; 0,75)$, наименьшее расстояние $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

4. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(0; 3)$, а его катеты лежат на прямых $x = -1$ и $y = 0$.
Ответ: 6.

5. Какую наибольшую площадь может иметь плоский треугольник, ограниченный осью Ox прямой $x = \frac{3}{2}$ и касательной к графику функции $y = 2x^2$ в точке с абсциссой x_0, если $0 < x_0 < 3$? Ответ: 2.

6. Найдите наибольший и наименьший периметры, которые могут быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси x, а две другие – на графике функции $y = 2\sqrt{2}(1+\sin x)$, $-\pi/2 \le x \le 3\pi/2$.

Ответ: $P_{\max} = 4\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{2} + 1\right) \approx 12{,}8$, $P_{\min} = 4\left(\frac{3\pi}{4} + \sqrt{2} - 1\right) \approx 11{,}1$.

7. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, две вершины которого лежат на графике функции $y = \sqrt{4x - x^2 - 3}$, $x \in (1; 3)$, одна вершина находится в начале координат, а сторона параллельна оси x? Ответ: 0,5.

8. Составьте уравнения общих касательных к графикам функций $y = \frac{32}{9}x^3$ и $y = (x+1)^2$. Ответ: $y = 0$; $y = 6x - 3$; $y = \frac{8}{3}x + \frac{8}{9}$.

9. Какое наибольшее значение может принимать площадь прямоугольного треугольника, одна вершина которого совпадает с началом координат, другая лежит на кривой $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$, а вершина прямого угла расположена на прямой $y = x$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

10. Найдите угол между касательными к графику функции $y=\dfrac{x^2}{12}$, проходящими через точку $M(2\sqrt{3};-3)$. Ответ: 90°.

Задачи с параметрами

1. Найдите все значения параметра p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2-28y+195=3\dfrac{|x|}{x}, \\ y-4p=4(x-1)^2, \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения, и решите ее при каждом p.

Ответ: $p\in(-\infty;2]$ $x_1=1+\sqrt{4-p},\ x_2=1+\sqrt{3-p},$

$p\in(3;4)$ $x_{1,2}=1\pm\sqrt{4-p},$

$p=3$ $x_1=1,\ x_2=2.$

2. Найдите все значения a, при которых уравнение $(x-a)^2+a-12=\sqrt{\dfrac{|x|-x}{x-6}}$ имеет единственное решение, и решите его при каждом a.

Ответ: $a\in(-4;3)\bigcup\{8;12\}$ $x=a+\sqrt{12-a}.$

3. Найдите все значения a, при которых уравнение $(x+a)^2+2a=\dfrac{7x-9|x|}{x-|x|}$ имеет единственное решение, и решите его при каждом a.

Ответ: $a\in(-4;2]\bigcup\{4\}$ $x=-a-\sqrt{8-2a}.$

4. Найдите все значения a, при которых уравнение $(x+2)^2+(a+\dfrac{|x-1|}{x-1})^2=25$ имеет два различных решения, и решите его при каждом a.

Ответ: $a=-4$ $x_1=-2,\ x_2=2,$

$a\in[-3;3)$ $x_1=-2-\sqrt{25-(a-1)^2},x_2=-2+\sqrt{25-(a+1)^2},$

$a\in(5;6)$ $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{25-(a-1)^2}.$

5. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2+x|x|=4(3+2ax-5a)$ имеет два различных решения, и решите его при каждом a.

Ответ: $a\in\left(0;\frac{3}{5}\right]$ $x_1=2a+2\sqrt{(a-1)(a-\frac{3}{2})}, x_2=\frac{5a-3}{2a}$,

$a\in(\frac{3}{5};1)\bigcup(\frac{3}{2};+\infty)$ $x_{1,2}=2a\pm2\sqrt{(a-1)(a-\frac{3}{2})}$.

Стереометрия

1. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через центр описанной около призмы сферы и вершину основания A и пересекающей сторону основания BC в точке F так, что $CF=2BF$, если стороны основания призмы равны 6, а расстояние от центра основания призмы до секущей плоскости равно $\sqrt{3}/3$. Ответ: $5\sqrt{6}$.

2. Цилиндр с высотой h и радиусом основания $\sqrt{2}h$ вписан в конус так, что одно из оснований лежит в плоскости основания конуса, а окружность другого основания — на боковой поверхности. В свою очередь, конус должен быть вписан в сферу возможно меньшего радиуса. При какой высоте конуса радиус описанной около него сферы будет наименьшим? Найдите значение радиуса. Ответ: $3h$, $R_{\min}=\frac{9}{4}h$.

3. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота относится к боковому ребру, как $\sqrt{2}:\sqrt{3}$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту основания? Найдите отношения объемов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае.

Ответ: $S_{\min}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}R^2$, $3:19$.

4. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $\sqrt{3}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане основания AD, пересекающей ребро AB в точке M, так что $MB=2AM$, и проходящее через центр сферы, описанной около пирамиды, если радиус сферы равен $5/2$. Ответ: $22\sqrt{3}/15$.

5. Основанием пирамиды $TABC$ служит прямоугольный треугольник ABC. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $45°$, а угол между боковым ребром TB и гипотенузой основания AC равен $60°$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро TB и

точку M на стороне AC, если высота пирамиды равна h? Найдите расстояние от середины гипотенузы AC до точки M, когда площадь сечения наименьшая?

Ответ: $\frac{h^2}{\sqrt{6}}, \frac{h\sqrt{2}}{3}$.

6. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $\sqrt{14}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане TD боковой грани BTC, если расстояние от вершины A до секущей плоскости равно $\sqrt{3}$. Ответ: $\frac{21\sqrt{3}}{4}$.

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $4\sqrt{7}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане BD боковой грани BTC, если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно $\sqrt{2}$. Ответ: 21.

8. Шар радиуса 6 с центром в точке O вписан в правильную треугольную пирамиду со стороной основания, равной 36. Через точку O проходит плоскость, параллельная стороне основания пирамиды и апофеме, проведенной к другой стороне основания. Найдите площадь сечения пирамиды указанной плоскостью. Ответ: $35\sqrt{39}$.

9. На высоте TO правильной треугольной пирамиды $TABC$ выбрана точка M, так что $TM = 3 \cdot OM$. Через точку M проходит плоскость, параллельная стороне основания пирамиды и апофеме, проведенной к другой стороне основания. Найдите объемы частей, на которые делит пирамиду указанная плоскость, если сторона основания пирамиды равна 8, а высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$. Ответ: $V_1 = \frac{121}{8}$, $V_2 = \frac{135}{8}$.

10. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ с высотой, равной 9, и стороной основания, равной 4, проведена плоскость, проходящая через апофему TK боковой грани TAB и параллельная медиане CM боковой грани TCD. На каком расстоянии от этой плоскости находится центр основания пирамиды? Ответ: $\frac{18}{11}$.

2.5. ПРИМЕРЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ ОЛИМПИАДЫ

I ЭТАП ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

ВАРИАНТ № 1

1. Каждый из двух рабочих должен был изготовить по 45 деталей. Второй рабочий приступил к выполнению задания на 25*мин* позднее первого, по трети задания они выполнили к одному времени, а к моменту окончания работы второй рабочий ещё помог первому, изготовив за него 6 деталей. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий? (8 баллов)

2. Укажите все значения n, при которых сумма n последовательных членов арифметической прогрессии 31, 28, 25,..., начиная с первого, не меньше 84.(8 баллов)

3. Решите уравнение $2^{x+1} = 7 + 2^{2-x}$. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\cos 2x + 5\sin x = 3$. Укажите корни, принадлежащие промежутку $[-3\pi/2;\pi/2]$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{3}{x-3\sqrt{x}+2} \le \frac{2}{x-2\sqrt{x}+1}$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 11 - x^2 - 2\sqrt{9-x^2}$. (10 баллов)

7. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 28, угол A составляет 60°, BK и BN – высоты параллелограмма, проведенные к прямым, содержащим стороны AD и CD соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если длина отрезка KN равна $\sqrt{39}$. (12 баллов)

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2/3$, проходящими через точку $M\left(\sqrt{3};3/4\right)$. (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$y = \frac{x+|x|}{x};\ (x-a)^2 = y+a$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и параллельной диагонали основания BD, если расстояние от BD до секущей плоскости равно l, а другая диагональ основания AC образует с секущей плоскостью угол 30° и с диагональю AC_1 – угол 45°. (12 баллов)

2.6. Решения варианта №1

1. Каждый из двух рабочих должен был изготовить по 45 деталей. Второй рабочий приступил к выполнению задания на 25*мин* позднее первого, по трети задания они выполнили к одному времени, а к моменту окончания работы второй рабочий ещё помог первому, изготовив за него 6 деталей. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

Решение.

Пусть первый рабочий изготавливал x – деталей в час, второй рабочий y – деталей в час, тогда $\frac{15}{x}-\frac{15}{y}=\frac{25}{60}$; $\frac{24}{x}=\frac{36}{y}\Rightarrow\frac{3}{x}-3\cdot\frac{2}{3x}=\frac{1}{12}$; $\frac{1}{x}=\frac{1}{12}$; $x=12,\ y=18$.

Ответ: 12 и 18 деталей.

2. Укажите все значения n, при которых сумма n последовательных членов арифметической прогрессии 31, 28, 25,…, начиная с первого, не меньше 84.

Решение.

$\frac{31+31-3(n-1)}{2}n\ge 84$; $\quad 3n^2-65n+168\le 0$; $\quad n_{1.2}=\frac{65\pm 47}{6}$, $n_1=3$, $n_2=18\frac{2}{3}$.

Ответ: $3\le n\le 18$, $n\in N$.

3. Решите уравнение $2^{x+1}=7+2^{2-x}$.

Решение.

$2^{x+1}=7+2^{2-x}$; $2(2^x)^2-7\cdot 2^x-4=0$; $2(2^x-4)(2^x+1/2)=0$; $2^x=4$, $x=2$.

Ответ: $x=2$.

4. Решите уравнение $\cos 2x+5\sin x=3$. Укажите корни, принадлежащие промежутку $[-3\pi/2;\pi/2]$.

Решение.

$\cos 2x+5\sin x=3\Leftrightarrow 2\sin^2 x-5\sin x+2=0$; $\sin x=(5\pm 3)/4$.

1) $\sin x=2$ – решений нет. 2) $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$. В заданный промежуток входят корни $\left\{-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$.

Ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$; $\left\{-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$.

5. Решите неравенство $\dfrac{3}{x-3\sqrt{x}+2} \le \dfrac{2}{x-2\sqrt{x}+1}$.

Решение.

Замена: $\sqrt{x} = t \ge 0,\ x = t^2$.

$$\frac{3}{t^2-3t+2} \le \frac{2}{t^2-2t+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{(t-1)(t-2)} - \frac{2}{(t-1)^2} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3t-3-2t+4}{(t-2)(t-1)^2} \le 0$$

$$\frac{t+1}{(t-2)(t-1)^2} \le 0 \quad \overset{t\ge 0}{\Leftrightarrow} \quad t \in [0;1) \cup (1;2) \Leftrightarrow x \in [0;1) \cup (1;4).$$

Ответ: $x \in [0;1) \cup (1;4)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 11 - x^2 - 2\sqrt{9-x^2}$.

Решение.

Функция $t = \sqrt{9-x^2}$ принимает значения $t \in [0;3]$. Рассмотрим функцию $y = 11-(9-t^2)-2t$, определенную на отрезке $[0;3]$. Графиком функции $y = t^2-2t+2$ является парабола с вершиной в точке с абсциссой $t=1$ и ветвями, направленными вверх. Таким образом, минимальное значение y равно 1, оно достигается в точке $t=1$, максимальное значение равно 5, оно достигается в точке $t=3$. Функция $y = f(x)$ принимает значения из отрезка $[1;5]$.

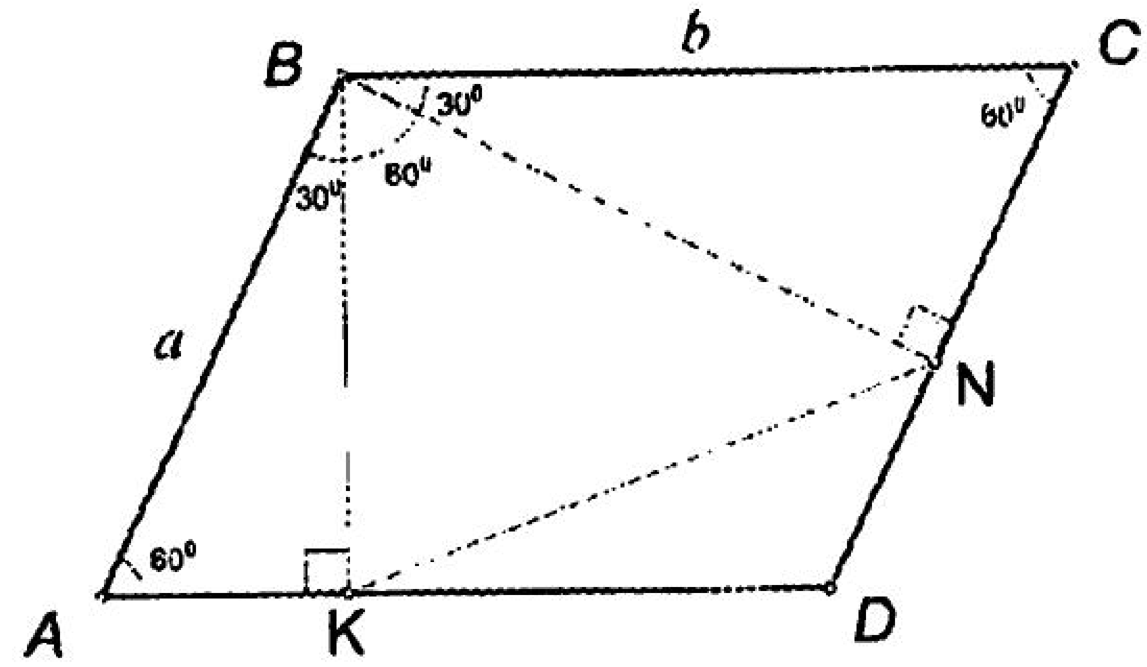
Ответ: $E_f = [1;5]$.

7. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 28, угол A составляет 60°, BK и BN – высоты параллелограмма, проведенные к прямым, содержащим стороны AD и CD соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если длина отрезка KN равна $\sqrt{39}$.

Решение.

Пусть стороны параллелограмма a и b. Найдем высоты BK и BN: $BK = a\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$BN = b\sin 60^\circ = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$.



В треугольнике KBN угол B равен 60°. По теореме косинусов

$LN^2 = BK^2 + BN^2 - 2BK\cdot BN\cos 60^\circ = \frac{3a^2}{4} + \frac{3b^2}{4} - \frac{3ab}{4} = 39 \Rightarrow a^2 + b^2 - ab = 52.$

Тогда $\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 52, \\ a + b = 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 48, \\ b = 14 - a \end{cases}.$

Решая уравнение $a^2 - 14a + 48 = 0$, получаем: $a = 8$ или $a = 6$. Тогда $b = 6$ и $a = 8$ или $b = 8$ и $a = 6$. Площадь параллелограмма $S = 24\sqrt{3}$.

Ответ: $S = 24\sqrt{3}$.

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2/3$, проходящими через точку $M\left(\sqrt{3}; 3/4\right)$.

Решение.

Уравнение касательной к графику заданной функции имеет вид $y = \frac{x_0^2}{3} + \frac{2x_0}{3}(x - x_0)$, где x_0 – абсцисса точки касания. Так как касательная проходит через точку M, $\frac{3}{4} = \frac{x_0^2}{3} + \frac{2x_0}{3}\left(\sqrt{3} - x_0\right)$; $x_0^2 - 2\sqrt{3}x_0 + 9/4 = 0$; $x_0 = \sqrt{3} \pm \sqrt{3}/2$; $(x_0)_1 = 3\sqrt{3}/2$, $(x_0)_2 = \sqrt{3}/2$. Угловые коэффициенты касательных: 1) $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \sqrt{3}$, $\alpha_1 = 60^\circ$; 2) $\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha_2 = 30^\circ$. Угол между касательными: $\varphi = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

Ответ: 30°.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $y = \frac{x + |x|}{x}$; $(x - a)^2 = y + a$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение.

I. При $x > 0$ $y = 2$, $x^2 - 2ax + a^2 - a - 2 = 0$ (*).

Уравнение (*) имеет два различных положительных корня $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a + 2}$, если:

$$\begin{cases} D/4 = a + 2 > 0, \\ a > 0, \\ a^2 - a - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -2, \\ a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a > 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a > 2.$$

Уравнение (*) имеет один положительный корень $x_{1,2} = a + \sqrt{a + 2}$, если:

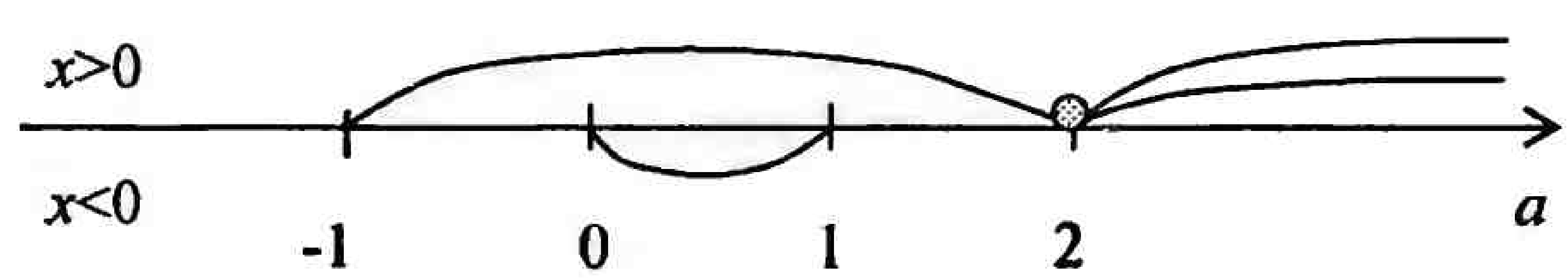
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=0,\\ a>0,\end{cases}\\ a^2-a-2<0,\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-1,\\ a=2\end{array}\right.\\ a>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -1<a\le 2.$$

II. При $x<0,\ y=0,\ x^2-2ax+a^2-a=0$ (**).

Уравнение (**) не может иметь двух отрицательных корней, так как система неравенств $\begin{cases} D/4=a>0,\\ a<0,\\ a^2-a>0.\end{cases}$ решений не имеет.

Уравнение (**) имеет один отрицательный корень $x=a-\sqrt{a}$, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D/4=a=0,\\ a<0,\end{cases}\\ a^2-a<0,\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=0,\\ a=1\end{array}\right.\\ a<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 0<a<1$$

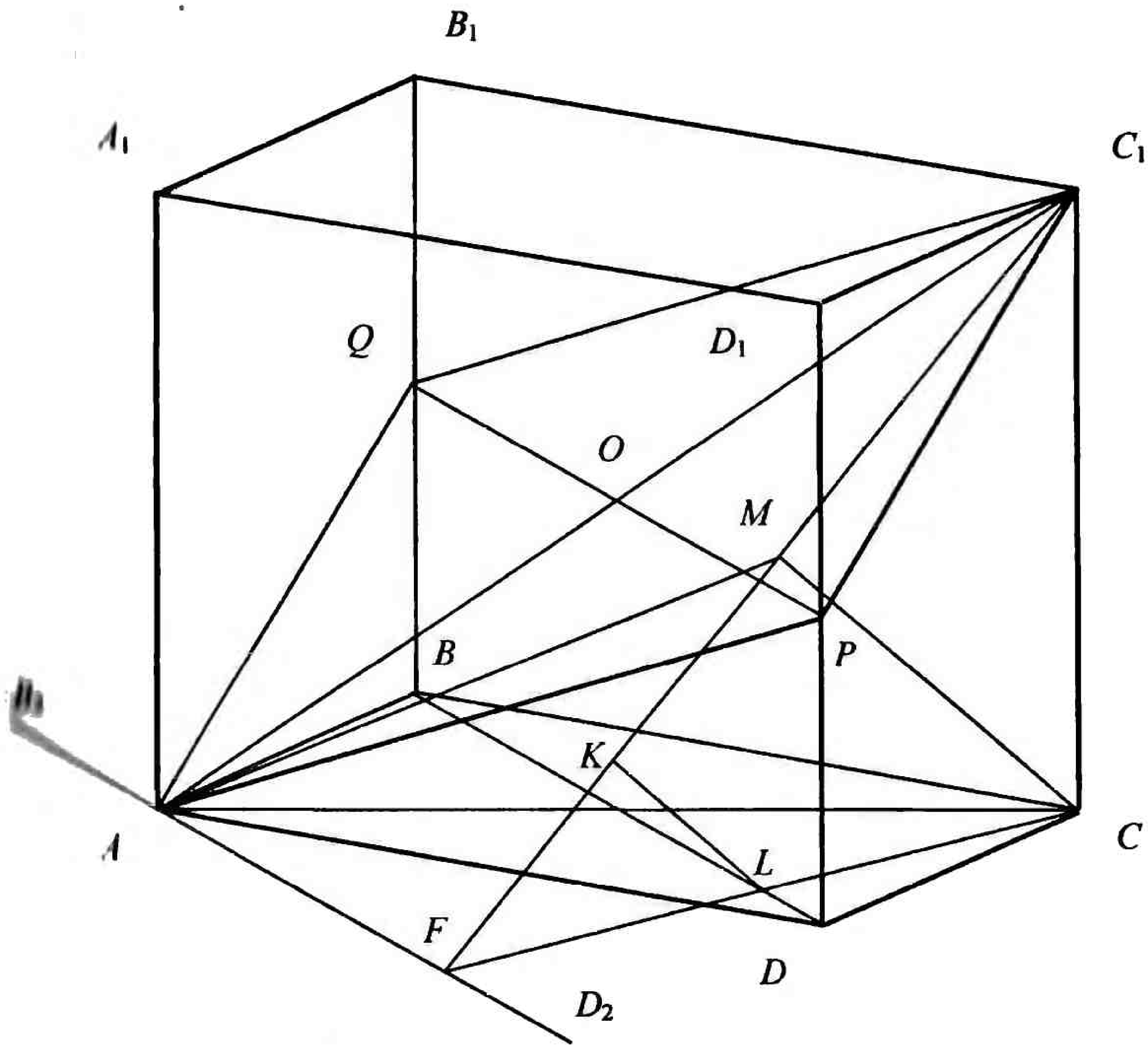


Ответ: при $a\in(-1;0]\cup[1;2]$ $x=a+\sqrt{a+2},\ y=2$;

при $a\in(0;1)$ $x_1=a+\sqrt{a+2},\ y_1=2;\quad x_2=a-\sqrt{a};\ y_2=0$,

при $a\in(2;+\infty)$ $x_{1,2}=a\pm\sqrt{a+2},\ y_{1,2}=2$.

10.



Проведем $(B_2D_2)\parallel BD$, $A\in(B_2D_2)$; $CF\perp(B_2D_2)$, $LK\perp C_1F$, где $L=CF\cap BD$, и $CM\perp C_1F$. Тогда $FC_1\perp B_2D_2$ и $LK=l$, $CM=2l$. Обозначим $\alpha=\angle C_1AC$ и $\gamma=\angle CAM$; γ – угол, который диагональ основания AC образует с секущей плоскостью, и α – угол между AC и диагональю AC_1. Тогда $AC=BD=PQ=\dfrac{MC}{\sin\gamma}=\dfrac{2l}{\sin\gamma}$;

$AC_1=\dfrac{AC}{\cos\alpha}=\dfrac{2l}{\cos\alpha\cdot\sin\gamma}$; $CC_1=AC\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2l\operatorname{tg}\alpha}{\sin\gamma}$. $MC_1=\sqrt{CC_1^2-MC^2}=\dfrac{2l}{\sin\gamma}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\gamma}$.

$\dfrac{MC_1}{CC_1}=\dfrac{CC_1}{FC_1}$, отсюда $FC_1=\dfrac{CC_1^2}{MC_1}$, т.е. $FC_1=\dfrac{2l\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin\gamma\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\gamma}}$.

$$S_{PAQC_1}=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot FC_1=\frac{2l^2\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin^2\gamma\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\gamma}}.$$

При $\gamma=30^\circ$, $\alpha=45^\circ$ $S_{PAQC_1}=\dfrac{16}{\sqrt{3}}l^2$.

Ответ: $S=16l^2/\sqrt{3}$.

2.7. Вариант № 2

1. Один велосипедист проходит за час на 6 *км* больше, чем другой, так как один километр он проходит на 20 секунд быстрее. Найдите скорости велосипедистов.(8 баллов)

2. Решите уравнение $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{2}\sin x=0$. (8 баллов)

3. Решите уравнение $(\log_2(7-6x))\cdot\log_x(1/2)=1$. (8 баллов)

4. Решите неравенство $\dfrac{x^2-9}{x^3-27}>\dfrac{1}{x+2}$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\left(\log_2\dfrac{5x+4}{4x}\right)\sqrt{x^4-5x^2+4}<0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\log_{0,5}(3+\cos x)$. (10 баллов)

7. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK. Медиана CM треугольника ACK равна $\sqrt{13}$, а медиана CN треугольника BCK равна $\sqrt{21}$. Найдите площадь треугольника ABC. (12 баллов)

8. Траектории, по которым двигаются снаряды зенитного орудия, задаются уравнением $y=px-0,5\left(1+p^2\right)x^2, x\geq 0, y\geq 0$, где параметр p $(0<p<+\infty)$ определяется наклоном траектории в начальной точке. Может ли снаряд попасть в точку $M(3/4;1/4)$? Укажите на плоскости xy все точки, через которые проходят траектории. (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых уравнение $64a(x-10)+384=\left(x+|x|\right)^2$ имеет хотя бы одно решение, и решите его при каждом a. (12 баллов)

10. Правильная треугольная призма с высотой h и стороной основания $\sqrt{6}\,h$ вписана в конус так, что одно из оснований лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого основания – на боковой поверхности. В свою очередь, конус должен быть вписан в сферу возможно меньшего радиуса. При какой высоте конуса радиус описанной около него сферы будет наименьшим? Найдите это значение радиуса. (12 баллов)

2.8. Решения варианта №2

1. $\dfrac{1}{V}=\dfrac{1}{V-6}-\dfrac{1}{180}$; $180V-1080=180V-V^2+6V$; $V^2-6V-1080=0$;

$V = 3 \pm \sqrt{1089} = 3 \pm 33$; $V = 36$.

Ответ: 36 и 30 км/ч.

2. $\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{2}\sin x = 0$, $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; $\sin x = (1 \pm 3)/4$. 1) $\sin x = 1 > 0$, посторонний корень. 2) $\sin x = -1/2$, $x = (-1)^{n+1}\pi/6 + n\pi$, $n \in Z$.

Ответ: $\sin x = (-1)^{n+1}\pi/6 + n\pi$, $n \in Z$.

3. $(\log_2(7-6x)) \cdot \log_x(1/2) = 1$; $\log_2(7-6x) \cdot \dfrac{\log_2(1/2)}{\log_2 x} = 1$; $\log_2(7-6x) + \log_2 x = 0$;

$6x^2 - 7x + 1 = 0$, $x = (7 \pm 5)/12$, $x_1 = 1$ – посторонний корень, $x_2 = 1/6$.

Ответ: $x = 1/6$.

4. $\dfrac{x^2-9}{x^3-27} > \dfrac{1}{x+2}$. $\dfrac{x+3}{x^2+3x+9} > \dfrac{1}{x+2}$, $x \neq 3$; $\dfrac{x^2+5x+6-x^2-3x-9}{(x^2+3x+9)(x+2)} > 0$;

$\dfrac{2(x-1{,}5)}{x+2} > 0$.

Ответ: $x \in (-\infty;-2) \cup (1{,}5;3) \cup (3;+\infty)$.

5. $\left(\log_2 \dfrac{5x+4}{4x}\right)\sqrt{x^4-5x^2+4} < 0 \iff \begin{cases} 0 < \dfrac{5x+4}{4x} < 1 \\ (x^2-1)(x^2-4) > 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x \in (-\infty;-\frac{4}{5}) \cup (0;+\infty) \\ \dfrac{x+4}{4x} < 0 \\ (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) > 0 \end{cases} \iff x \in (-4;-2) \cup (-1;-\frac{4}{5}).$$

Ответ: $x \in (-4;-2) \cup (-1;-\frac{4}{5})$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_{0,5}(3+\cos x)$.

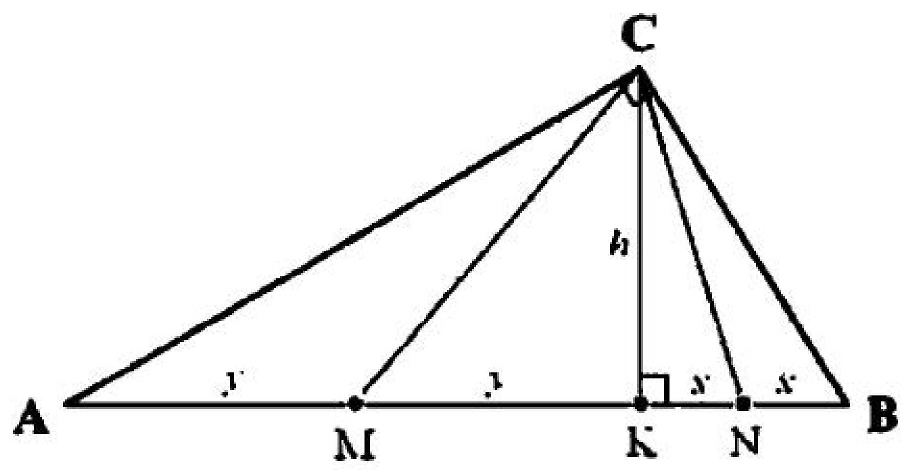
Решение. $2 \le 3 + \cos x \le 4 \iff \log_{0,5} 4 \le \log_{0,5}(3+\cos x) \le \log_{0,5} 2 \iff f(x) \in [-2;-1]$.

Ответ: $E = [-2;-1]$.

7. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK. Медиана CM треугольника ACK равна $\sqrt{13}$, а медиана CN треугольника BCK равна $\sqrt{21}$. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение.

$\Delta BCK \approx \Delta ACK \quad \dfrac{BK}{CK} = \dfrac{CK}{AK} \quad CK^2 = AK \cdot BK$



$CK = h,\ AK = 2y,\ BK = 2x,\quad h^2 = 4xy$

Применяем теорему Пифагора для треугольников ΔCKM и ΔCKN.

$$\begin{cases} x^2 + 4xy = 21 \\ y^2 + 4xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ y^2 + 4xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 13x^2 - 32xy - 21y^2 = 0 \end{cases} \quad 13x^2 - 32xy - 21y^2$$

$$13\frac{x^2}{y^2} - 32\frac{x}{y} - 21 = 0,\quad \frac{x}{y} = 3,\quad x = 3y,\quad x = 3,\quad y = 1,\quad h = \sqrt{12},\quad S_{ABC} = (x+y)h = 8\sqrt{}$$

Ответ: $8\sqrt{3}$.

8. Перепишем уравнение относительно неизвестной p: $x^2p^2 - 2xp + x^2 + 2y = 0$; $D/4 = x^2 - x^4 - 2x^2y \ge 0$; область достижимости $x \ge 0$, $0 \le y \le \left(1 - x^2\right)/2$. В точке M $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{9}{16}\right) = \dfrac{7}{32} < \dfrac{1}{4}$. Точка M лежит над границей области достижимости, снаряд не может попасть в нее ни при каком значении p.

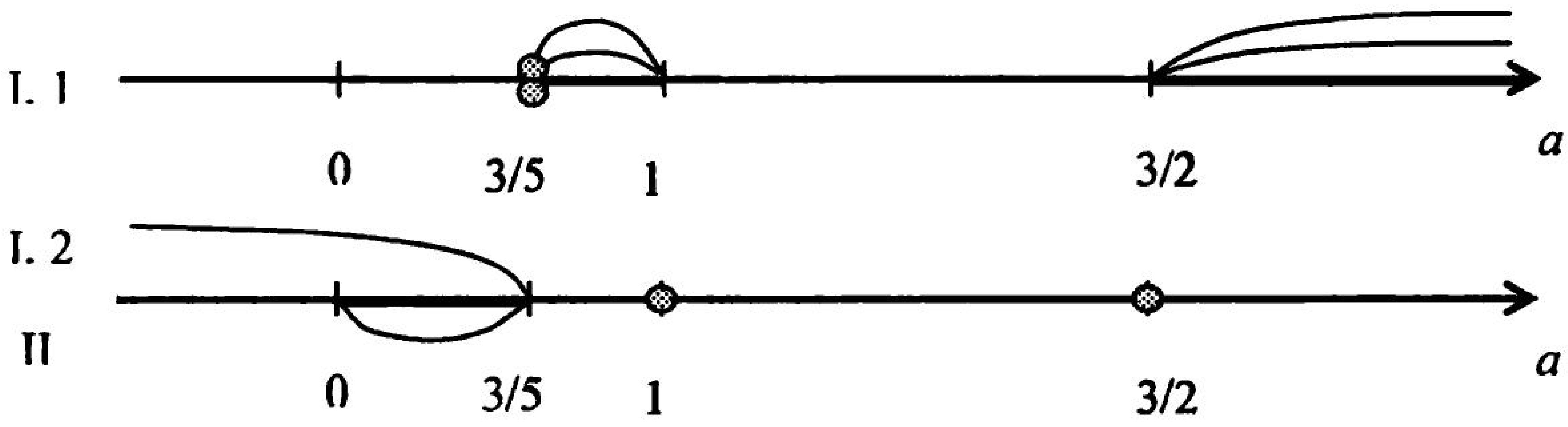
9. I. При $x \ge 0 \quad x^2 - 16ax + 160a - 96 = 0$ (*).

1. Уравнение (*) имеет два различных неотрицательных корня $x_{1,2} = 8a \pm 4\sqrt{4a^2 - 10a + 6}$, если:

$$\begin{cases} D/4 = 16(4a^2 - 10a + 6) > 0, \\ a > 0, \\ 160a - 96 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > 3/2, \end{array}\right. \\ a > 0, \\ a \ge 3/5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3/5 \le a < 1, \\ a > 3/2. \end{array}\right.$$

2. Уравнение (*) имеет один неотрицательный корень $x = 8a + 4\sqrt{4a^2 - 10a + 6}$,

если: $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 0, \\ a \ge 0, \end{cases} \\ 160a - 96 < 0, \\ \begin{cases} a = 3/5, \\ a < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = 3/2, \\ a < 3/5. \end{array}\right.$$



II. При $x<0$ $\quad x=\dfrac{10a-6}{a}<0 \Rightarrow 0<a<3/5$. Сравнивая с I, 2, замечаем, что при $0<a<3/5$, также будет два различных корня уравнения.

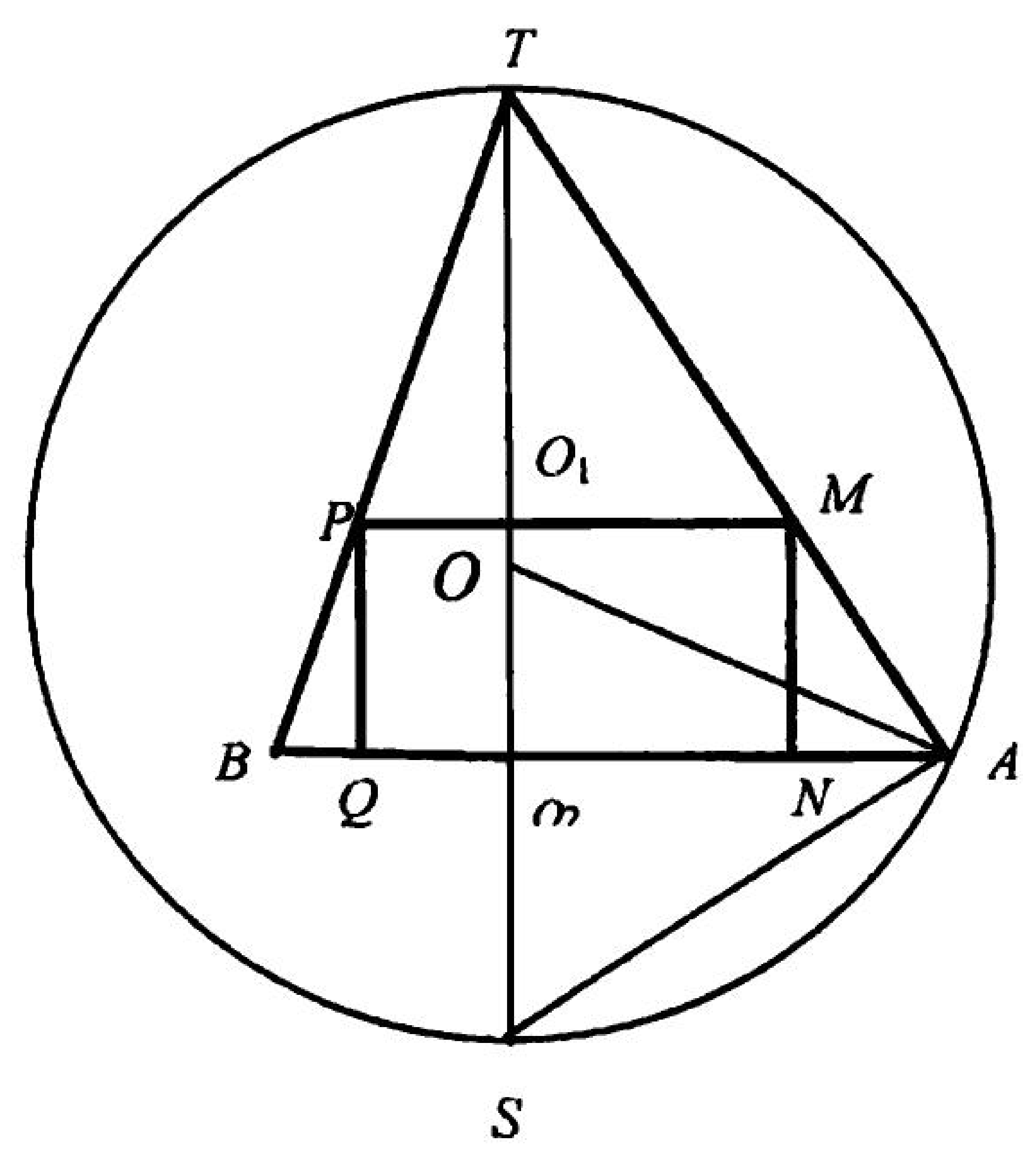
Ответ: при $a\in[3/5;1)\cup(3/2;+\infty)$ $\quad x_{1,2}=8a\pm4\sqrt{4a^2-10a+6}$;

при $0<a<3/5$ $\quad x_1=\dfrac{10a-6}{a}, x_2=8a+4\sqrt{4a^2-10a+6}$;

при $a\in(-\infty;0]\cup\{1\}\cup\{3/2\}$ $\quad x=8a+4\sqrt{4a^2-10a+6}$.

10. $MN=h$ – боковое ребро призмы, $O_1M=\dfrac{\sqrt{6}\,h}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}\,h$ – радиус окружности, описанной около основания призмы, TA – образующая конуса.

Обозначим: $H=TO_2$ – высота конуса, $O_2A=r$ – радиус основания конуса, $OA=OT=R$ – радиус сферы.



$$\Delta TO_1M\sim\Delta TO_2A\Rightarrow \quad \frac{TO_1}{TO_2}=\frac{O_1M}{O_2A},$$

$$\frac{H-h}{H}=\frac{\sqrt{2}\,h}{r}, \text{ отсюда } r=\frac{\sqrt{2}\,Hh}{H-h}.$$

В ΔTAS $\quad O_2A^2=TO_2\cdot O_2S$, или $r^2=H(2R-H)$, отсюда $2R=H+\dfrac{2Hh^2}{(H-h)^2}$.

$$(2R)'=1+2h^2\frac{(H-h)^2-2(H-h)H}{(H-h)^4}=1-2h^2\frac{H+h}{(H-h)^3}=0.$$

$$(H-h)^3=2h^2(H+h);\quad H^3-3hH^2+h^2H-3h^3=0;\quad H^2(H-3h)+h^2(H-3h)=0;$$

$$(H^2+h^2)(H-3h)=0;\qquad H=3h.\qquad R_{\min}=\frac{1}{2}\left(3h+\frac{2h^2\cdot 3h}{4h^2}\right)=\frac{9}{4}h.$$

Ответ: $R_{\min}=\dfrac{9}{4}h$.

2.9. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКА ВАРИАНТ № 3

1. Два спортсмена бегают по одной замкнутой круговой трассе. Скорость каждого постоянна, а на пробег круга один тратит на 9 секунд меньше другого. Если они бегут в одном направлении, то один обгоняет другого ровно на круг за 3 минуты. Через какое время они будут встречаться, если побегут в противоположных направлениях? (8 баллов)

2. Количество членов геометрической прогрессии является четным числом. Сумма всех членов прогрессии в 5 раз больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии. (8 баллов)

3. Решите уравнение $\log_{0,5}^2 4x+\log_2\dfrac{x^2}{8}=7^{(\log_{49}4^{x+3}-\log_7 2^x)}$. (8 баллов)

4. Решите уравнение $ctg\,6x\sqrt{2\sin 2x+1}=ctg\,10x\sqrt{2\sin 2x+1}$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $x-\sqrt[4]{y}-\sqrt{x^2+\sqrt{y}-9}\geq 3$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\log_{0,2}(4-\log_6 x)+\log_{0,2}(6+\log_6 x)$. (10 баллов)

7. Около окружности радиуса 5 описана равнобокая трапеция $ABCD$ с углом A, равным $\arccos 0{,}6$. Точки K и N - точки касания окружности с боковыми сторонами AB и CD, соответственно. Найдите площади четырехугольников $AKND$ и $KBCN$. (12 баллов)

8. На кривой $y=(x+2)^2$ найдите точку, расстояние от которой до общей касательной к графикам функций $y=x^2$ и $y=x^2+2x-1$ будет наименьшим. Найдите это расстояние. (12 баллов)

9. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} y+|y|=4\sqrt{x} \\ a(y-3)=x-2 \end{cases}$ имеет два различных решения. Укажите эти решения при каждом из найденных значений a. (12 баллов)

10. Шар радиуса 1 с центром в точке O вписан в правильную треугольную пирамиду. Через точку O проходит плоскость, параллельная стороне основания пирамиды и апофеме, проведенной к другой стороне основания. Найдите площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от центра описанной около основания пирамиды окружности до этой плоскости равно $1/\sqrt{13}$ (12 баллов).

2.10. Решения варианта №3

1. Два спортсмена бегают по одной замкнутой круговой трассе. Скорость каждого постоянна, а на пробег круга один тратит на 9 секунд меньше другого. Если они бегут в одном направлении, то один обгоняет другого ровно на круг за 3 минуты. Через какое время они будут встречаться, если побегут в противоположных направлениях? (8 баллов).

Решение. За единицу измерения расстояния примем длину трассы. Пусть x (тр/сек) – скорость первого спортсмена, а y (тр/сек) – скорость второго. В таблице отметим пробег спортсменами всей трассы, движение с общей линии старта в одном направлении, а также в противоположных направлениях. Если они начинают бег с общего старта одновременно и в одном направлении, то через 3 минуты или 180 секунд более быстрый спортсмен пробежит расстояние на одну трассу большее, чем второй спортсмен. Если они побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях, то к моменту встречи пробегут расстояние в сумме равное длине одной трассы. В итоге, имеем таблицу:

v(тр/сек)	t (сек)	S (тр)
x	t	1
y	$t+9$	1
x	180	$S+1$
y	180	S
x	t_1	S_1
y	t_1	$1-S_1$

Необходимо найти t_1. Согласно таблице, получаем систему из шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases} xt = 1, \\ y(t+9) = 1, \\ 180x = S+1, \\ 180y = S, \\ xt_1 = S_1, \\ yt_1 = 1 - S_1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\left(\dfrac{1}{x}+9\right) = 1, \\ 180x = 180y + 1, \\ t_1(x+y) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{180x-1}{180}\left(\dfrac{1}{x}+9\right) = 1, \\ y = \dfrac{180x-1}{180}, \\ t_1(x+y) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (180x-1)(1+9x) = 180x, \\ y = \dfrac{180x-1}{180}, \\ t_1(x+y) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1620x^2 - 9x - 1 = 0, \\ y = \dfrac{180x-1}{180}, \\ t_1(x+y) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{36}, \\ y = \dfrac{1}{45}, \\ t_1 = \dfrac{1}{x+y}, \end{cases} \Rightarrow t_1 = 20.$$

Ответ: 20 секунд.

2. Количество членов геометрической прогрессии является четным числом. Сумма всех членов прогрессии в 5 раз больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии. (8 баллов)

Решение.

Пусть количество членов геометрической прогрессии равно $2n$. Тогда сумма всех членов прогрессии определяется по формуле $S_{2n} = \dfrac{b_1(q^{2n}-1)}{q-1}$, а сумма членов, стоящих на нечетных местах $S_{нечет} = \dfrac{b_1(q^{2n}-1)}{q^2-1}$. Так как $S_{2n} = 5S_{нечет}$, то $q+1=5$. Следовательно, $q = 4$.

Ответ: 4.

3. Решите уравнение $\log_{0,5}^2 4x + \log_2 \dfrac{x^2}{8} = 7^{(\log_{49} 4^{x+3} - \log_7 2^x)}$. (8 баллов)

Решение.

Преобразуем правую часть данного уравнения:

$7^{(\log_{49} 4^{x+3} - \log_7 2^x)} = 7^{(0,5\log_7 4^{x+3} - \log_7 2^x)} = 7^{\log_7 2^{x+3-x}} = 7^{\log_7 8} = 8$. Тогда исходное уравнение равносильно следующему $\log_{0,5}^2 4x + \log_2 \dfrac{x^2}{8} = 8$. Используя свойства логарифмов, имеем

$(\log_{0.5} 4+\log_{0.5} x)^2+\log_2 x^2-\log_2 8=8 \Leftrightarrow (2+\log_2 x)^2+2\log_2 x-11=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x+6\log_2 x-7=0 \Leftrightarrow \log_2 x=-7$ или $\log_2 x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{128}$ или $x=2.$

Ответ: $\dfrac{1}{128}$, 2.

4. Решите уравнение $ctg6x\sqrt{2\sin 2x+1}=ctg10x\sqrt{2\sin 2x+1}$. (8 баллов)

Решение.

Данное уравнение равносильно следующему $(ctg6x-ctg10x)\sqrt{2\sin 2x+1}=0 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{\cos 6x}{\sin 6x}-\frac{\cos 10x}{\sin 10x}\right)\sqrt{2\sin 2x+1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 6x\sin 10x-\cos 10x\sin 6x}{\sin 6x\sin 10x}\sqrt{2\sin 2x+1}=0 \Leftrightarrow \frac{\sin 4x}{\sin 6x\sin 10x}\sqrt{2\sin 2x+1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 4x=0, \\ \sin 2x=-0{,}5, \end{array}\right. \\ \sin 6x\neq 0, \\ \sin 10x\neq 0, \\ \sin 2x\geq -0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{\pi n}{4}, n\in Z, \\ \sin\dfrac{3\pi n}{2}\neq 0, \\ \sin\dfrac{5\pi n}{2}\neq 0, \\ \sin\dfrac{\pi n}{2}\geq -0{,}5; \end{cases} \\ x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n=2m+1, m\in Z, \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi m}{2}, \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi m\right)\geq -0{,}5; \end{cases} \\ x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\pi l, l\in Z, (m=2l) \\ x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\pi l, l\in Z,\quad (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z.$

5. Решите неравенство $x-\sqrt[4]{y}-\sqrt{x^2+\sqrt{y}-9}\geq 3$. (10 баллов)

Решение.

Имеем равносильное неравенство $x-\sqrt[4]{y}\geq\sqrt{x^2+\sqrt{y}-9}+3$.

Так как правая часть неравенства неотрицательная, то левая часть удовлетворяет неравенству $x-\sqrt[4]{y}\geq 0$. Тогда $x\geq\sqrt[4]{y}\geq 0$, и $(x-\sqrt[4]{y})^2\geq(\sqrt{x^2+\sqrt{y}-9}+3)^2$, или $x^2-2x\sqrt[4]{y}+\sqrt{y}\geq x^2+\sqrt{y}-9+6\sqrt{x^2+\sqrt{y}-9}+9 \Leftrightarrow -x\sqrt[4]{y}\geq 3\sqrt{x^2+\sqrt{y}-9}$. Так как левая часть последнего неравенства неположительная, а правая неотрицательная, то это неравенство выполняется только при условии $\begin{cases} x\sqrt[4]{y} = 0, \\ x^2 + \sqrt{y} - 9 = 0. \end{cases}$ Первое уравнение системы распадается на два уравнения: $x = 0$ или $y = 0$. Если $x = 0$, то из условия $x \ge \sqrt[4]{y} \ge 0$ следует $y = 0$, но точка $(0;0)$ не удовлетворяет второму уравнению системы. Если $y = 0$. То из второго уравнения системы имеем $x^2 = 9$, с учетом условия $x \ge \sqrt[4]{y} \ge 0$ приходим к выводу, что $x = 3$. Итак, решением исходного неравенства является единственная точка $(3;0)$.

Ответ: $(3;0)$.

6. Найдите множество значений функции

$f(x) = \log_{0,2}(4 - \log_6 x) + \log_{0,2}(6 + \log_6 x)$. (10 баллов)

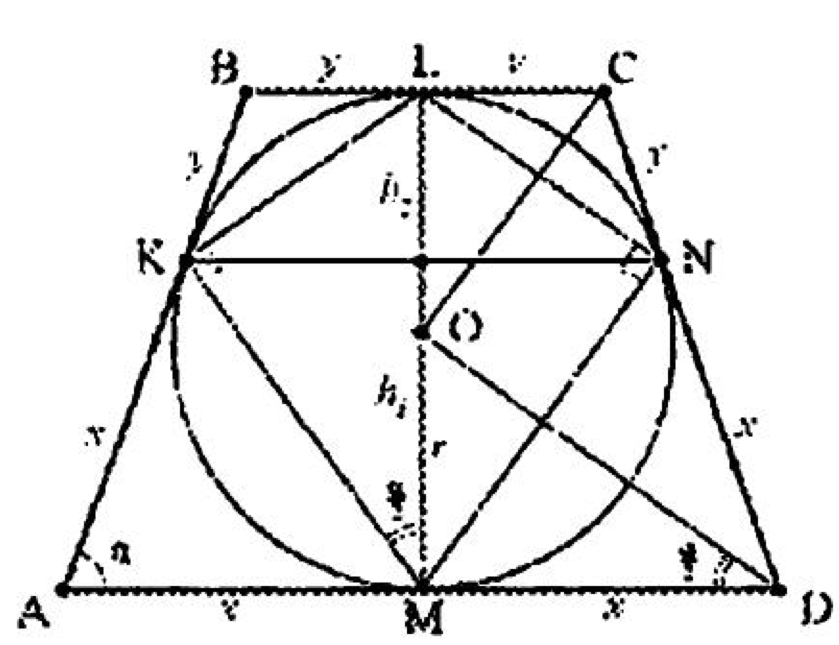
Решение.

Пусть $y = f(x)$. Сделаем замену $t = \log_6 x$. Тогда получим

$y = \log_{0,2}(4 - t) + \log_{0,2}(t + 6), \quad t \in (-6;\, 4)$. Используя свойства логарифмов и выделяя полный квадрат, приходим к функции $y = \log_{0,2}((4-t)(t+6)) = \log_{0,2}(25 - (t+1)^2)$, определенной при $t \in (-6;\, 4)$. Пусть $z = 25 - (t+1)^2$. Тогда при $t \in (-6;\, 4)$ имеем $z \in (0;\, 25]$. Так как логарифмическая функция с основанием $0,2 < 1$ убывает, и $y = \log_{0,2} z, \quad z \in (0;\, 25]$, то $y \in [\log_{0,2} 25;\, +\infty) = [-2;\, +\infty)$.

Ответ: $E(y) = [-2;\, +\infty)$.

7. Около окружности радиуса 5 описана равнобокая трапеция $ABCD$ с углом A, равным $\arccos 0,6$. Точки K и N - точки касания окружности с боковыми сторонами AB и CD, соответственно. Найдите площади четырехугольников $AKND$ и $KBCN$. (12 баллов)



Решение. По условию имеем $\angle A = \alpha = \arccos 0,6, \quad r = 5$, $ABCD$ - равнобокая трапеция, где r - радиус вписанной в трапецию окружности. Точки K и N - точки касания окружности с боковыми сторонами AB и CD, соответственно. Пусть точки M и L - точки касания окружности с основаниями AD и BC, соответственно. Тогда имеем $KN \parallel AD \parallel BC$, $AKND$ и $KBCN$ - трапеции. Пусть h_1 - высота $AKND$, h_2 - высота $KBCN$. Из свойств касательных к окружности имеем $AK = AM = x, \quad BK = BL = y$.

Тогда $\angle KML = \frac{\alpha}{2}$, $LM = H = 2r$, ΔKLM - прямоугольный, $\angle K = 90^\circ$,

$KM = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$, $KL = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$, $x = \frac{r}{tg\frac{\alpha}{2}}$, $y = r\,tg\frac{\alpha}{2}$, $h_2 = y\sin\alpha$, $h_1 = x\sin\alpha$.

Основания трапеций $AKND$ и $KBCN$ определяем по формулам $KN = 2(y + y\cos\alpha)$ или $KN = 2(x - x\cos\alpha)$, $AD = 2x$, $BC = 2y$.

$$S_{AKND} = \frac{AD + KN}{2}h_1 = (2x - x\cos\alpha)x\sin\alpha = \frac{r^2(2-\cos\alpha)\sin\alpha}{tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{r^2(2-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)}$$

$$S_{KBCN} = \frac{BC + KN}{2}h_2 = (2y + y\cos\alpha)y\sin\alpha = r^2(2+\cos\alpha)\sin\alpha\, tg^2\frac{\alpha}{2} =$$
$$= \frac{r^2(2+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)}.$$

$$S_{AKND} = \frac{r^2(2-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)} = \frac{25(2-0{,}6)(1+0{,}6)0{,}8}{1-0{,}6} = 112.$$

$$S_{KBCN} = \frac{r^2(2+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)} = \frac{25(2+0{,}6)(1-0{,}6)0{,}8}{1+0{,}6} = 13.$$

Ответ: 112, 13.

8. На кривой $y = (x+2)^2$ найдите точку, расстояние от которой до общей касательной к графикам функций $y = x^2$ и $y = x^2 + 2x - 1$ будет наименьшим. Найдите это расстояние. (12 баллов)

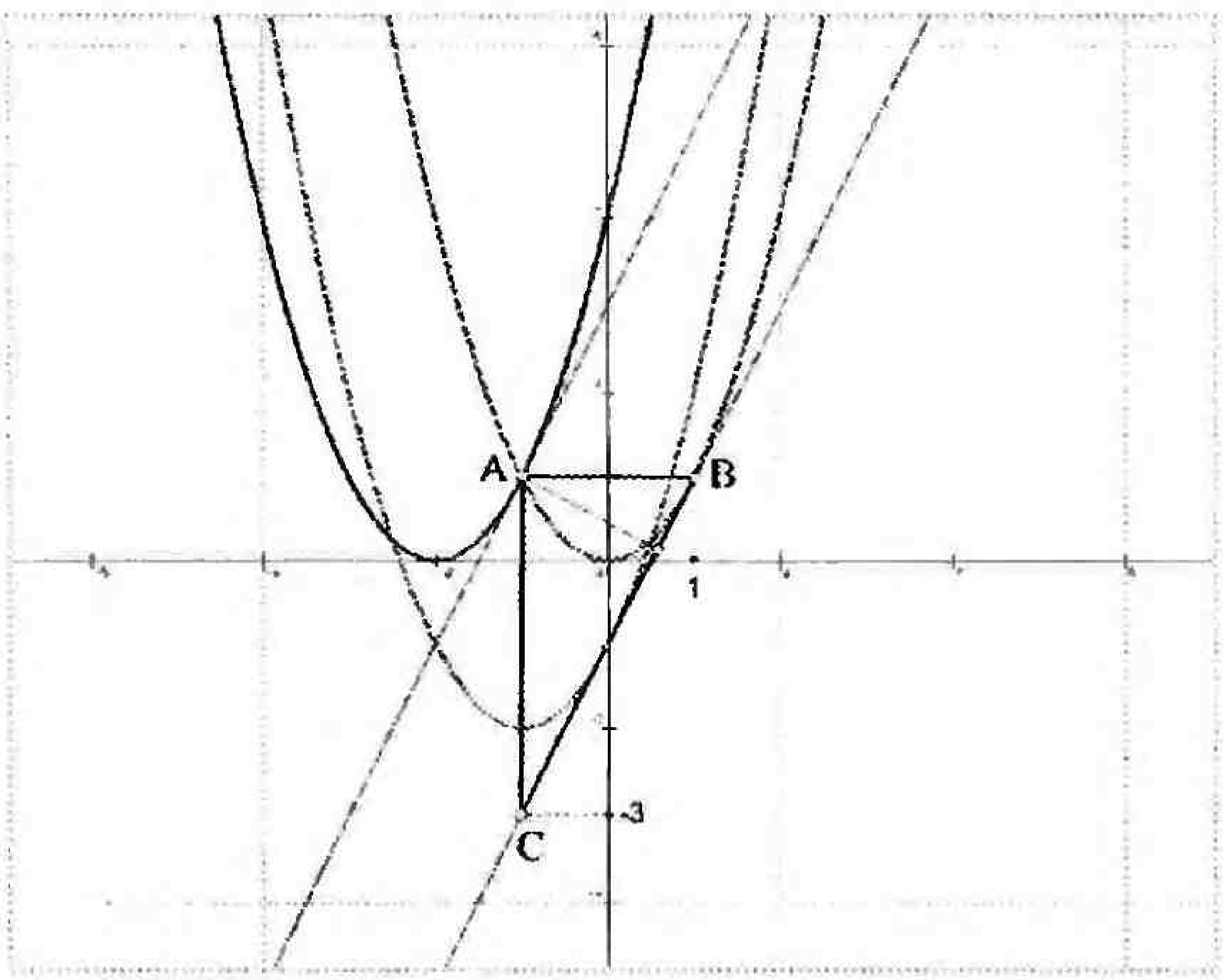
Решение.

Найдем уравнения общей касательной к графикам функций $y = x^2$ и $y = x^2 + 2x - 1$. Уравнение касательной к графику функции $y = x^2$, абсцисса точки касания которой равна x_1 имеет вид $y = 2x_1(x - x_1) + x_1^2$. Уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 1$, абсцисса точки касания которой равна x_2 имеет вид $y = (2x_2 + 2)(x - x_2) + x_2^2 + 2x_2 - 1$. Так как две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, имеем следующую систему уравнений с неизвестными x_1 и x_2 для уравнений совпадающих касательных:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 1, \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 1, \\ (x_2+1)^2 - x_2^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение общей касательной $y = 2x - 1$.

Точка на кривой $y = (x+2)^2$, расстояние от которой до прямой $y = 2x - 1$ будет наименьшим, совпадает с той точкой, в которой касательная к графику функции $y = (x+2)^2$ будет параллельна этой прямой. Условие параллельности двух прямых совпадает с равенством их угловых коэффициентов. Угловой коэффициент касательной совпадает со значением производной в точке, равной абсциссе точки касания. Таким образом, приходим к уравнению $2(x_0 + 2) = 2$ $\Leftrightarrow x_0 = -1$. Итак, абсцисса искомой точки равна $x_0 = -1$, ордината $y_0 = 1$.



Обозначим эту точку $A = (-1;1)$. Пусть точка B - точка пересечения прямой, проходящей через точку A параллельно оси абсцисс, с прямой $y = 2x - 1$. Тогда $B = (1;1)$. Пусть точка C - точка пересечения прямой, проходящей через точку A параллельно оси ординат, с прямой $y = 2x - 1$. Тогда $C = (-1;-3)$. Расстояние от точки A до прямой $y = 2x - 1$ совпадает с длиной высоты прямоугольного треугольника ABC, опущенной из вершины A. Таким образом, искомое расстояние d можно найти из формулы $d = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$. Так как $AB = 2$, $AC = 4$, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{5}$, то $d = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $(-1;1)$, $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

9. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} y + |y| = 4\sqrt{x} \\ a(y-3) = x - 2 \end{cases}$ имеет два различных решения. Укажите эти решения при каждом из найденных значений a. (12 баллов)

Решение.

Рассмотрим два случая раскрытия модуля в первом уравнении системы.

I. Если $y \ge 0$, то $y = 2\sqrt{x}$, $a(2\sqrt{x}-3) = x-2$. Сделаем замену переменного $\sqrt{x} = t \ge 0$.

Получим следующее квадратное уравнение $t^2 - 2at + 3a - 2 = 0$, для которого

$\frac{D}{4} = (a-1)(a-2)$; $t_1 + t_2 = 2a$; $t_1 t_2 = 3a - 2$. Таким образом,

$$\text{два различных решения}: \begin{cases} (a-1)(a-2) > 0 \\ a > 0 \\ 3a-2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{2}{3}; 1\right) \cup (2; +\infty).$$

$$\text{При } a \in \left[\frac{2}{3}; 1\right) \cup (2; +\infty) \text{ имеем решения: } \begin{cases} x_{1/2} = \left(a \pm \sqrt{a^2 - 3a + 2}\right)^2 \\ y_{1/2} = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - 3a + 2} \end{cases}.$$

$$\text{Одно решение}: \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-1)(a-2) = 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ 3a - 2 < 0 \\ \begin{cases} 3a - 2 = 0 \\ a < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \{1; 2\}.$$

$$\text{При } a \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \{1; 2\} \text{ имеем решение: } \begin{cases} x = \left(a + \sqrt{a^2 - 3a + 2}\right)^2 \\ y = 2a + 2\sqrt{a^2 - 3a + 2} \end{cases}.$$

II. Если $y < 0$, то $x = 0$, $a(y-3) = -2$, $y = 3 - \frac{2}{a} < 0$, $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - \frac{2}{a} \end{cases}$.

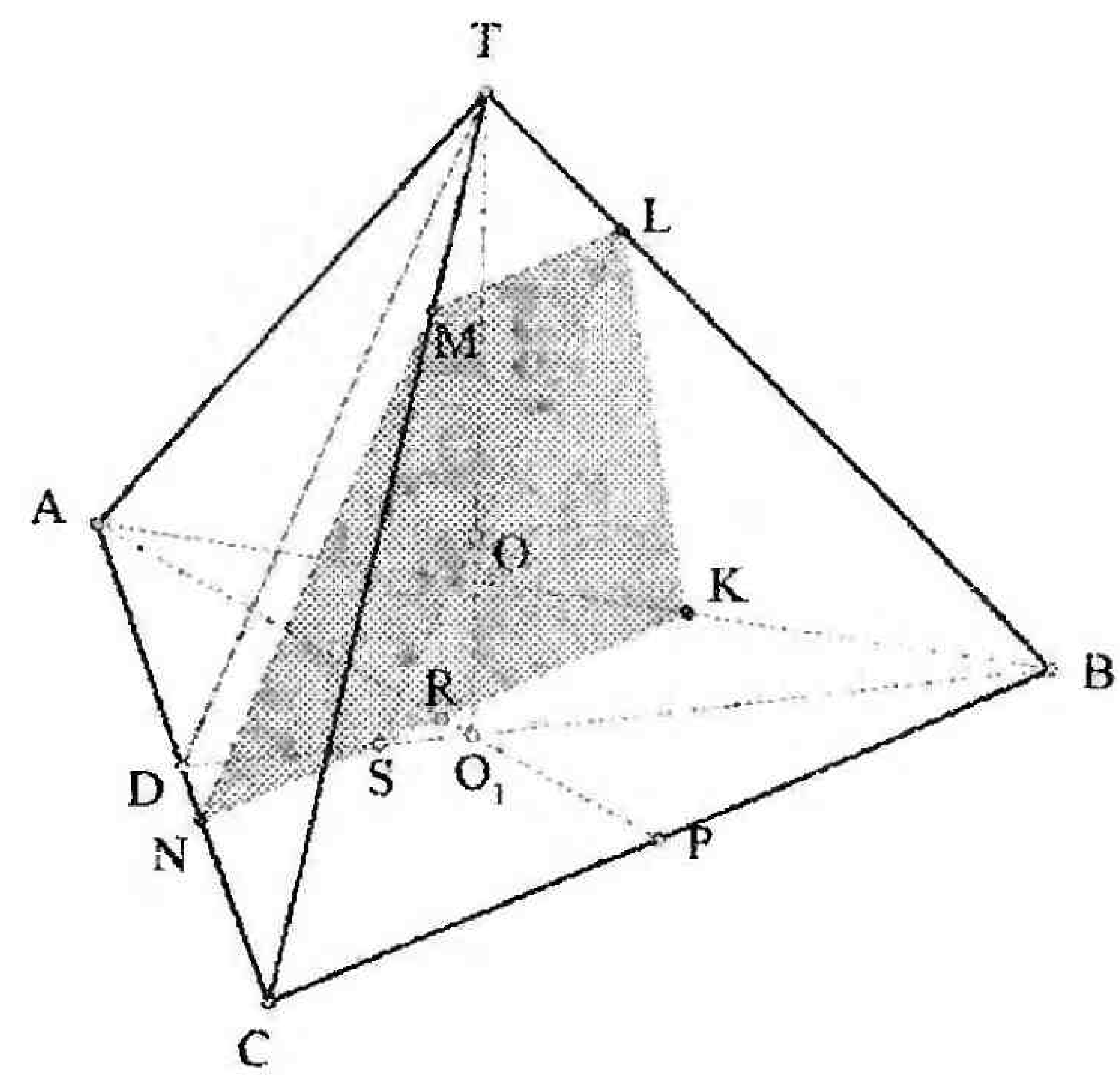
$$\text{Ответ: при } a \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \text{ имеем 2 решения: } \begin{cases} x_1 = \left(a + \sqrt{a^2 - 3a + 2}\right)^2 \\ y_1 = 2a + 2\sqrt{a^2 - 3a + 2} \end{cases}; \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 3 - \frac{2}{a} \end{cases};$$

$$\text{при } a \in \left[\frac{2}{3}; 1\right) \cup (2; +\infty) \text{ имеем 2 решение: } \begin{cases} x_{1/2} = \left(a \pm \sqrt{a^2 - 3a + 2}\right)^2 \\ y_{1/2} = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - 3a + 2} \end{cases}.$$

10. Шар радиуса 1 с центром в точке O вписан в правильную треугольную пирамиду. Через точку O проходит плоскость, параллельная стороне основания пирамиды и апофеме, проведенной к другой стороне основания. Найдите площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от центра описанной около основания пирамиды окружности до этой плоскости равно $1/\sqrt{13}$ (12 баллов)

Решение.

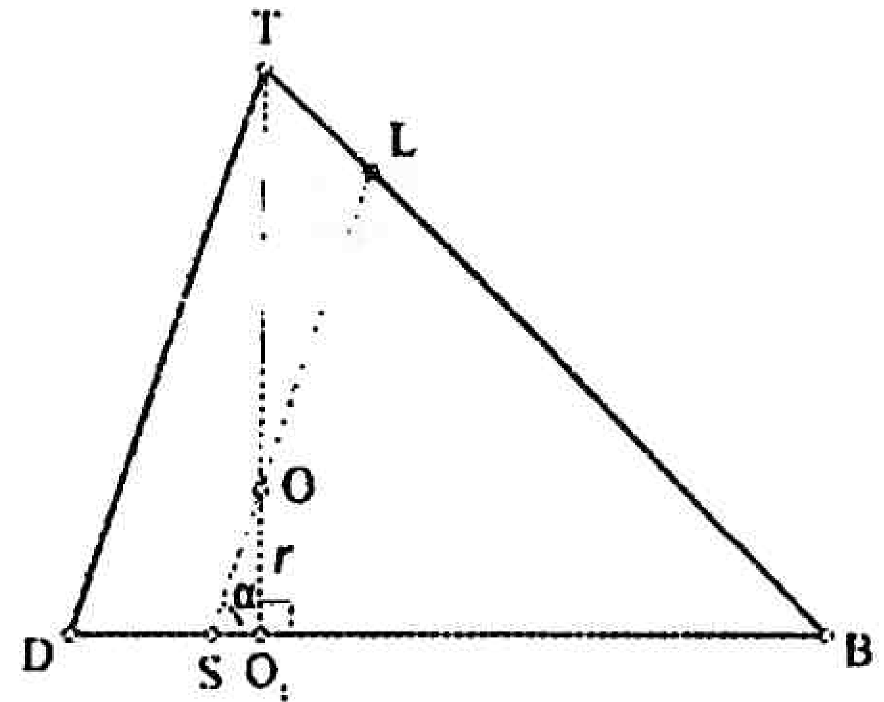
Обозначим расстояние от центра описанной около основания пирамиды окружности до плоскости, содержащей сечение, $d = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$, радиус вписанного шара $r = 1$. Опишем построение сечения. Центр O вписанного шара лежит на высоте TO_1 правильной треугольной пирамиды $TABC$. Пусть TD апофема пирамиды, поведенная к стороне AC. В плоскости TBD через точку O проведем прямую SL, параллельную TD, $S = DB \cap SL$, $L = TB \cap SL$. Через точку S в плоскости основания проведем прямую NK, параллельную стороне основания CB, $N = AC \cap NK$, $K = AB \cap NK$. Соединяем точки K и L. Через точку L в плоскости TBC проводим прямую ML, параллельную стороне основания CB, $M = TC \cap ML$. Соединяем точки N и M. Трапеция $KLMN$ искомое сечение пирамиды. Найдем его площадь. Пусть a - длина стороны основания пирамиды.

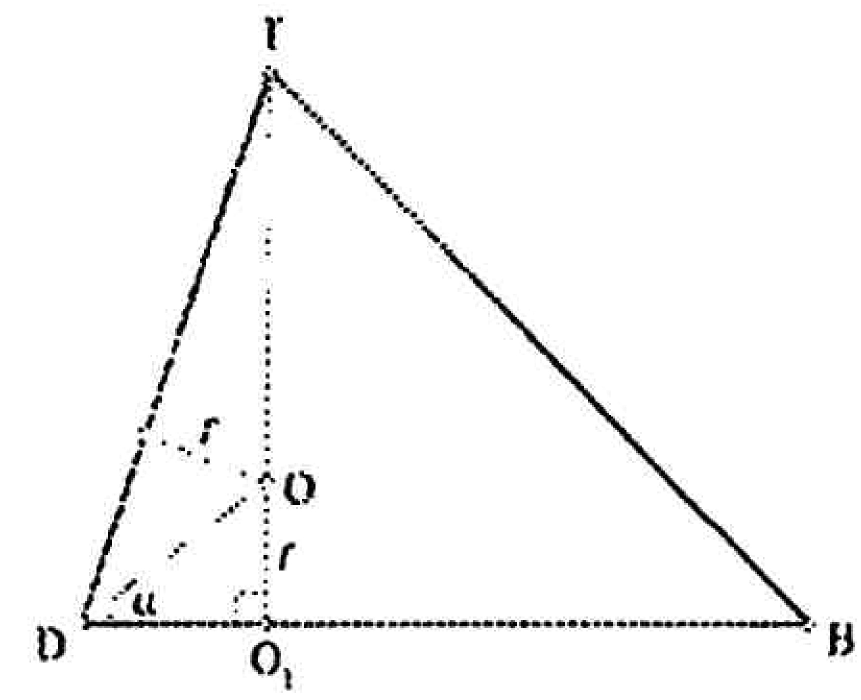


1) $\angle ODO_1 = \alpha$, $\angle TDO_1 = 2\alpha$,

$OO_1 = r$, $tg\alpha = \dfrac{r}{O_1D} = \dfrac{6r}{\sqrt{3}a} = \dfrac{6}{\sqrt{3}a}$.

2) $TD \parallel SL$, $\angle OSO_1 = \angle TDO_1 = 2\alpha$, $SO_1 = \dfrac{r}{tg2\alpha} = \dfrac{r(1 - tg^2\alpha)}{2tg\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}(a^2 - 12)}{12a}$.

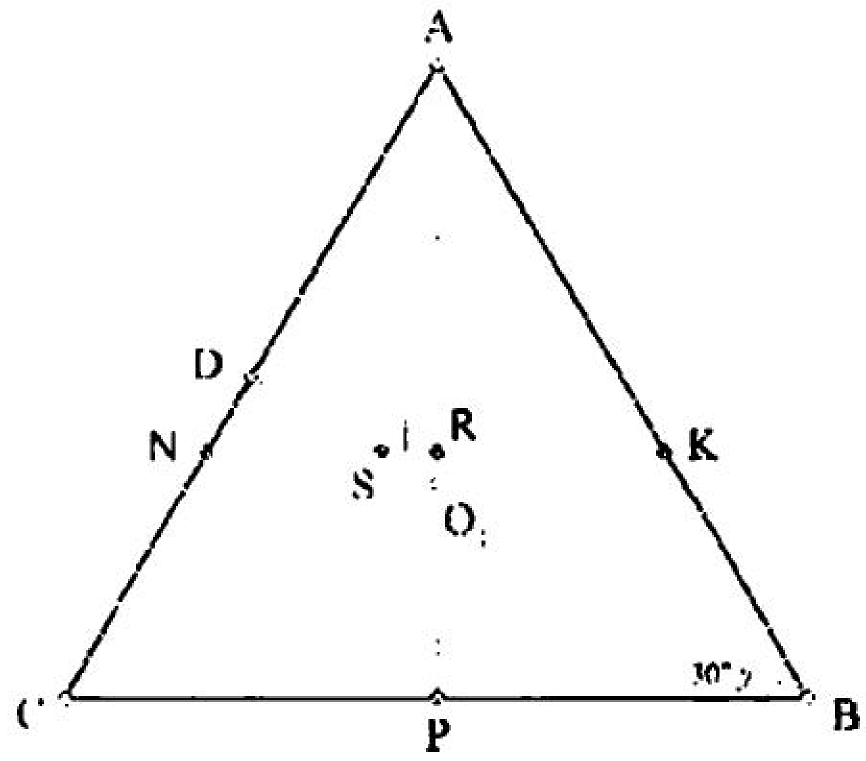


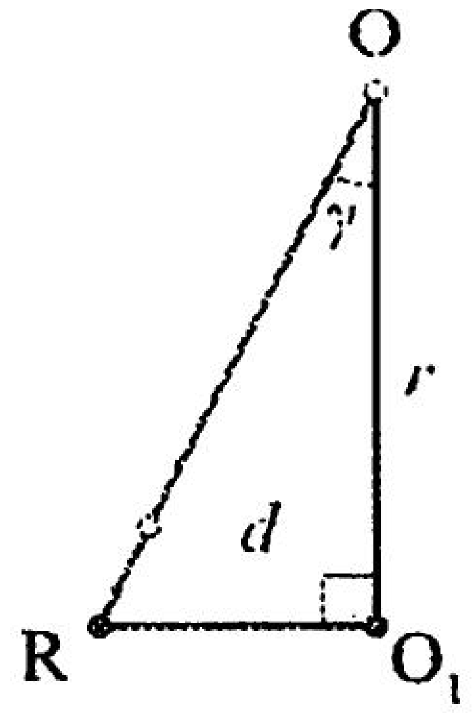


3) AP и BD - медианы основания пирамиды, O_1 - точка их пересечения, R - точка пе-

пересечения AP и NK, $\angle DBC = \angle RSO_1 = 30°$, $O_1R = \frac{SO_1}{2} = \frac{\sqrt{3}(a^2-12)}{24a}$,

$DO_1 = \frac{1}{3}BD = \frac{\sqrt{3}a}{6}$.





4) Длина высоты прямоугольного треугольника OO_1R, проведенной из вершины прямого угла O_1, совпадает с расстоянием от центра описанной около основания пирамиды окружности до плоскости, содержащей сечение. Пусть $\angle OO_1R = \gamma$. Тогда

$$\sin\gamma = \frac{d}{r} = \frac{O_1R}{\sqrt{r^2 + O_1R^2}},\quad \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3}(a^2-12)}{\sqrt{576a^2 + 3(a^2-12)^2}},\quad 4a = a^2 - 12,\quad a = 6$$

5) $DS = O_1D - SO_1 = \frac{\sqrt{3}a}{6} - \frac{\sqrt{3}(a^2-12)}{12a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$BS = 3O_1D - DS = \frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

В треугольнике TBD имеем $TD \parallel SL \Rightarrow \frac{DS}{BS} = \frac{TL}{LB}$, $\frac{DS}{BS} = \frac{2}{7}$, $\frac{TL}{LB} = \frac{2}{7}$.

В треугольнике TBD имеем $ML \parallel CB \Rightarrow \frac{ML}{CB} = \frac{TL}{TB} = \frac{2}{9} \Rightarrow ML = \frac{2a}{9} = \frac{4}{3}$.

6) $O_1R = \frac{SO_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $SR = \frac{\sqrt{3}SO_1}{2} = \frac{1}{2}$, $AR = AO_1 - O_1R = \frac{\sqrt{3}a}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{11\sqrt{3}}{6}$.

Так как $NK \parallel CB$, то $\frac{NK}{CB} = \frac{AR}{AP} = \frac{2AR}{\sqrt{3}a} = \frac{11}{18} \Rightarrow NK = \frac{11}{3}$.

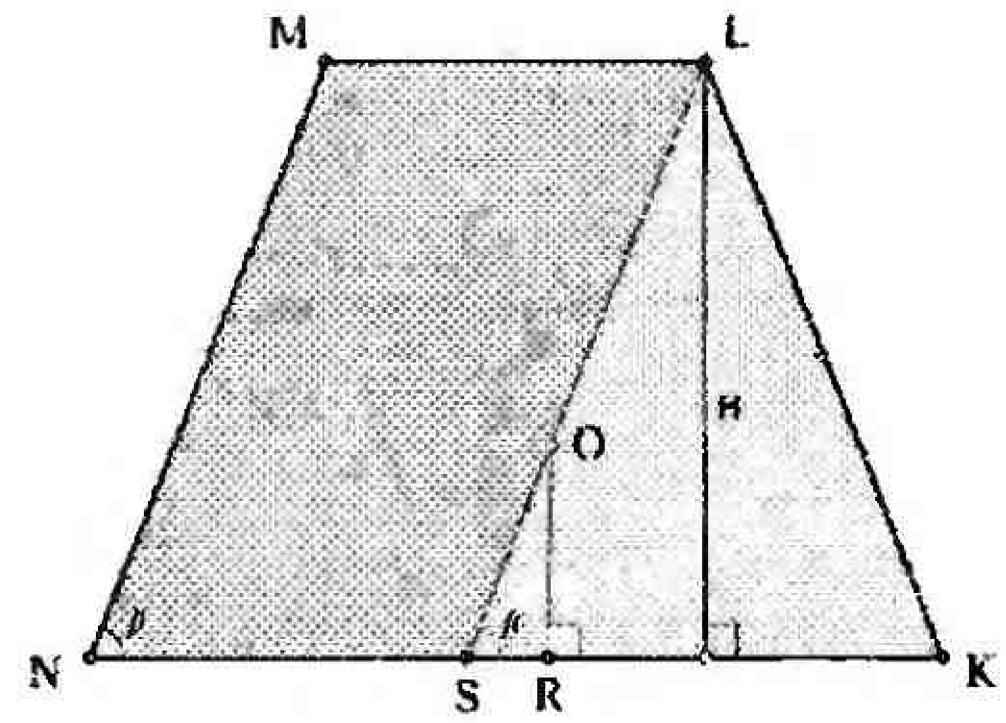
7) $OR = \sqrt{r^2 + O_1R^2} = \frac{\sqrt{39}}{6}$.

8) $\angle MNK = \angle OSR = \beta$, $tg\beta = \frac{OR}{SR} = \sqrt{\frac{13}{3}}$.

9) $H = \dfrac{NK - ML}{2} tg\beta = \dfrac{7}{18}\sqrt{39}$.

10) $S_{сеч} = \dfrac{NK + ML}{2} H = \dfrac{35}{36}\sqrt{39}$.

Ответ: $S_{сеч} = \dfrac{35}{36}\sqrt{39}$.



2.11. Вариант № 4

1. Двое рабочих одновременно приступили к изготовлению одинаковых партий деталей. Когда первый рабочий сделал половину деталей, второму оставалось изготовить 24 детали, а когда второй выполнил половину работы, первому оставалось сделать 15 деталей. Сколько деталей осталось изготовить второму рабочему, когда первый выполнил свою работу? (8 баллов)

2. Решите уравнение $\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{2}\sin x = 0$. (8 баллов)

3. Решите уравнение $\log_4(10x+46) = 1 + \log_2(2-x)$. (8 баллов)

4. Решите неравенство $\log_x(4x-3) > 2$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $(x-2)\sqrt{6-x-x^2} \geq (2-3x)\sqrt{6-x-x^2}$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \sin\left(\sqrt{\pi^2 - x^2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$. (10 баллов)

7. Какой наибольший угол может быть между гипотенузой прямоугольного треугольника и медианой, проведенной из острого угла? (12 баллов)

8. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(0;1)$, а его катеты лежат на прямых $x=-2$ и $y=0$. (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $(x-a)^2 = 8(y-x+a-2)$, $\dfrac{1-\log_2 y}{1-\log_2 x} = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $2\sqrt{14}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите объемы частей, на которые делит пирамиду плоскость, проходящая через середины стороны

основания AC и бокового ребра TB и параллельная медиане TD боковой грани ATB, если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно 1. (12 баллов)

2.12. Решения варианта №4

1. Если n – количество деталей в партии, p_1 и p_2 – производительности рабочих, то $\dfrac{n}{2p_1}=\dfrac{n-24}{p_2}$; $\dfrac{n}{2p_2}=\dfrac{n-15}{p_1}$; $\dfrac{n}{p_1}=\dfrac{n-x}{p_2}$. Из первых двух уравнений получаем: $n^2/4=n^2-39n+360$, или $n^2-52n+480=0$; $n=26\pm14$, $n_1=12$ – пост. корень, $n_2=40$. Подставляя $n=40$ в первое и третье уравнения, получаем $\dfrac{20}{p_1}=\dfrac{16}{p_2}$ и $\dfrac{40}{p_1}=\dfrac{40-x}{p_2}$, откуда $40-x=32$, $x=8$.

Ответ: 8 деталей.

2. $\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{2}\sin x=0$; $2\sin^2 x=1+\cos x$; $2\cos^2 x+\cos x-1=0$; $\cos x=\dfrac{-1\pm3}{4}$.

1) $\cos x=-1$, $x_1=\pi+2n\pi$; 2) $\begin{cases}\cos x=1/2,\\ \sin x\le 0,\end{cases}$ $x_2=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$.

Ответ: $x_1=\pi+2n\pi$, $x_2=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, $n,k\in Z$.

3. $\log_4(10x+46)=1+\log_2(2-x)$; $0{,}5\log_2(10x+46)=\log_2(2(2-x))$; $10x+46=4(2-x)^2$, $-4{,}6<x<2$; $4x^2-26x-30=0$, $x_{1,2}=(13\pm17)/4$; $x_1=7{,}5>2$ – не входит в ОДЗ, $x_2=-1$.

Ответ: $x=-1$.

4. $\log_x(4x-3)>2$. ОДЗ: $x\in(3/4;1)\cup(1;+\infty)$. $\log_x\dfrac{x^2}{4x-3}<0$.

1) $\begin{cases}3/4<x<1\\ 0<x<1,\\ \dfrac{x^2}{4x-3}>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3/4<x<1,\\ x^2-4x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3/4<x<1,\\ x<1,\\ x>3\end{cases}\Leftrightarrow 3/4<x<1$.

2) $\begin{cases}1<x<+\infty,\\ \dfrac{x^2}{4x-3}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<+\infty,\\ x^2-4x+3<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<+\infty,\\ 1<x<3\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<3$.

Ответ: $x\in(3/4;1)\cup(1;3)$.

5. $(x-2)\sqrt{6-x-x^2}\ge(2-3x)\sqrt{6-x-x^2}$.

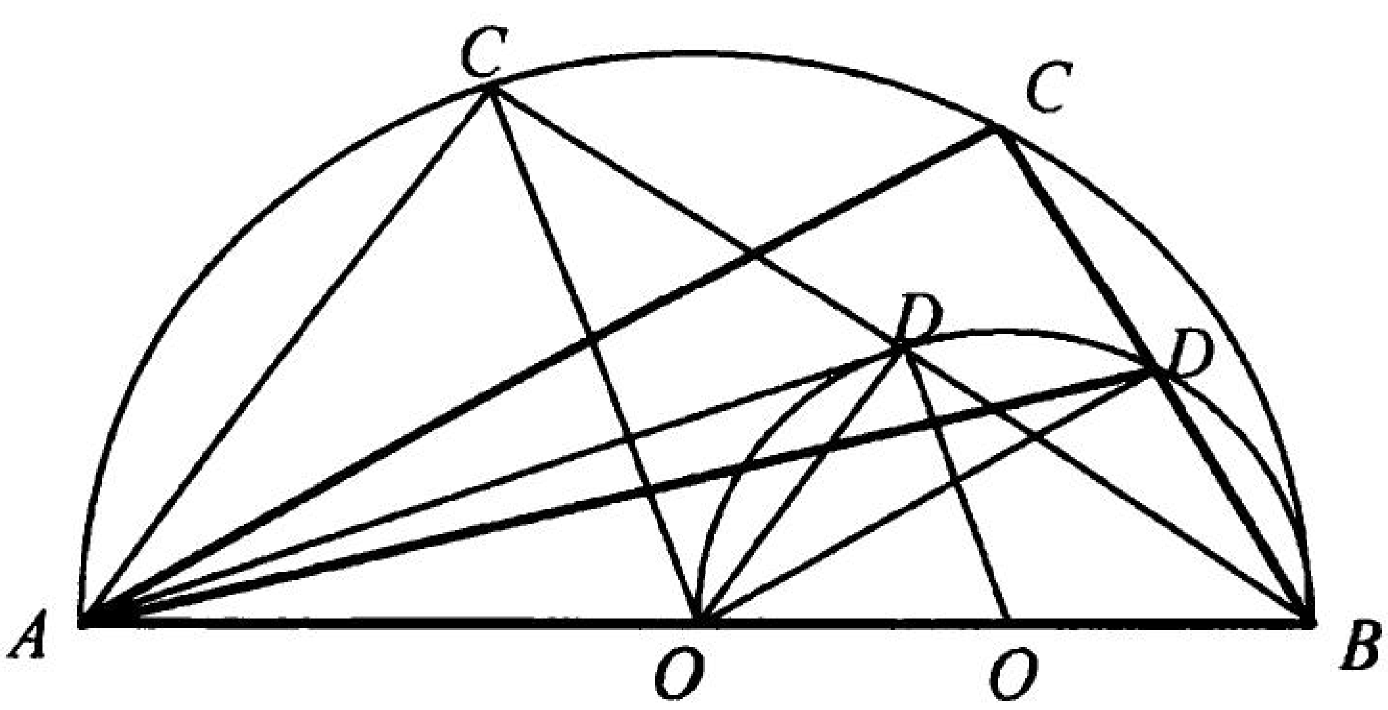
$$\left[\begin{array}{c} x=-3, \\ \begin{cases} x-2\geq 2-3x, \\ -3\leq x\leq 2, \end{cases} \\ x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=-3, \\ \begin{cases} x\geq 1, \\ -3\leq x\leq 2, \end{cases} \\ x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-3\}\cup[1;2].$$

Ответ: $x\in\{-3\}\cup[1;2]$.

6. $f(x)=\sin\left(\sqrt{\pi^2-x^2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Пусть $z(x)=\left(\sqrt{\pi^2-x^2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$; при $-\pi\leq x\leq\pi$ $-\pi/3\leq z\leq 2\pi/3$. На этом промежутке функция $\sin(z)$ принимает наименьшее значение $f(-\pi/3)=-\sqrt{3}/2$ и наибольшее значение $f(\pi/2)=1$.

Ответ: $\left[-\sqrt{3}/2;1\right]$.

7. Построим окружность с диаметром, совпадающим с гипотенузой AB треугольника ABC. Соединим D (середину катета BC) с центром окружности O; очевидно, $DO\parallel AC$ и $\angle BDO=90°$. Следовательно, точка D лежит на окружности с диаметром OB. Угол между гипотенузой AB и медианой AD будет наибольшим, если медиана касается этой окружности (положение AD_1). В ΔAD_1O_2 $D_1O_2=1/4\,AB$ и $AO_2=3/4\,AB$, отсюда $\sin\angle D_1AO_2=D_1O_2/AO_2=1/3$.



Ответ: $\arcsin(1/3)$.

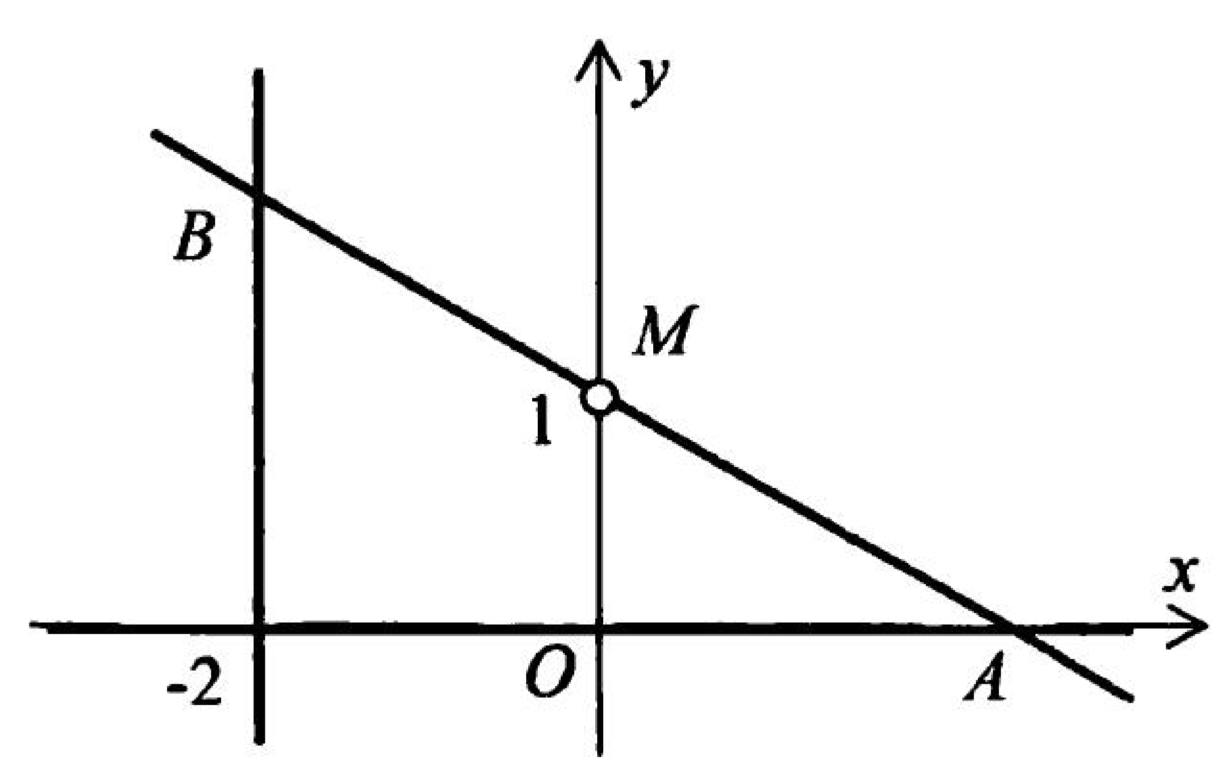
8. $y=1+kx$, $x_A=-\dfrac{1}{k}$, $y_B=1-2k$.

$S=\dfrac{1}{2}(x_A+2)\cdot y_B=\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{1}{k}\right)(1-2k)=$

$\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{1}{k}-4k+2\right)$; $S'(k)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k^2}-4\right)=0.$

$k_1=\dfrac{1}{2}$-пост. корень, $k_2=-\dfrac{1}{2}$.

$S_{min}=0{,}5\cdot 4\cdot 2=4$ ед^2. Ответ: 4 ед^2.



9. Второе уравнение равносильно системе: $x > 0,\ x \neq 2,\ y = x$. Подставляя $y = x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2 = 8(a-2)$, или $x^2 - 2ax + a^2 - 8a + 16 = 0$ (*), у которого $D/4 = a^2 - a^2 + 8a - 16 = 8a - 16$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Очевидно, при $a < 2$ уравнение решений не имеет.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня $x_{1,2} = a \pm \sqrt{8a-16}$, если

$$\begin{cases} 8a-16>0, \\ a>0, \\ a^2-8a+16>0, \\ 4-4a+a^2-8a+16 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>2, \\ a\neq 4, \\ a^2-12a+20\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>2, \\ a\neq 4, \\ a\neq 2, \\ a\neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<a<4, \\ 4<a<10, \\ 10<a<+\infty. \end{array} \right.$$

Рассмотрим уравнение в оставшихся отдельных точках.

При $a = 2$ уравнение принимает вид $(x-2)^2 = 0$, его корень $x = 2$ не удовлетворяет ограничениям, наложенным на неизвестное x во втором уравнении системы.

При $a = 4$ уравнение принимает вид $x^2 - 8x = 0$, его корень $x = 0$ – посторонний, другой корень $x = 8$ входит в область допустимых значений уравнений системы; при $a = 4$ система уравнений имеет одно решение $x = 8,\ y = 8$.

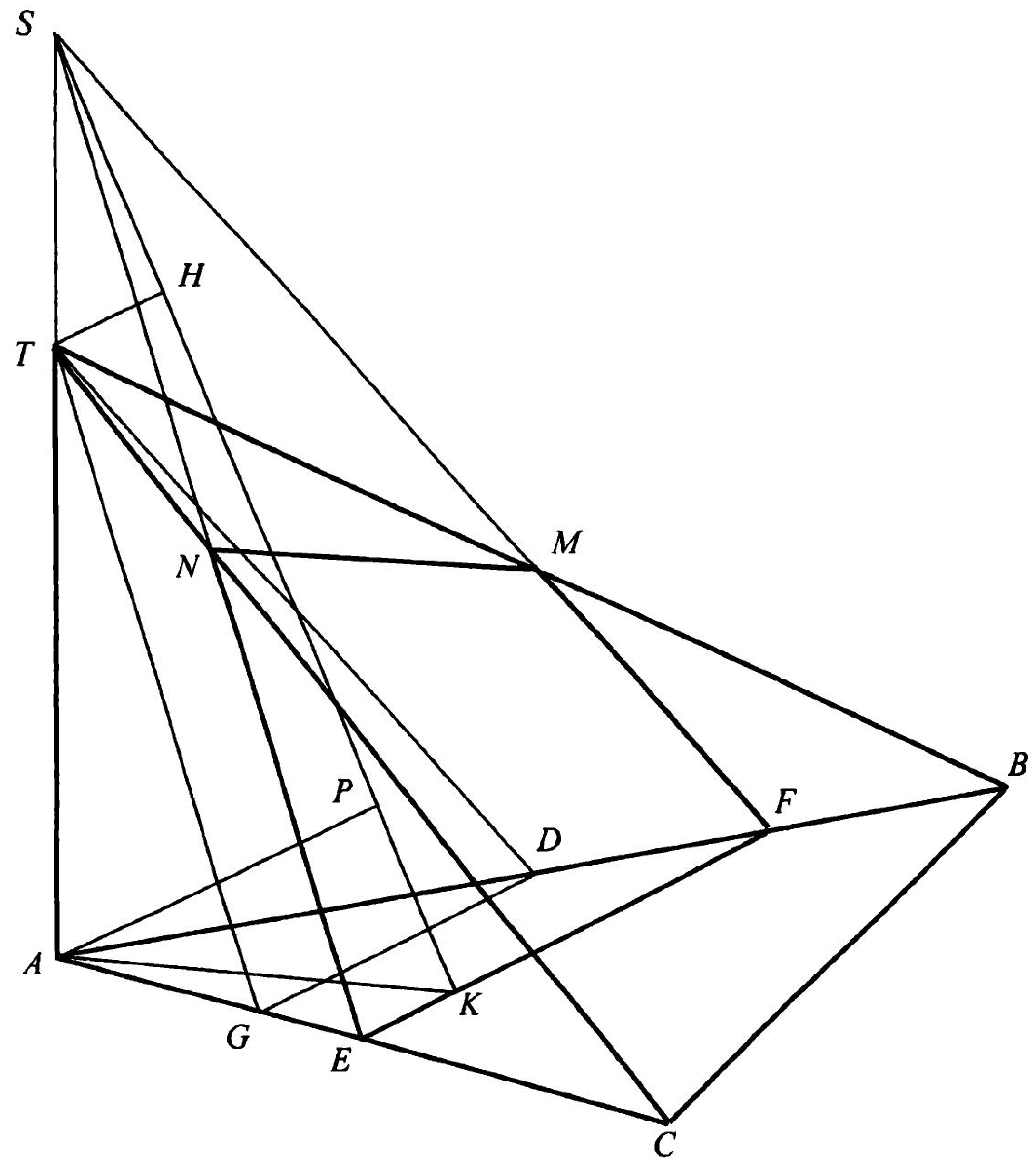
При $a = 10$ получаем $(x-10)^2 = 8 \cdot 8$, откуда $x_{1,2} = 10 \pm 8$; корень $x = 2$ – посторонний, второй корень $x = 18$ входит в область допустимых значений системы. При $a = 10$ система уравнений имеет одно решение $x = 18,\ y = 18$. Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: при $a \in (2;4) \cup (4;10) \cup (10;+\infty),\ x = y = a \pm \sqrt{8a-16}$;

$a = 4,\ x = 8,\ y = 8$;

$a = 10,\ x = 18,\ y = 18$.

10.



Пусть M – середина ребра TB. Проведем $MF \| TD,\ F \in AB,\ DF = FB = AB/4$; $S = (MF) \cap (AT)$, $SF = 3/2\,TD$ и $AS = 3/2\,AT$. Так как $TD = 2MF$, то $SM = 2/3\,SF$. Если E – середина стороны AC и $N = SE \cap TC$, то $EFMN$ –сечение пирамиды заданной в условии секущей плоскостью. Проведем $TG \| SE$. Так как $SE = 3/2\,TG$ и $NE = 3/4\,TG$, то $SN = NE = SE/2$. Следовательно, площадь треугольника ΔMSN

$$S_{\Delta MSN} = \frac{1}{2} SM \cdot SN \cdot \sin \angle MSN = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot SF \cdot \frac{1}{2} \cdot SE \cdot \sin \angle FSE = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta FSE}.$$

Проведем $AK \perp FE,\ K \in FE,\ SK \perp FE$, и $TH \perp SK,\ H \in SK$. Так как $TH \perp (SFE)$, то длина TH равна заданному в условии задачи расстоянию от вершины пирамиды T до секущей плоскости. Введем обозначения $a = AB$ и $d = TH$, тогда $AP = 3d$.

Сравним объемы пирамид $TMSN$ и $AFSE$. Так как $TH = \frac{1}{3}AP$ и $S_{\Delta MSN} = \frac{1}{3}S_{\Delta FSE}$, $V_{TMSN} = \frac{1}{9}V_{AFSE}$.

Сравним объемы пирамид $SAFE$ и $TABC$. Очевидно, $V_{SAFE} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot V_{TABC} = \frac{9}{16}\cdot V_{TABC}$. Следовательно, объем одной части пирамиды, пятигранника $AFETMN$, $V_{AFETMN} = \frac{8}{9}\cdot V_{SAFE} = \frac{8}{9}\cdot\frac{9}{16}\cdot V_{TABC} = \frac{1}{2}\cdot V_{TABC}$. То есть, секущая плоскость разбивает пирамиду на две равновеликие части.

В ΔAFE

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE\cdot AF\cdot\cos\angle BAC = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7a^2}{16}; \quad EF = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Так как $\frac{1}{2}\cdot AK\cdot EF = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF\cdot\sin 60^\circ$, $AK = \frac{AE\cdot AF\cdot\sin 60^\circ}{EF} = \frac{a}{2}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{a\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}a}{4\sqrt{7}}$.

В ΔASK $\quad PK = \sqrt{AK^2 - AP^2} = \sqrt{\frac{27a^2}{16\cdot 7} - 9d^2} = \frac{3\sqrt{3a^2 - 112d^2}}{4\sqrt{7}}$

и $AS = \frac{AP\cdot AK}{PK} = \frac{3d\cdot 3\sqrt{3}a\cdot 4\sqrt{7}}{4\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{3a^2 - 112d^2}} = \frac{3\sqrt{3}ad}{\sqrt{3a^2 - 112d^2}}$; $AT = \frac{2}{3}AS = \frac{2\sqrt{3}ad}{\sqrt{3a^2 - 112d^2}}$.

Объем пирамиды

$$V_{TABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2\sqrt{3}ad}{\sqrt{3a^2 - 112d^2}} = \frac{a^3 d}{2\sqrt{3a^2 - 112d^2}} = \frac{a^2 d}{2\sqrt{3 - 112(d/a)^2}}.$$

Объемы частей пирамиды $V = V_1 = V_2 = \dfrac{a^2 d}{4\sqrt{3 - 112(d/a)^2}}$.

При $a = 2\sqrt{14}$, $d = 1$ $\quad V = \dfrac{4\cdot 14}{4\sqrt{3 - 112\cdot 1/56}} = 14$.

Ответ: 14.

2.13. Типовые задания для самостоятельного решения

Вариант № 5

1. По плану одной бригаде нужно изготовить на 900 изделий больше, чем другой за то же время. Чтобы каждая бригада выполнила свой план на 2 дня раньше, в первую бригаду добавили 3 человека, а во вторую 2. Сколько рабочих было в каждой бригаде во время работы, если каждый из них изготовлял в среднем по 15 изделий в день? (8 баллов). Ответ: 18 и 12 рабочих.

2. Сколько членов содержится в возрастающей арифметической прогрессии, у которой сумма членов с четными номерами составляет 90% суммы членов с нечетными номерами? (8 баллов). Ответ:19.

3. Решите уравнение $\left(x^{\log_{\sqrt{x}}|3-x|}-4\right)^2+\sqrt{(2^x-6x-2)(2^x-x-1)}=0$. (8 баллов)

Ответ: 5.

4. Решите уравнение $3\cos x+\cos\sqrt{64tgx\,|\,tgx-1\,|+9}=8\sin x$. (8 баллов)

Ответ: $arctg\,\dfrac{7}{8}+\pi n,\ n\in Z$.

5. Решите неравенство $\dfrac{10(x^3-27)\sqrt{x^2+10x+25}}{(x^2+3x+9)(x^2+2x-15)}\geq x-3$. (10 баллов)

Ответ: $(-\infty;-7]\cup(-5;3)\cup(3;13]$.

6. Найдите множество значений функции $\mathrm{f(x)}=\log_{0,5}\left(\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}+14}\right)$.

(10 баллов) Ответ: $\mathrm{E(y)}=[3;+\infty)$.

7. Окружность радиуса $R_1=\sqrt{3}$ касается сторон AB и BC треугольника ABC, а окружность радиуса $R_2=3\sqrt{3}$ внешним образом касается первой окружности и сторон AC и BC треугольника ABC. Общая касательная к этим окружностям, не содержащая сторону BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите длины сторон треугольника ABC, если $\angle AMN=30°$, $\angle ANM=90°$.(12 баллов). Ответ: $7\sqrt{3}+15$, $5\sqrt{3}+7$, $10\sqrt{3}+14$.

8. Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB, если точка A принадлежит кривой $x^2+4x+y^2-20y+103=0$, а точка B – графику функции $y=3\,|\,x\,|$? (12 баллов). Ответ: $(4/\sqrt{10})-1$.

9. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} \sqrt{y+a} = 2x - x^2, \\ y + x^2 = 2x + a^2 \end{cases}$ имеет ровно 4 различных решения. Найдите эти решения при каждом из полученных a. (12 баллов). Ответ: $a \in (-1; -0{,}5) \cup (-0{,}5; 0)$, $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{a+1}$, $y_{1/2} = a^2 - a$; $x_{3/4} = 1 \pm \sqrt{-a}$, $y_{3/4} = a^2 + a + 1$.

10. Основанием пирамиды $TABCD$ является трапеция $ABCD$, стороны BC и AD которой лежат на параллельных прямых, $BC = 4$, $BC < AD$, а радиус вписанной в трапецию $ABCD$ окружности равен $\sqrt{6}$. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания пирамиды под одним и тем же углом. Расстояние между медианой AM боковой грани TAB и высотой TK боковой грани TBC равно $\sqrt{3}/2$. Найдите объем пирамиды $TABCD$, если известно, что вокруг нее можно описать сферу (12 баллов). Ответ: 20.

2.14. Вариант № 6

1. Один рабочий за два часа делает на 5 деталей больше, чем другой, соответственно на изготовление 100 деталей он затрачивает на 2 ч меньше. Какое время тратит каждый рабочий на изготовление 100 деталей? (8 баллов)

2. Сколько последовательных членов арифметической прогрессии 32, 28, 24, ..., начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, равную 132? (8 баллов)

3. Решите уравнение $9^{1+2\sqrt{x}} - 28 \cdot 9^{\sqrt{x}} + 3 = 0$. (8 баллов)

4. Найдите все корни уравнения $\cos 3x = \sqrt{3}\sin 4x + \cos 5x$, принадлежащие промежутку $[\pi/2; \pi]$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{x - 3\sqrt{x-1} + 1}{4\sqrt{x-1} - 2 - x} \le 0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2}(\sqrt{4-x^2} - 1)^2\right)$. (10 баллов)

7. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 28, его площадь равна $24\sqrt{3}$, угол A составляет 60°, BK и BN – высоты параллелограмма, проведенные к прямым, содержащим стороны AD и CD соответственно. Найдите длину отрезка KN. (12 баллов)

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2\sqrt{3}/24$, проходящими через точку $M(4;-2\sqrt{3})$. (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых уравнение $(x-a)^2 = \frac{x}{|x|} + a + 1$

имеет хотя бы одно решение, и решите его при каждом a. (12 баллов)

10. Расстояние между диагональю прямоугольного параллелепипеда и не пересекающей ее диагональю основания равно l, а диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом 30°. Плоскость, проходящая через диагональ параллелепипеда и параллельная диагонали основания, образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью. (12 баллов)

Ответы. 1. 8 и 10 ч. **2.** 6 или 11. **3.** $x = 1/4$. **4.** $x \in \{\pi/2; 3\pi/4; \pi; 2\pi/3\}$.

5. $x \in [1;\ 2) \cup (2;\ 5] \cup (10;\ \infty)$. **6.** $E_f = \left[-1; \sqrt{3}\right]$. **7.** $\sqrt{39}$. **8.** 90°. **9.** Ответ: при $a \in (-1;0] \cup [1;2]$ $x = a + \sqrt{a+2}$; при $(0;1)$ $x_1 = a + \sqrt{a+2}$, $x_2 = a - \sqrt{a}$; при $a \in (2;+\infty)$ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a+2}$. **10.** $S = 4\sqrt{6}l^2$.

2.15. Вариант № 7

1. Партию обуви, купленную за 180 тыс. рублей, в первую неделю продавали по цене, большей закупочной на 25%, затем наценка была снижена до 16% от закупочной цены; а вся партия обуви была продана на 20% дороже, чем куплена. На какую сумму продали обуви в первую неделю? (8 баллов)

2. Решите уравнение $|\cos x| + \sin 2x = 0$. (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 100, 97, 94,...? (8 баллов)

4. Решите уравнение $(\log_3 x)\cdot\log_4(x/3) = \log_2 3$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x}+4}{1-\sqrt{x}} \geq \frac{2\sqrt{x}+13}{x-5\sqrt{x}+4}$. (10 баллов)

6. Функция $f(x) = c/(x-c)$ определена на отрезке $[1;3]$. Найдите все значения c, при которых наименьшее значение функции на этом отрезке меньше $-0,25$. (10 баллов)

7. Площадь треугольника ABC равна $49\sqrt{3}/4$, сторона $AB = 7$, угол $\angle B = 60°$. На сторонах AB, BC и AC выбраны точки K, L и M так, что $AK : KB = 2 : 5$, $BL : LC = 1 : 6$, $AM : MC = 4 : 3$. Найдите площадь круга, описанного около треугольника KLM. (12 баллов)

8. Какую наибольшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x = -3$ и $x = 1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y = x^2 + 16$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3 \le x_0 \le 1$? (12 баллов)

9. Укажите все значения параметра p, при которых система уравнений $y^2 - 6y + 10 = 5|x|/x$, $y + 1 - p = (x - p)^2$ имеет ровно два различных решения. Найдите эти решения. (12 баллов)

10. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота равна $4R/3$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану основания? Найдите отношение объёмов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае. (12 баллов)

Ответы. **1.** 100 тыс. рублей. **2.** $\left\{\frac{\pi}{2} + n\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi \,\middle|\, n, k \in Z\right\}$. **3.** 1717. **4.** $\{1/3; 9\}$. **5.** $x \in [0; 1) \cup (1; 16)$. **6.** 7π. **7.** $c \in (-\infty; -1/3) \cup (3; +\infty)$. **8.** 68. **9.** $-2 < p \le 1$, $x_1 = p + \sqrt{6 - p}$, $y_1 = 5$; $x_2 = p + \sqrt{2 - p}$, $y_2 = 1$; $p = 2$, $x_1 = 4$, $y_1 = 5$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$; $2 < p < 6$, $x_{1,2} = p \pm \sqrt{6 - p}$, $y_{1,2} = 5$. **10.** $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}} R^2$; $3:19$.

2.16. Вариант № 8

1. Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 3 с быстрее второго и догоняет второе тело каждые полторы минуты. За какое время каждое тело проходит окружность? (8 баллов)

2. Решите уравнение $\sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2} \cos x$. (8 баллов)

3. Решите уравнение $(\log_2 x) \cdot \log_{81}(8x) = \log_3 2$. (8 баллов)

4. Решите неравенство $\frac{6}{3^x - 1} > 3^x$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\sqrt{x^2+3x-18} \le \dfrac{6\sqrt{x^2+3x-18}}{x+2}$.(10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{5\sin x-3}{\sin x+1}}$.(10 баллов)

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD пересекаются в точке F, причем $AF:FC=3:1$, $BF:FD=4:3$, угол $\angle AFD=\arcsin\left(\sqrt{15}/4\right)$. Найдите радиус вписанной в треугольник CFD окружности, если $BD=3,5$. (12 баллов)

8. На плоскости xOy прямые $y=3x-2$ и $x=-1$ пересекаются в точке B, а прямая, проходящая через начало координат, пересекает заданные прямые соответственно в точках A и C. При каком положительном значении абсциссы точки A площадь треугольника ABC будет наименьшей? Найдите эту площадь. (12 баллов)

9. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$(x-a)^2=9(y-x+a-2),\quad \frac{1-\log_2 y}{1-\log_2 x}=1$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.(12 баллов)

10. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, параллельной диагонали BC_1 боковой грани BCC_1B_1 и проходящей через центр описанного около призмы шара и вершину основания A, если стороны основания призмы равны 3, а высота призмы равна $10/3$. (12 баллов)

Ответы. 1. 15 с и 18 с. **2.** $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z$. **3.** $\{1/16;2\}$. **4.** $0<x<1$.

5. $x\in\{-6\}\cup[3;4]$. **6.** $E(y)=[0,1;+\infty)$. **7.** $\sqrt{15}/12$. **8.** 1; $S_{\min}=4$.

9. $a\in(2;3)\cup(6;11)\cup(11;+\infty)$, $x=y=a\pm3\sqrt{a-2}$; $a\in[3;6]\cup\{11\}$, $x=y=a+3\sqrt{a-2}$.

10. $19\sqrt{3}/5$

Раздел 3. Физика

3.1. Содержание варианта задания олимпиады по физике в МГТУ им. Н.Э. Баумана

Специфика системы подготовки специалистов в МГТУ им. Н.Э.Баумана, большой объем контрольных заданий по каждому предмету, включенному в образовательный курс, интенсивность проверок выполнения этих заданий, налагают определенные требования к формированию контингента будущих первокурсников. Существует необходимость отбора из числа абитуриентов школьников, не только обладающих знаниями по школьному курсу физики, но глубоко понимающих сущность физических процессов (из числа рассматриваемых в школьном курсе), логически мыслящих, творчески ищущих пути решения сложных задач, умеющих самостоятельно работать с литературой.

Структура и содержание задания по физике при проведении олимпиады направлены на проверку глубины усвоения абитуриентом школьного курса физики, прочности выработанных им навыков применения знаний основных законов физики к решению задач и практически являются инструментальным средством оценки подготовленности абитуриентов к последующему обучению в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Каждый вариант контрольного задания олимпиады содержит системный набор задач различного направления, упорядоченных по возрастанию сложности, и состоит из 10 заданий: двух задач первого уровня сложности, либо одного вопроса качественного характера и одной задачи первого уровня сложности; шести задач второго уровня сложности и двух задач третьего уровня сложности. Задачи одного варианта задания охватывают все основные разделы школьного курса физики. При этом в нём могут быть, например, задачи первого уровня сложности из раздела «Механика», второго уровня сложности из разделов «Термодинамика», «Электростатика», «Оптика», тогда задачи третьего уровня сложности будут представлять собой сочетание разделов «Электричество», «Колебания» и «Механика». Уровень сложности задач соответствует Программе вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения России. Специальные экспериментально-теоретические исследования и накопленный опыт предлагаемых вариантов заданий олимпиад позволяют утверждать, что, несмотря на множество вариантов сочетаний задач различной трудоёмкости из разных разделов физики, варианты заданий в целом по трудоемкости и уровню сложности являются одинаковыми.

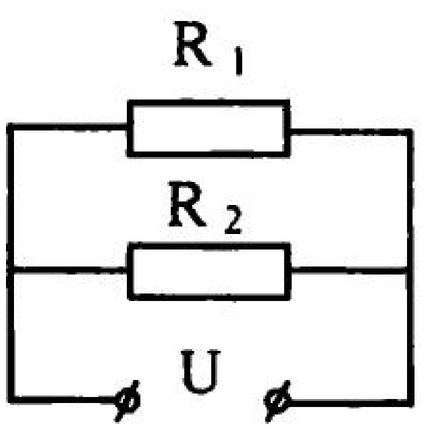
ВОПРОС КАЧЕСТВЕННОГО ХАРАКТЕРА. Термин «качественного» подчеркивает главную особенность всех вопросов такого типа – внимание в них акцентируется на качественной стороне рассматриваемого физического явления. Этот вопрос призван выявить глубину понимания абитуриентом сущности физических явлений и законов, умение объяснить смысл физических величин и понятий. Он служит средством проверки практических навыков абитуриента, умения применить теоретические знания для объяснения явлений природы, быта, техники. Ответ на этот вопрос позволяет также оценить технический кругозор абитуриента, проверить его способность к логическим умозаключениям, базирующимся на знании основных законов физики.

3.2. Примеры вопросов качественного характера:

1. Что называют инертностью тела?

2. Напишите формулу для вычисления ускорения свободного падения на поверхности Земли. Поясните смысл входящих в неё физических величин и укажите единицы их измерения.

3. Напишите формулу закона Ома для участка цепи, изображенной на рисунке. Укажите единицы измерения входящих в неё физических величин.



4. Приведите примеры, когда сила трения является «движущей» силой.

5. В чем состоит особенность теплового расширения воды?

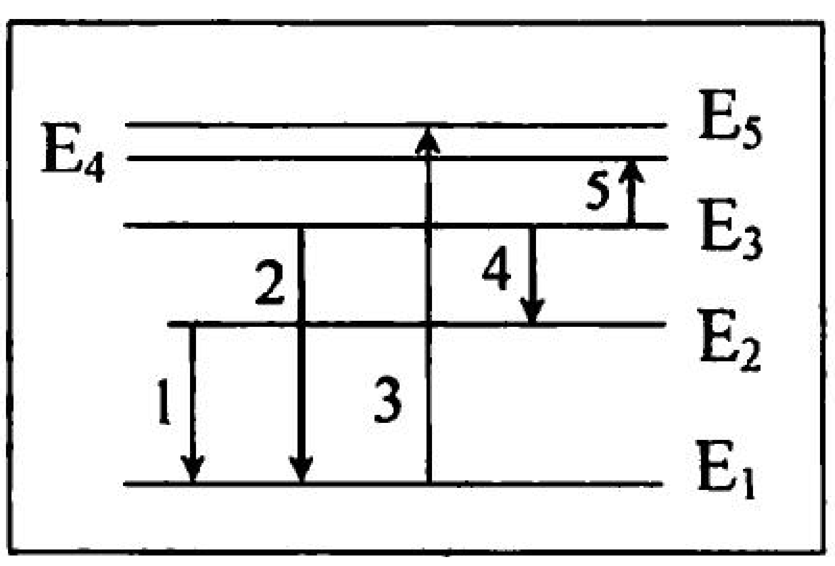
6. Какова физическая сущность удельной теплоты плавления у кристаллических твердых тел?

7. Какова физическая причина наличия удельной теплоты парообразования у жидкостей?

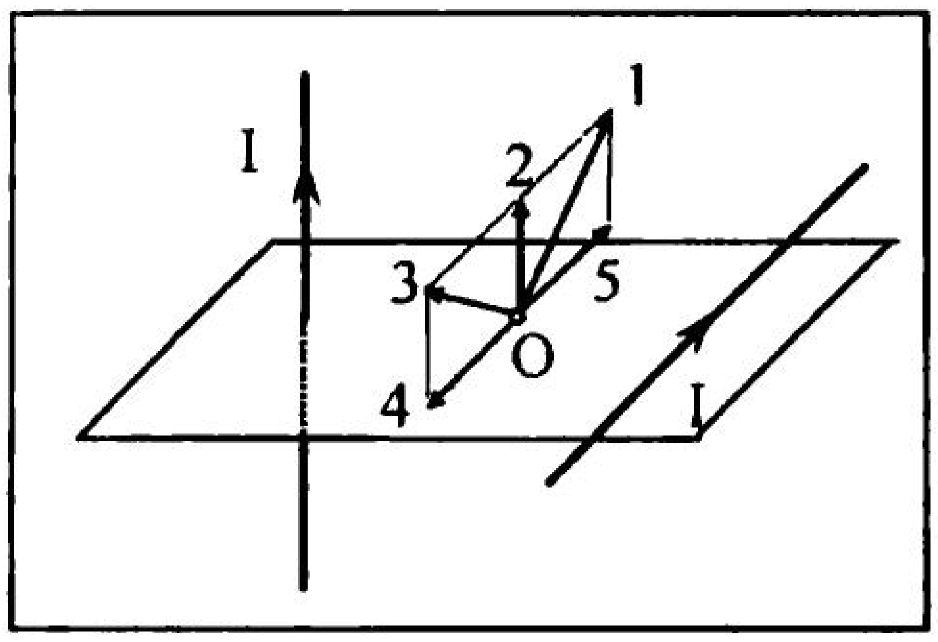
8. Действует ли сила Архимеда на тела, находящиеся в жидкости в космическом корабле, движущемся по круговой орбите вокруг Земли?

9. Объясните, почему теплоёмкость двухатомных газов больше теплоёмкости одноатомных газов.

10. На рисунке представлена схема энергетических уровней атома. Какой цифрой обозначен переход с поглощением фотона наибольшей частоты? Ответ обосновать.

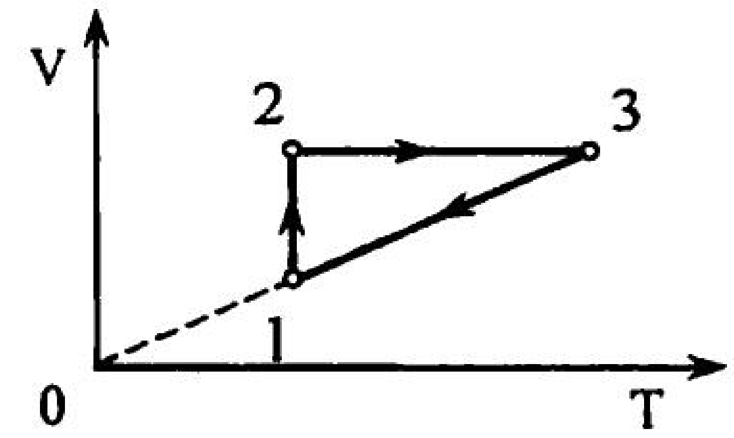


11. По двум прямолинейным длинным проводникам, расположенным во взаимно



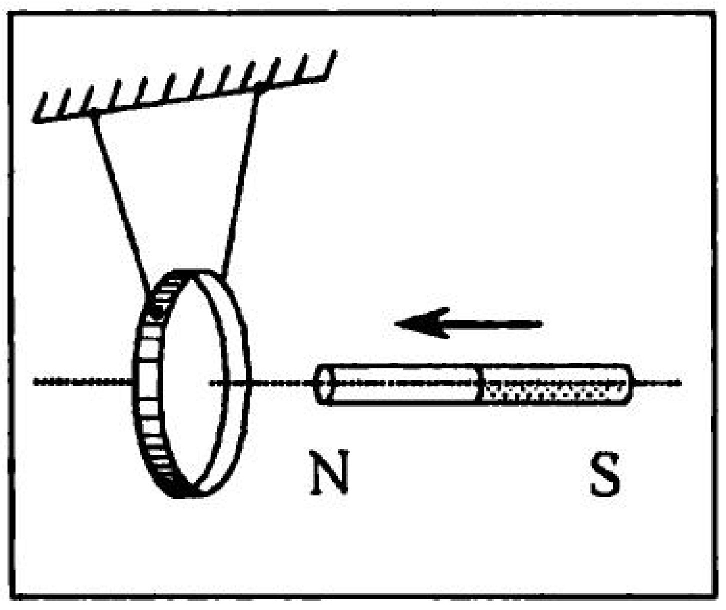
перпендикулярных плоскостях, текут равные токи. Какое из показанных на рисунке направлений имеет вектор $\vec{B}$ индукции магнитного поля, созданного этими токами, в точке O? Ответ обосновать.

12. Изменения состояния газа при некотором круговом процессе 1–2–3–1 показаны на графике зависимости объема газа от абсолютной температуры. Изобразите этот цикл на графике зависимости давления газа от объема. Укажите, на каких участках графика газ получает теплоту извне.



13. На каком явлении основан принцип действия трансформатора?

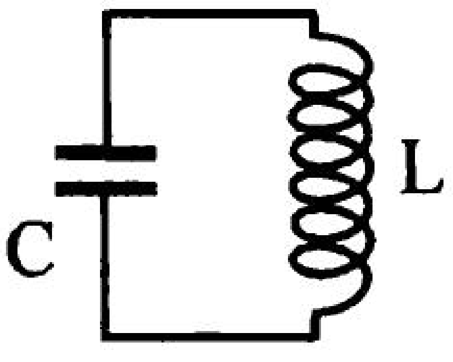
14. Алюминиевое кольцо подвешено на двух нитях. Северный полюс магнита приближается с некоторой скоростью к кольцу, двигаясь вдоль его оси перпендикулярно плоскости кольца. Будет ли при этом кольцо притягиваться к магниту или отклоняться от него? Ответ поясните



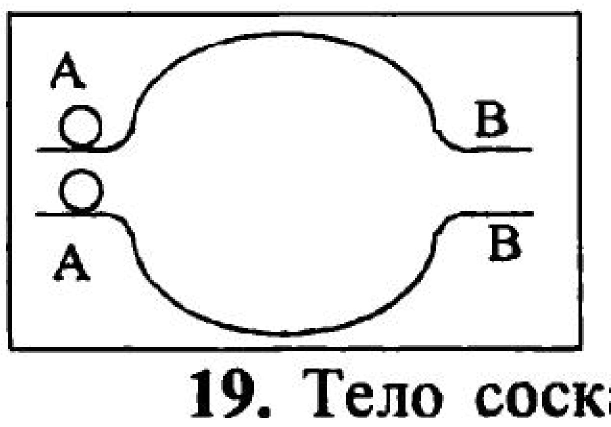
15. Почему белый свет, проходя сквозь призму, разлагается в цветной спектр?

16. Чем вызвана необходимость замедления нейтронов, испускаемых при делении ядер в ядерных реакторах?

17. Как изменится период колебаний в колебательном контуре, состоящем из воздушного конденсатора и катушки индуктивности, если пространство между обкладками конденсатора заполнить диэлектриком? Ответ поясните.

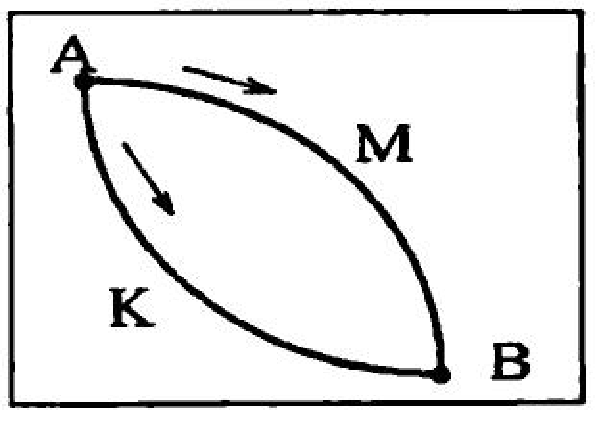


18. Два одинаковых шарика начали одновременно и с одинаковой скоростью



двигаться по абсолютно гладким сферическим поверхностям. Будет ли отличаться время движения каждого шарика к моменту их прибытия в точку В? Ответ поясните.

19. Тело соскальзывает из точки А в точку В один раз по дуге АМВ, другой раз по дуге АКВ. Коэффициент трения остается постоянным. В каком случае скорость тела в точке В больше? Почему?



20. Какие силы создают центростремительное ускорение самолёту при повороте в горизонтальной плоскости?

21. Какие силы создают центростремительное ускорение велосипедисту при повороте на горизонтальной дороге?

Ответ: Силы трения и силы реакции со стороны дороги.

ЗАДАЧИ ПЕРВОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ — задачи, в которых рассматриваются явления, относящиеся к одному разделу физики. Алгоритм решения этих задач обычно виден из условия задачи и для их решения необходимо, используя основные законы физики и их аналитические выражения, провести несложные математические преобразования и вычисления. Задачи этого уровня, как правило, позволяют выявить не только сам факт знания абитуриентом основных законов физики, но и умения применить аналитические выражения этих законов к решению задач. Кроме того, выявляется умение абитуриента пользоваться системой измерения физических величин СИ и переводить внесистемные единицы измерения в СИ.

Несмотря на кажущуюся простоту задач первого уровня сложности, у абитуриентов встречаются затруднения при их решении, не позволяющие абитуриенту получить максимальные баллы, например:

- При знании формулировок законов Ньютона не учитывается векторный характер этих законов.
- Путают формулы для нахождения емкости батареи конденсаторов при их параллельном и последовательном соединении с формулами для определения сопротивления участка цепи постоянного тока при последовательном и параллельном соединении проводников.
- Часто путают основное уравнение молекулярно–кинетической теории идеального газа с уравнением состояния идеального газа.
- Встречаются затруднения в записи аналитических выражений изопроцессов, адиабатного процесса и применении первого закона термодинамики для этих процессов.
- При использовании законов сохранения импульса и механической энергии, забывают про векторный характер закона сохранения импульса.
- К сожалению, многие абитуриенты не знают правильного определения таких понятий, как напряженность и потенциал электростатического поля, забывают о век-

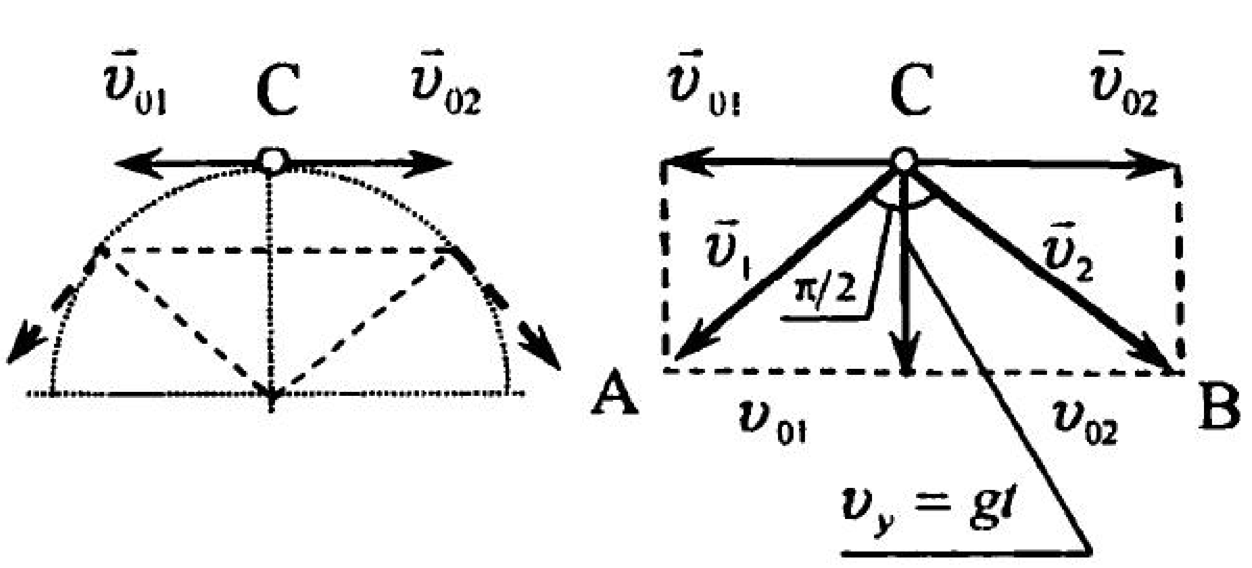
торном характере напряженности, не могут использовать принцип суперпозиции полей, не имеют четкого представления о физическом смысле этих характеристик поля. Не пользуются графическим представлением электрического и магнитного полей.

- При описании колебательного движения не учитывается зависимость амплитуды и фазы колебаний тела от внешних условий, вызвавших эти колебания.

3.3. Примеры задач первого уровня сложности:

1. Две частицы движутся с ускорением g в однородном поле тяжести. В начальный момент частицы находились в одной точке и имели скорости $v_1 = 3{,}0$ м/с и $v_2 = 5{,}0$ м/с, направленные горизонтально и в противоположные стороны. Найдите расстояние между частицами в момент, когда векторы их скоростей окажутся взаимно перпендикулярными.

Решение.

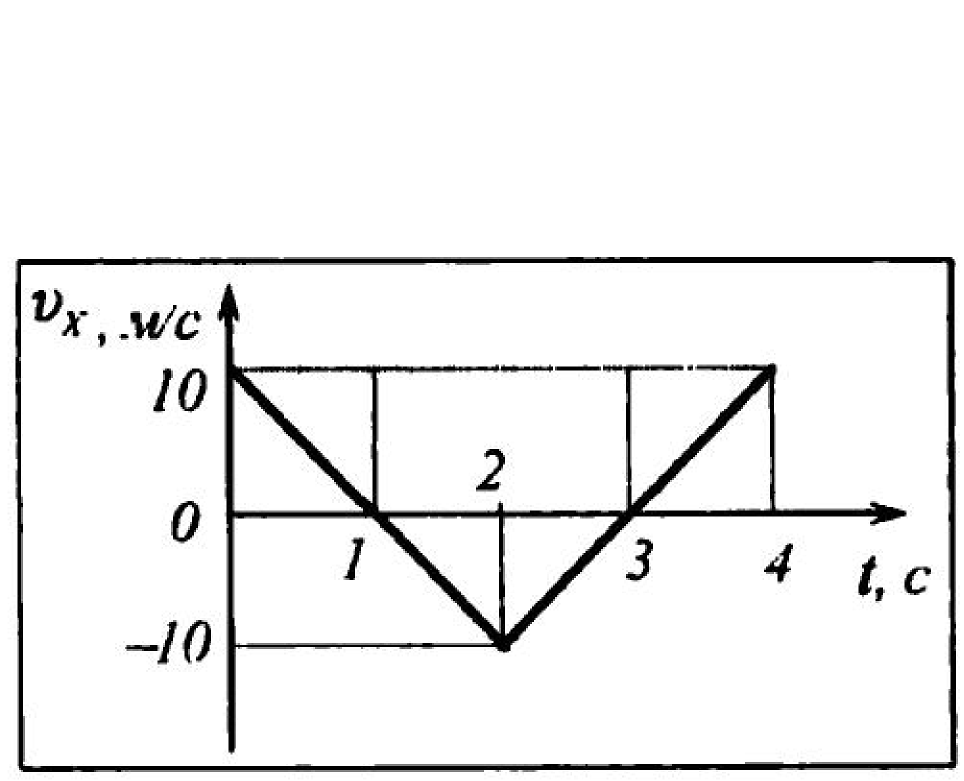


Падая, обе частицы, находятся в одной горизонтальной плоскости, на одной высоте, определяемой составляющей $v_y = gt$. Расстояние между частицами L определяется горизонтальными составляющими скоростей, т.е. начальными скоростями v_{01} и v_{02}, и временем падения частиц t до момента, когда скорость $\vec{v}_1$ станет перпендикулярной скорости $\vec{v}_2$. Время падения частиц находим из треугольников скоростей. Треугольник ABC – прямоугольный $v_{01} \cdot v_{02} = (gt)^2$, отсюда $t = \dfrac{\sqrt{v_{01} \cdot v_{02}}}{g}$ (1), $L = (v_{01} + v_{02})t$ (2).

Подставив (1) в (2), получим $L = \dfrac{(v_{01} + v_{02})\sqrt{v_{01} \cdot v_{02}}}{g} = \dfrac{(3+5)\sqrt{3 \cdot 5}}{9{,}8} \approx 3{,}2$ м.

Ответ: $\boxed{L = \dfrac{(v_{01} + v_{02})\sqrt{v_{01} \cdot v_{02}}}{g} \approx 3{,}2 \text{ м}}$

Ответ: $\boxed{F = 10 \text{ Н}}$.



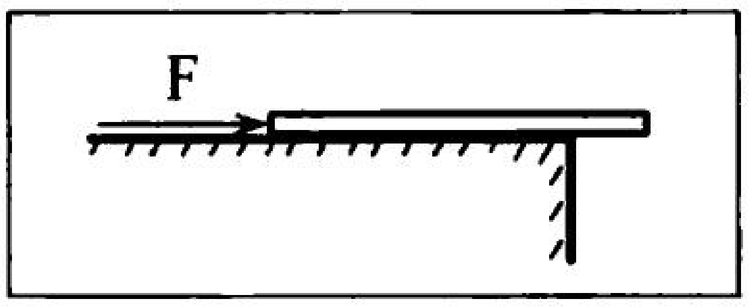
3. С вершины башни, высотой 125 м, бросили мяч в горизонтальном направлении со скоростью $v_0 = 20$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите модуль вектора перемещения мяча за четвертую секунду полёта.

Ответ: $\boxed{\Delta r = \sqrt{\Delta r_x^{\ 2} + \Delta r_y^{\ 2}} = 40{,}3\ \text{м}}$

4. Два тела, находящиеся на одной и той же высоте, брошены одновременно с одинаковыми скоростями $\upsilon_0 = 10$ м/с, одно вертикально вверх, а другое вертикально вниз. Определите τ – разницу во времени движения тел о момента падения их на землю.

Ответ: $\boxed{\tau = 2\frac{\upsilon_o}{g} \approx 2c}$

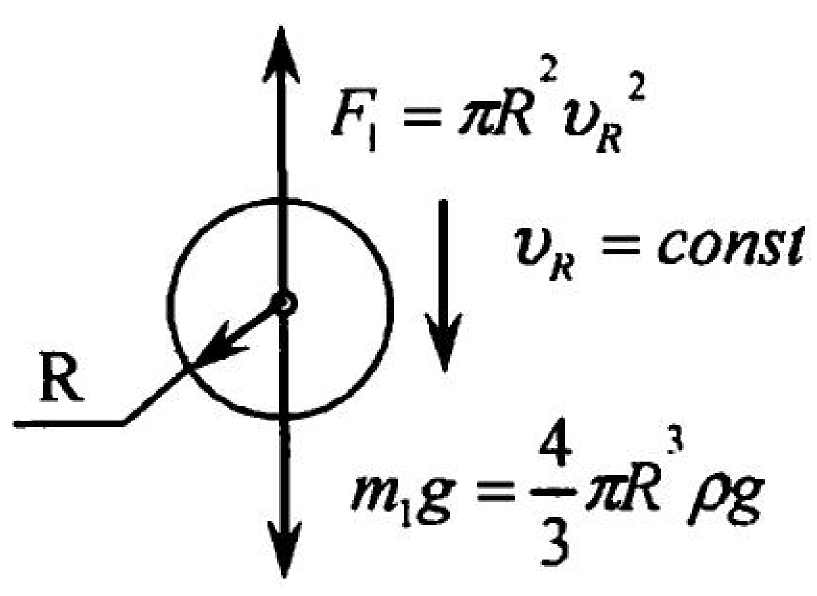
5. Четвёртая часть однородной линейки, имеющей массу m и длину L , выступает за край стола. Найдите минимальную величину силы F, которую необходимо приложить, чтобы сдвинуть линейку с места. Коэффициент трения между линейкой и столом равен μ .

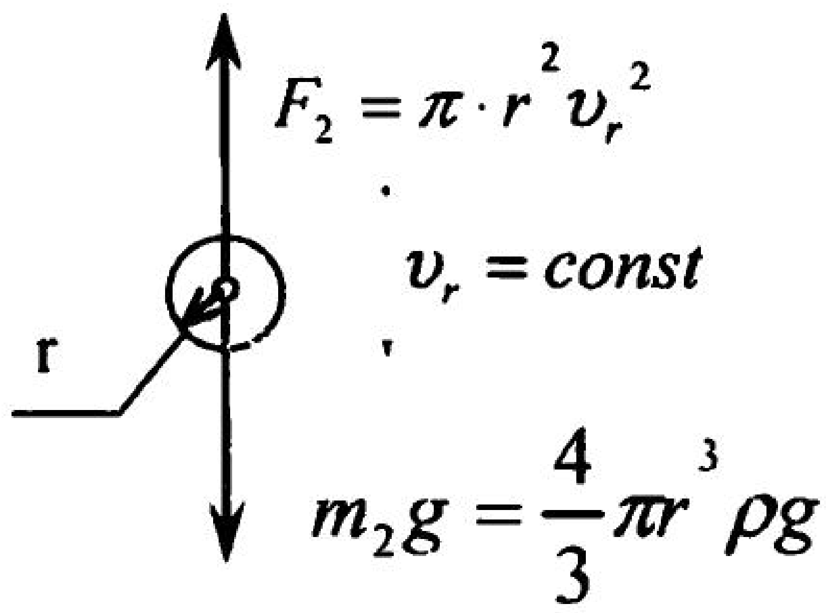


Ответ: $\boxed{F = \mu mg}$.

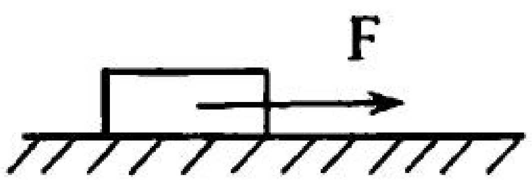
6. При падении тела с большой высоты в воздухе через некоторый промежуток времени его скорость становится постоянной. Учитывая, что сила лобового сопротивления прямо пропорциональна площади поперечного сечения тела и квадрату его скорости, определите отношение установившихся скоростей υ_R / υ_r двух шаров радиусами R и r. Шары изготовлены из одного и того же материала.

Ответ: $\boxed{\frac{\upsilon_R}{\upsilon_r} = \sqrt{\frac{R}{r}}}$.



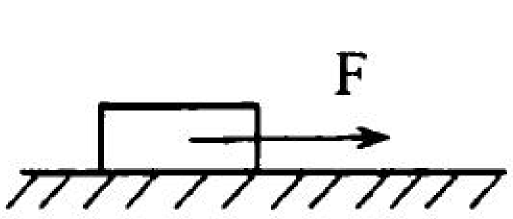


7. Тело движется по прямой. Под действием постоянной силы F = 4 Н за время $\Delta t = 2c$ импульс тела увеличился с p_1 до $p_2 = 20\frac{кг \cdot м}{c}$. Определите величину импульса p_1.



Ответ: $\boxed{p_1 = p_2 - F\Delta t = 20 - 4 \cdot 2 = 12\frac{кг \cdot м}{c}}$.

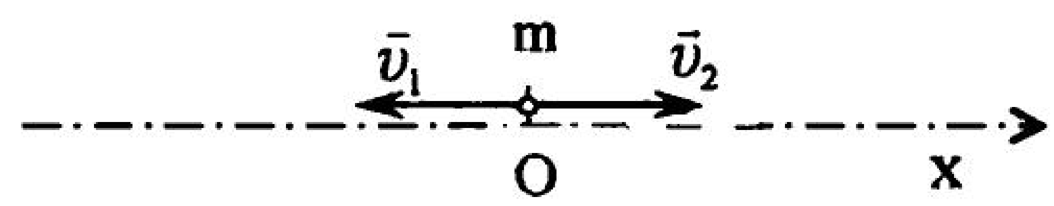
8. Тело движется по прямой. Начальный импульс тела $p_1 = 50\frac{кг \cdot м}{c}$. Определите импульс тела p_2 через $\Delta t = 2c$, если в течение этого времени на его действует постоянная сила трения F =10Н.



Ответ: $\boxed{p_2 = p_1 - F\Delta t = 50 - 10 \cdot 2 = 30\frac{кг \cdot м}{с}}$.

9. Движение материальной точки вдоль оси x описывается уравнением $x = 0{,}06\cos 0{,}5\pi t$ *м*. Масса точки m = 10 г. Найдите изменение импульса Δp_x материальной точки за интервал времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

Ответ: $\boxed{\Delta p_x = m(\upsilon_{2x} - \upsilon_{1x}) = 1{,}88 \cdot 10^{-3}\frac{кгм}{с}}$.



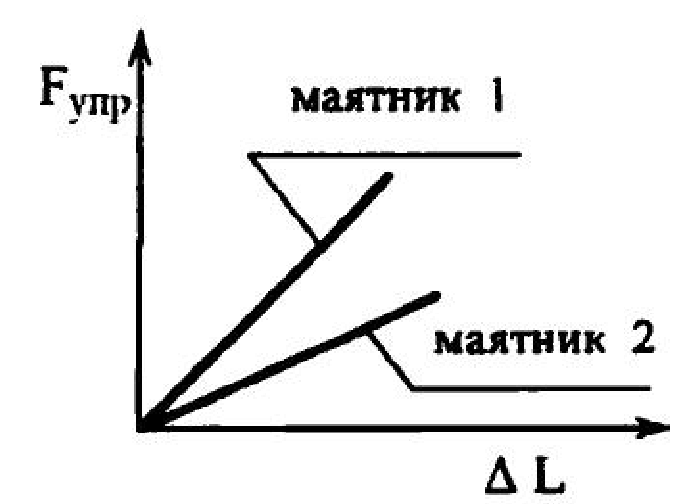
10. В вершинах квадрата расположены равные точечные положительные заряды. Определите напряженность электрического поля в центре квадрата.

Ответ: $\boxed{E = 0}$.

11. Диэлектрическая проницаемость воды ε = 81. Как нужно изменить расстояние между двумя точечными зарядами, чтобы при погружении их в воду, сила взаимодействия между ними была такой же, как первоначально в вакууме?

Ответ: $\boxed{\frac{q^2}{r_1^2} = \frac{q^2}{\varepsilon \cdot r_2^2}}$ Уменьшить в 9 раз.

12. Два пружинных маятника имеют одинаковые массы грузов. На графике показана зависимость сил упругости пружин $F_{упр.}$ этих маятников от растяжения ΔL. Период колебаний какого маятника будет больше? Объясните, почему.

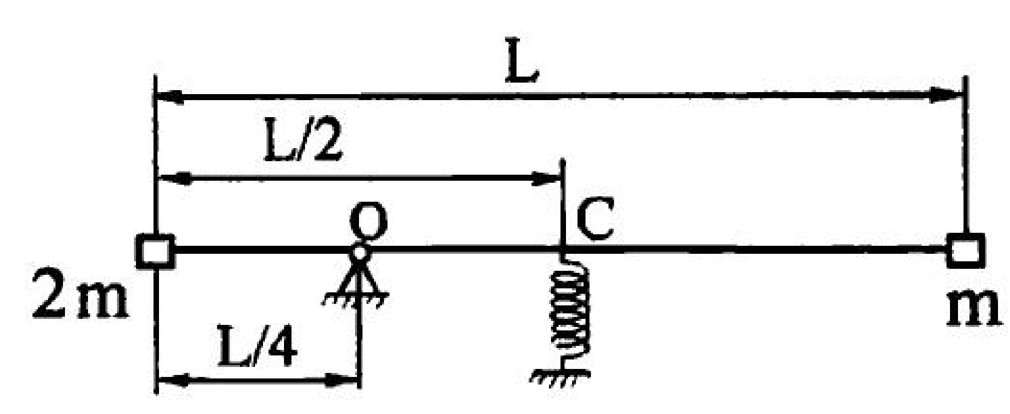


Решение.

Из закона Гука следует, что $F_{упр} = k\Delta L$, из графика следует, что $k_1 > k_2$, а так как период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, то $T_2 > T_1$.

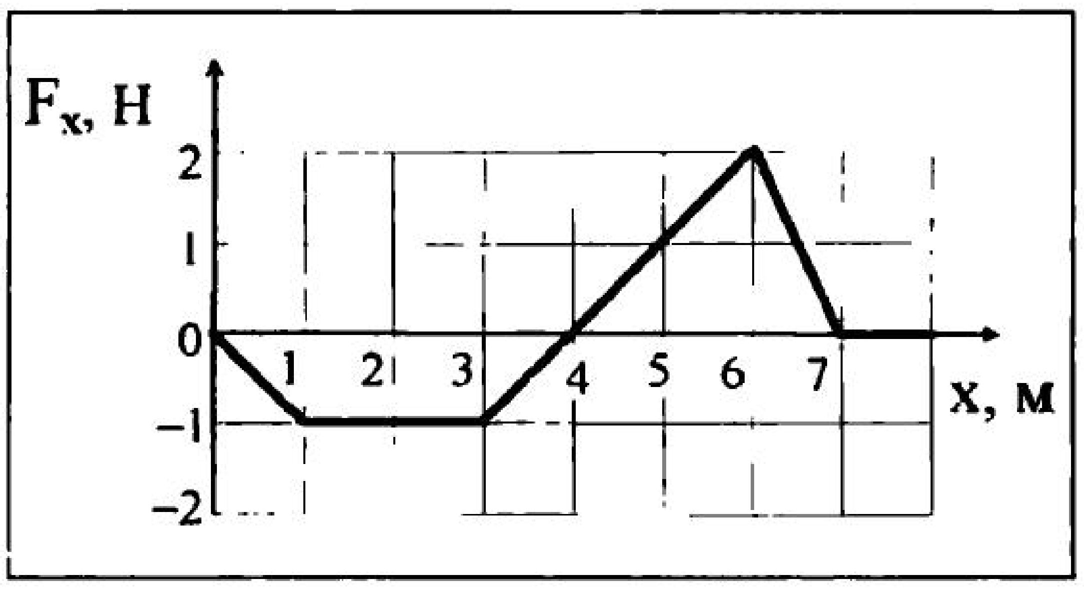
Ответ: $\boxed{T_2 > T_1}$

13. Однородный стержень длины L и массы m шарнирно закреплён в точке O, отстоящей на L/4 от конца стержня. Середина стержня точка C прикреплена к пружине. На концах стержня закреплены два маленьких груза массами 2m и m, как показано на рисунке. Найдите силу упругости, возникающую в пружине в положении равновесия стержня, когда он неподвижен и расположен горизонтально. Массой пружины и силами трения пренебречь.



Ответ: $\boxed{T = 2mg}$.

14. В процессе поступательного движения тела вдоль оси x на него действует сила F, зависимость проекции которой от координаты x представлена на графике. Определите работу, совершаемую силой при перемещении тела от координаты x = 0 до x = 5 м.



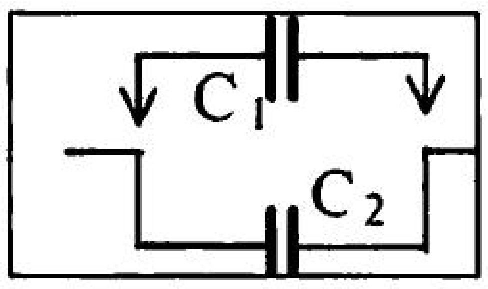
Решение.

Работа численно равна площади фигуры, образованной графиком и осью x.. При этом площадь фигуры над осью x берётся со знаком плюс (она соответствует положительной работе), а площадь фигуры под осью x– со знаком минус (она соответствует отрицательной работе).

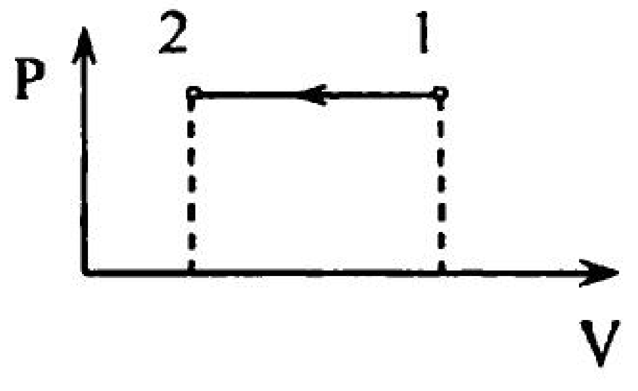
Ответ: $\boxed{A = -2{,}5\ Дж}$.

15.. Конденсатор емкости C_1 зарядили до напряжения U_1 = 500 В. При параллельном подключении этого конденсатора к незаряженному конденсатору емкости C_2 = 4 мкФ вольтметр, подключенный к батарее конденсаторов показал напряжение U_2 = 100 В. Найдите ёмкость C_1

Ответ: $\boxed{C_1 = \frac{C_2 \cdot U_2}{U_1 - U_2} = 1\ мкФ}$.



16. Найдите работу A, которую необходимо совершить над одним молем идеального газа для его изобарного сжатия, при котором концентрация молекул в конечном состоянии в α = 2 раз больше, чем в начальном? Первоначальная температура газа T_1 = 300 К.



Ответ: $\boxed{A = \nu R T_1 \frac{\alpha - 1}{\alpha} = 1246\ Дж}$.

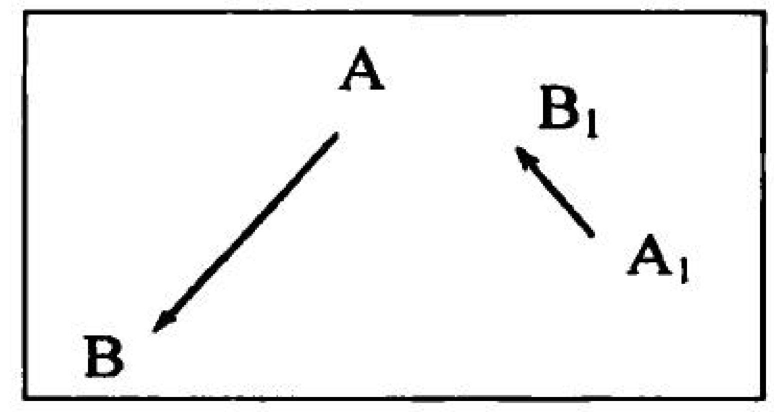
17. Внутренняя энергия U некоторой массы одноатомного газа при температуре t = 27°С равна 1,0 Дж. Сколько молекул N содержит эта масса газа?

Ответ: $\boxed{N = \frac{m}{\mu} \cdot N_A = \frac{2}{3}\frac{UN_A}{RT} = 1{,}6 \cdot 10^{20}}$.

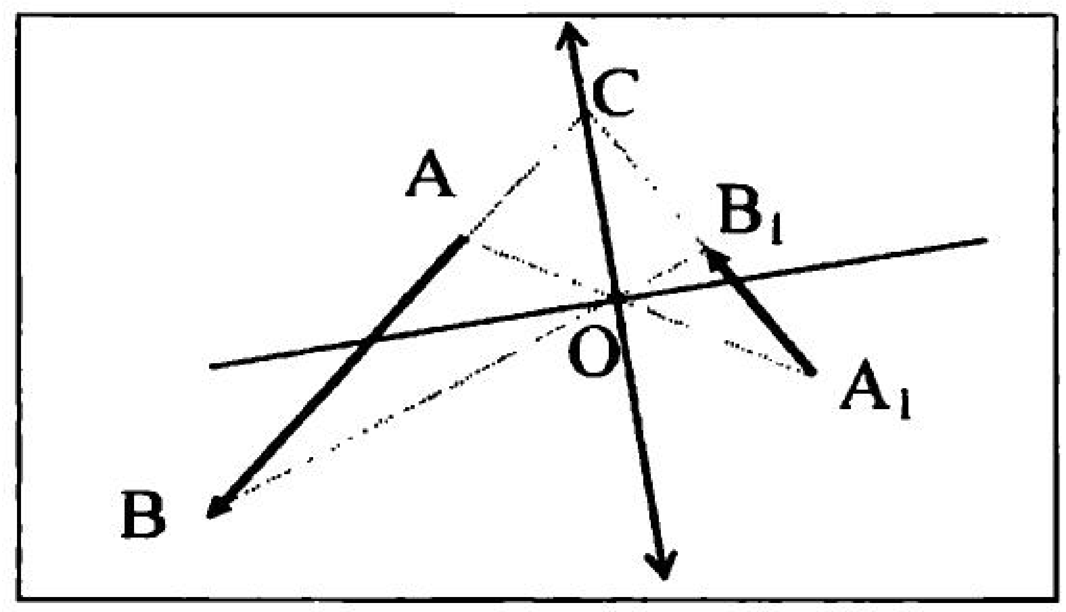
18. Сосуд объема V = 40 дм^3 разделен тонкой подвижной перегородкой на две части. В левую часть помещены 36 граммов воды, а в правую – 28 граммов азота (N_2). Температура поддерживается равной t = 100°С. Определите объём правой части сосуда.

Ответ: $\boxed{V_A = \frac{m_A}{\mu_A} \cdot \frac{RT}{P_o} = 31 \cdot 10^{-3}\ м^3}$.

19. На рисунке показаны предмет AB и его изображение A_1B_1, полученное с помощью линзы. Определите построением положение линзы и её главной оптической оси.



Ответ: Луч, выходящий из любой точки предмета, после преломления в линзе, проходит через соответствующую точку действительного изображения этого предмета. Но, так как лучи, проходящие через оптический центр линзы, не меняют своего направления, то для нахождения положения оптического центра линзы, соединим прямыми линиями точки A , A_1 и B, B_1 Полученная на их пересечении точка O является оптическим центром линзы. Для определения положения линзы кроме положения оптического центра, необходима ещё одна точка, принадлежащая линзе. Для её нахождения воспользуемся тем, что луч, идущий вдоль прямой AB, преломляясь в линзе, проходит вдоль прямой A_1 B_1. Таким образом, точка C, в которой происходит преломление луча, является второй точкой, принадлежащей линзе.



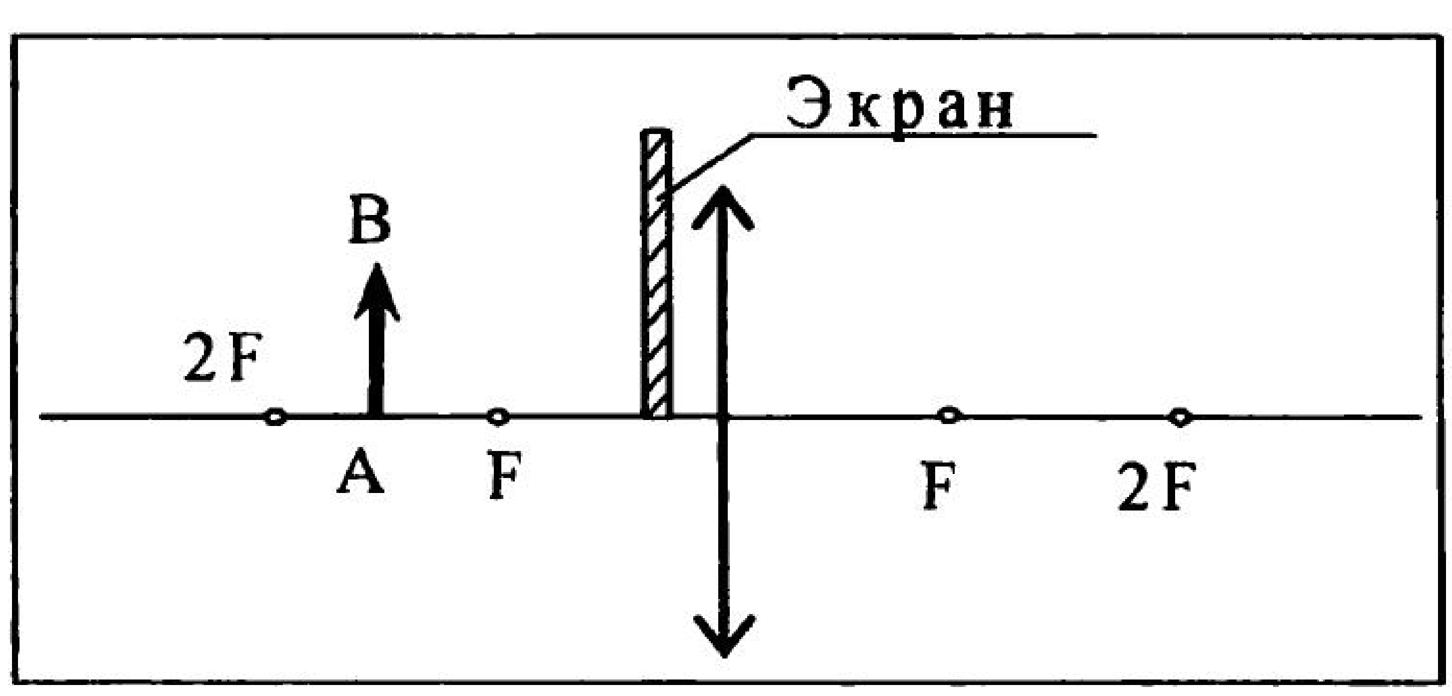
20. Максимальная кинетическая энергия материальной точки массы m = 10 г, совершающей гармонические колебания с периодом T = 2 с, равна $W = 1\cdot 10^{-4}$ Дж. Определите амплитуду A колебаний этой точки.

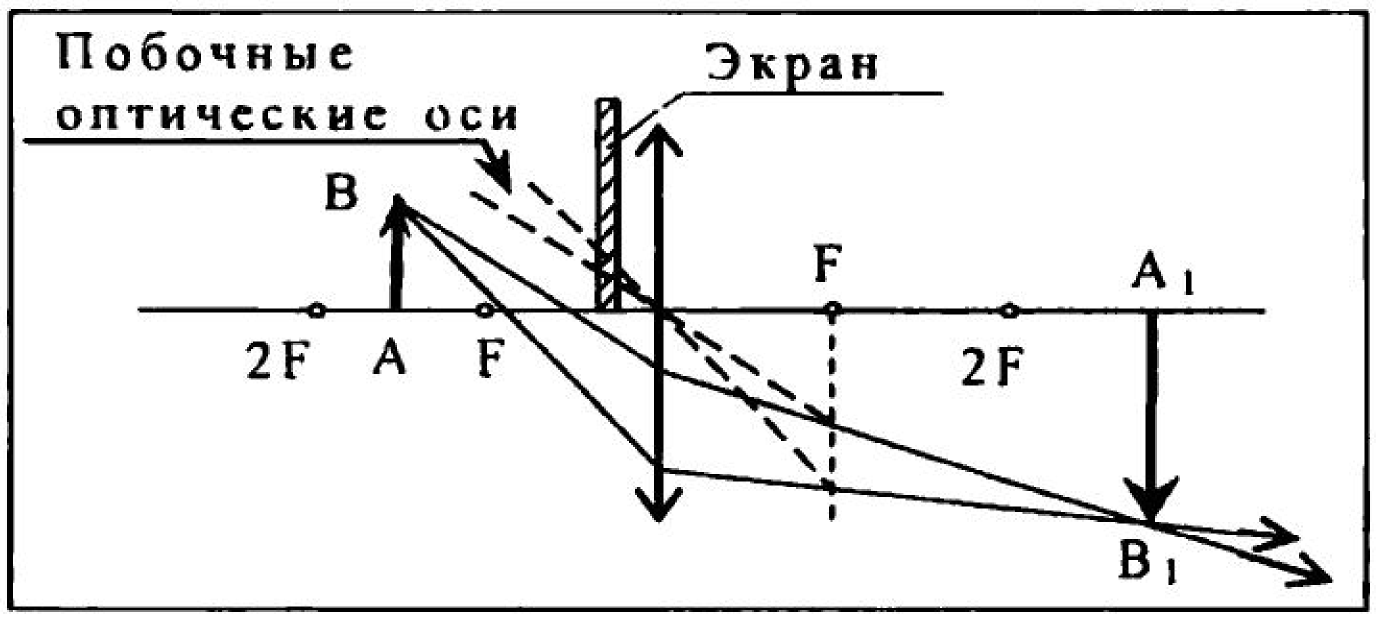
Ответ: $\boxed{A = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2W_{max}}{m}} = 4{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{м}}$.

21. Предмет расположен на расстоянии 0,15 м от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием 0,3 м. На каком расстоянии от линзы получается изображение данного предмета?

Ответ: $\boxed{f = \frac{Fd}{F+d} = 0{,}1\ \text{м}}$.

22. Постройте изображение предмета AB в собирающей линзе, верхняя половина которой закрыта непрозрачным экраном. Для построения используйте только те лучи, которые непосредственно попадают на линзу.

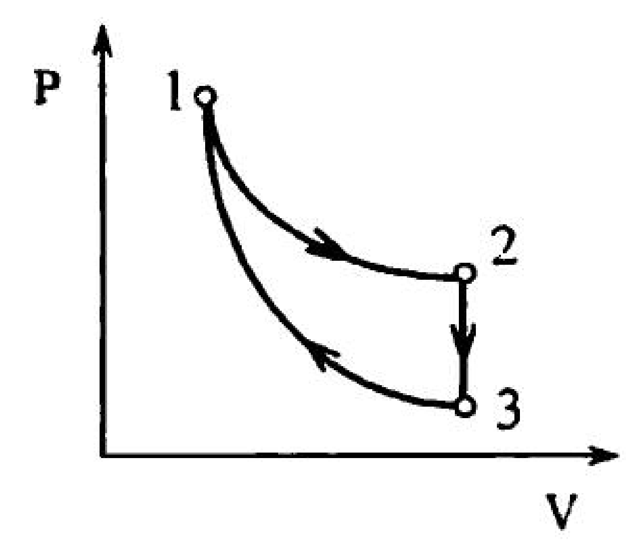


Ответ: 

23. Определите изменение внутренней энергии 2 г водорода при нагревании его при постоянном давлении на ΔT = 10 K, если газу сообщено количество теплоты Q = 291 Дж. Молярная масса водорода μ = 0,002 кг/моль.

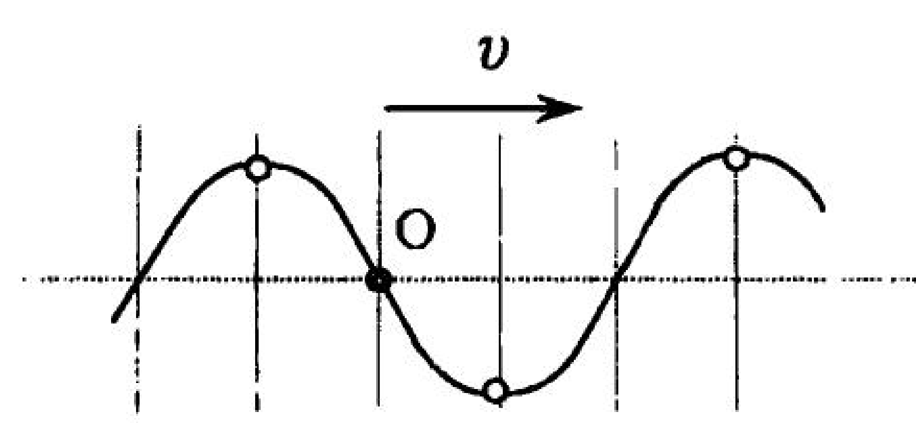
Ответ: $\boxed{\Delta U = Q - \frac{m}{\mu} R\Delta T = 207{,}9 \text{ Дж}}$.

24. На рисунке показан цикл тепловой машины, состоящий из изотермического расширения 1–2, изохорического процесса 2–3 и адиабатного сжатия 3–1. Напишите уравнение первого начала термодинамики для процесса 1–2.



Ответ: $\boxed{Q = A}$.

25. По струне слева направо бежит поперечная гармоническая волна со скоростью v = 40 м/с. Длина волны λ = 60 см, амплитуда A = 2 мм. Найдите скорость v_o точки O струны в момент времени, соответствующий рисунку.



Ответ: $\boxed{v_o = A\omega = \frac{2\pi A v}{\lambda} = 0{,}94 \ \text{м/с}}$.

26. В идеальном электрическом колебательном контуре емкость конденсатора равна 1 мкФ, а индуктивность катушки 1 Гн. Чему равна амплитуда напряжения на конденсаторе для незатухающих свободных колебаний, если амплитуда тока в контуре составляет 100 мА

Ответ: $\frac{CU^2}{2} = \frac{LI^2}{2}$, откуда $\boxed{U = I\sqrt{\frac{L}{C}} = 100 B}$.

27. Два маленьких одинаковых металлических шарика, заряженных разноименными зарядами +5q и –q, расположены на расстоянии L друг от друга. Шарики привели в соприкосновение и раздвинули на прежнее расстояние. Найдите отношение модулей сил взаимодействия между шариками до соприкосновения и после того, как их раздвинули.

Ответ: $F_1 \approx 5q^2$; $F_2 \approx 4q^2$; откуда $\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{5}{4}}$.

28. При фотоэффекте максимальный импульс, передаваемый поверхности вольфрамовой пластинки при вылете каждого электрона $p = 3{,}45 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с. Найдите энергию ε квантов применяемого облучения. Работа выхода вольфрама $A = 4{,}5$ эВ.

Ответ: $\boxed{\varepsilon = \mathrm{h}\nu = A + \frac{p^2}{2m} = 7{,}85 \cdot 10^{-19}\ Дж}$.

29. Допишите ядерную реакцию ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + ? \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$.

Ответ: $\boxed{{}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}}$.

30. Определите энергию γ - кванта, если соответствующая ему длина волны $\lambda = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ м.

Ответ: $\boxed{\varepsilon = \mathrm{h}\nu = \frac{hc}{\lambda} = 12{,}4 \cdot 10^{-14}\ Дж}$.

ЗАДАЧИ ВТОРОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ — задачи, в которых рассматриваются явления, обычно также относящиеся к одному разделу физики. Но для их решения кроме знаний основных законов физики требуется отыскать алгоритм решения задачи: выявить физическое явление, присутствующее в задаче, адекватное определенному закону физики, математически описать рассматриваемое в задаче явление, т.е. составить уравнение или систему уравнений и решить их. При этом особое внимание обращается на понимание абитуриентом векторного характера ряда величин, входящих в формулы, когда для полного определения этих величин необходимо учитывать не только их числовое значение, но и направление.

При этом при решении задач на кинематику оцениваются:

- умение абитуриента графически представить зависимость кинематических параметров движения от времени;

• способность найти все силы, вызывающие движение тел в конкретных условиях, умение заменить действие нескольких сил их равнодействующей;

• рациональность выбора системы координат, обеспечивающей наиболее простой вид системы уравнений, приводящей к решению задачи.

При решении задач на динамику обращается внимание

• на влияние начальных условий на характер движения тел,

• на различное воздействие на характер движения тел сил трения покоя и сил трения скольжения,

• на определение направления полного ускорения и равнодействующей силы при неравномерном движении тела по окружности и т. д.

При решении задач второго уровня сложности встречаются случаи, когда абитуриенты допускают непонимание и неточности, приводящие к снижению балла, получаемого за эту задачу, например:

• При решении задач из раздела «статика» многие абитуриенты забывают второе условие равновесия твердого тела – условие равенства нулю суммарного момента внешних сил.

• Незнание выражения теплоемкости одноатомного идеального газа при постоянном объеме и постоянном давлении вызывает трудности при решении термодинамических задач.

• Недостаточно глубокое понимание физического содержания закона электромагнитной индукции Фарадея вызывает большие трудности при решении задач на его практическое применение.

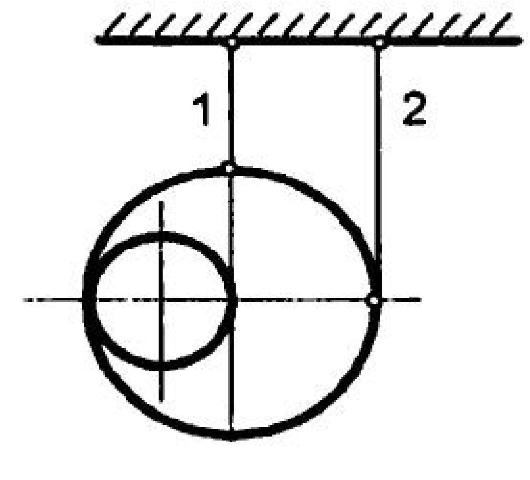
• При расчете цепей, содержащих электродвигатель, не учитывается ЭДС индукции, возникающей при вращении якоря электромотора.

• Много ошибок встречается при решении задач на применение формулы рассеивающей линзы и при построении изображений в таких линзах.

• Особую сложность вызывают задачи на построение изображений в оптических системах, состоящих из нескольких линз и зеркал.

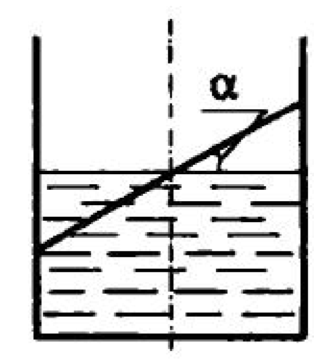
Задачи второго уровня сложности позволяют выявить способность абитуриента осознанно применять физические законы к описываемому в задаче явлению, а также умение использовать для решения физических задач математический аппарат: составлить алгебраические уравнения, связывающие физические величины, которые характеризуют рассматриваемое явление с количественной стороны.

3.4. Примеры задач второго уровня сложности:

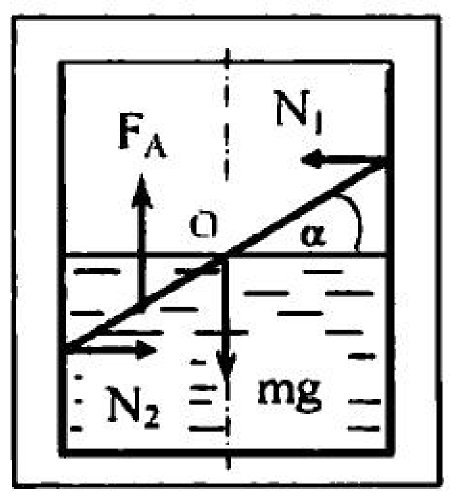


1. В сплошной однородной тонкой пластине, имеющей форму круга радиуса R и первоначальную массу M, вырезали отверстие вдвое меньшего радиуса, касающееся края пластины. Пластину подвесили на двух невесомых нитях 1 и 2, как показано на рисунке. Определите силу натяжения нити 2 .

Ответ: $\boxed{T_2 = \frac{1}{8} Mg}$.

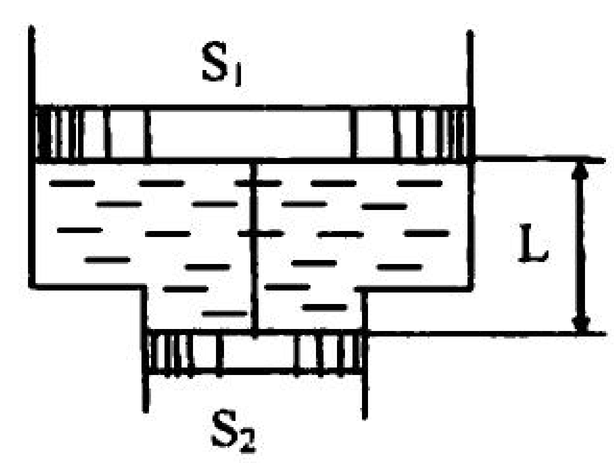


2. Однородная палочка массы m наполовину погружена в воду, как показано на рисунке. Угол наклона палочки к горизонту α. С какой силой давит на стенку цилиндрического сосуда верхний конец палочки? Трением пренебречь.



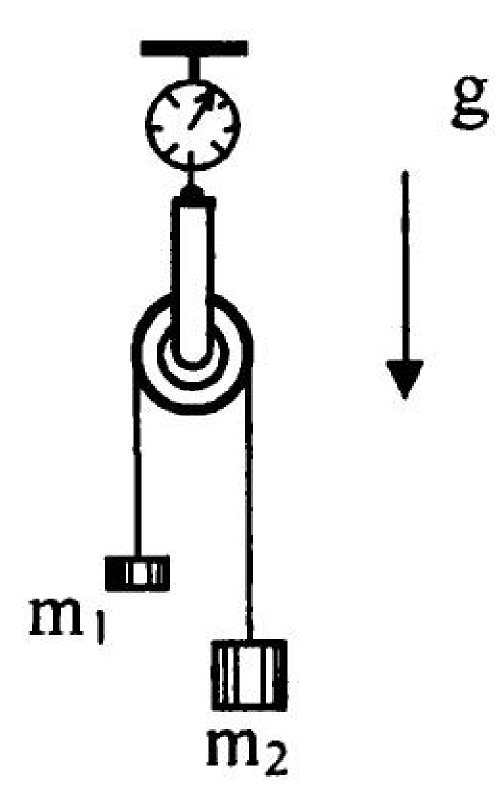
Ответ: $\boxed{N = \frac{1}{4} mgctg\alpha}$.

3. В вертикально расположенном сосуде с сечениями S_1 и S_2 находятся два невесомых поршня. Поршни соединены тонкой проволокой длины L. Найдите силу натяжения проволоки T, если пространство между поршнями заполнено водой. Трением пренебречь. Концы сосуда открыты в атмосферу. Плотность воды равна ρ.



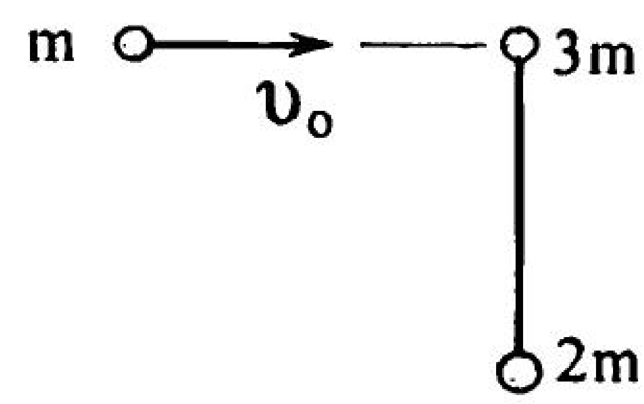
Ответ: $\boxed{T = \rho g L \frac{S_1 S_2}{S_1 - S_2}}$.

4. Через блок, подвешенный к динамометру, перекинут невесомый нерастяжимый шнур, на концах которого укреплены грузы массы $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 8$ кг. Чему равно показание динамометра при движении грузов? Массой блока и силами трения пренебречь.

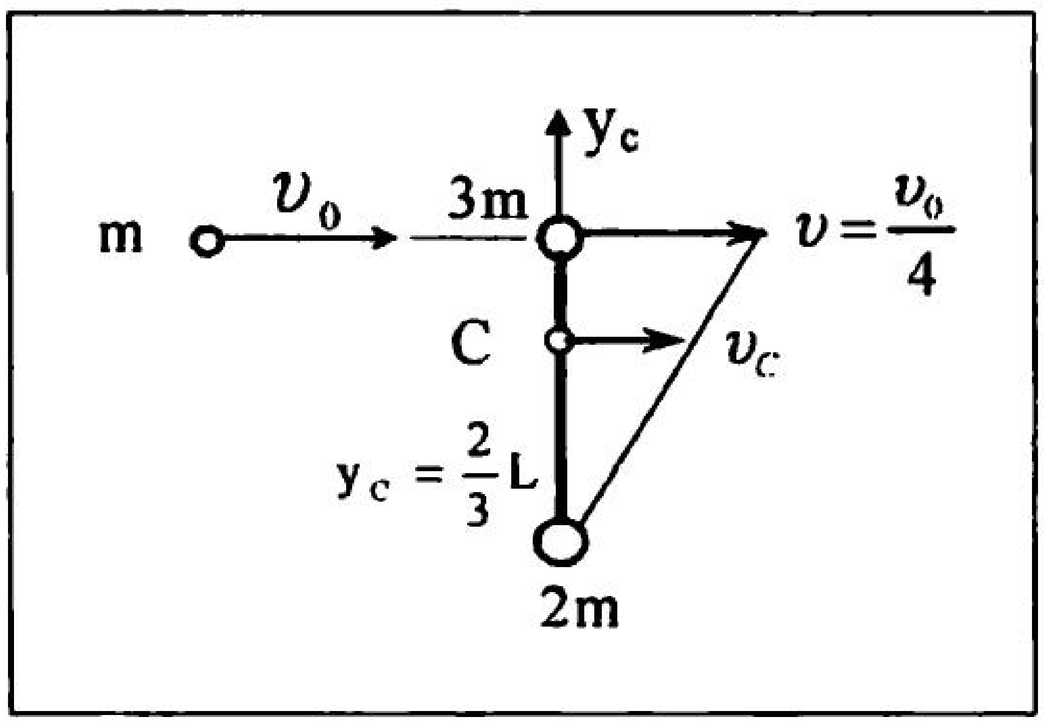


Ответ: $\boxed{F = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = 62{,}7 \ H}$.

5. На гладком горизонтальном столе покоятся два маленьких шарика массами 3m и 2m, скрепленных невесомым жестким стержнем длины L. На шарик массой 3m налетает и прилипает к нему кусочек пластилина массы m, двигавшийся вдоль стола со скоростью перпендикулярно стержню. υ_0 Определите силу упругости, возникающую в стержне, при дальнейшем движении шариков.



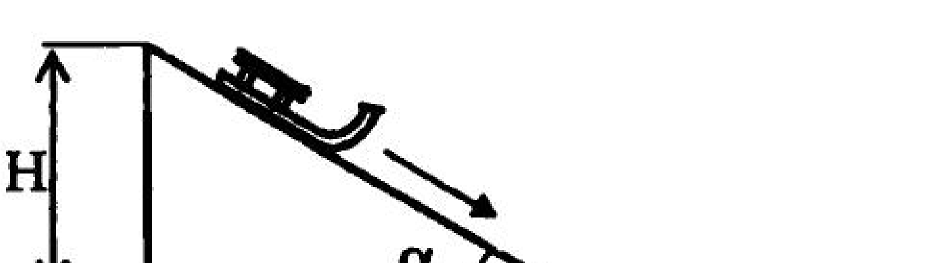
Ответ: $\boxed{T = \dfrac{m\upsilon_o^2}{12L}}$.



6. Бетонная однородная свая массы m лежит на дне водоема глубиной h, большей, чем длина сваи L. Привязав трос к одному концу сваи, её медленно вытаскивают из воды так, что центр тяжести сваи поднимается на высоту H над поверхностью воды (H > L). Какую работу нужно совершить при подъеме сваи? Плотность бетона в n раз больше плотности воды. Силами сопротивления пренебречь.

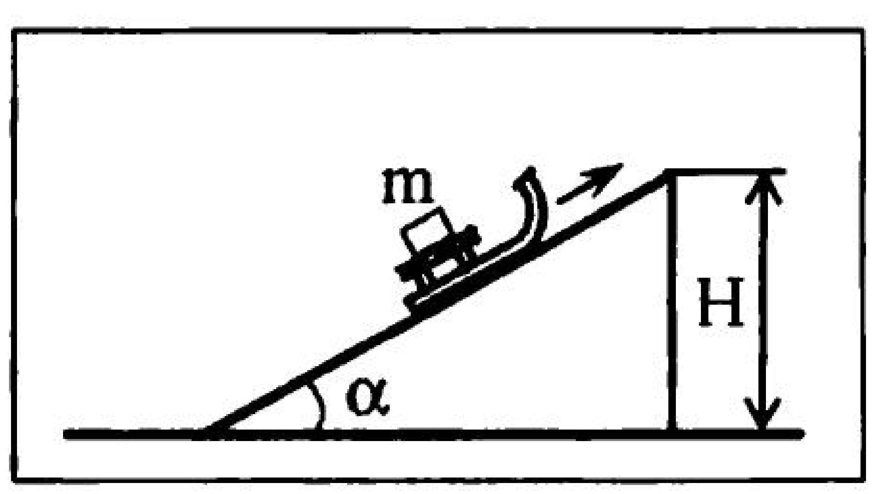
Ответ: $\boxed{A = mg\left[H + h\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right]}$.

7. Санки съезжают с горы, имеющей высоту H и угол наклона α, и движутся далее по горизонтальному участку. Коэффициент трения на всем пути одинаков и равен k. Определите расстояние S, которое пройдут санки, двигаясь по горизонтальному участку, до полной остановки.



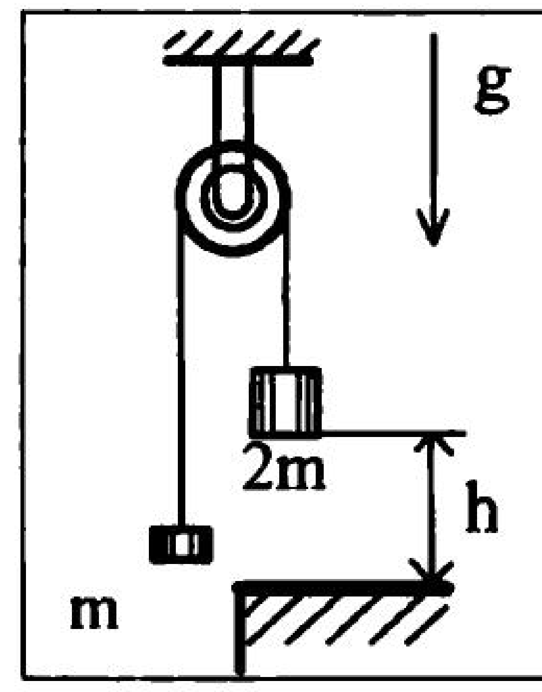
Ответ: $\boxed{S = \dfrac{H(1 - \mu \operatorname{ctg}\alpha)}{\mu}}$.

8. Какую работу надо совершить, чтобы втащить сани с грузом (общей массы m = 30 кг) на гору высоты H = 10 м? Угол наклона горы α = 30°. Коэффициент трения между санями и горой линейно убывает вдоль пути от $k_1 = 0{,}5$ у подножия до $k_2 = 0{,}1$ у вершины. Скорость тела в конце подъема равна нулю.



Ответ: $\boxed{A = mgH\left(1 + \frac{k_1 + k_2}{2}\,\mathrm{ctg}\alpha\right) = 4{,}5 \cdot 10^3\ \text{Дж}}$.

9. Два груза, массы которых 2m и m, связаны невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок. В начальный момент груз массы 2m удерживают на высоте h над столом. Затем его без толчка отпускают. Какое количество теплоты выделится при ударе этого груза о стол? Удар абсолютно неупругий. Массой блока и силами трения в блоке пренебречь.

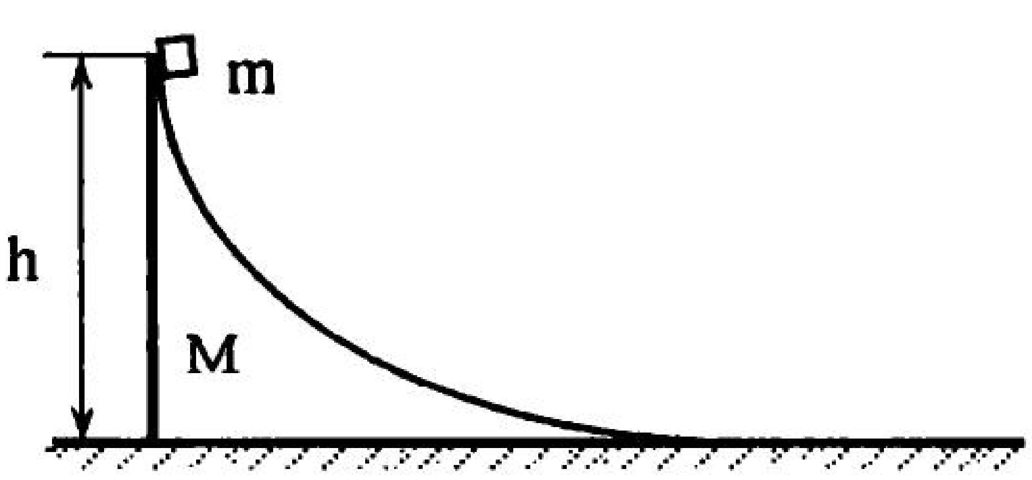


Ответ: $\boxed{Q = \frac{2}{3}mgh}$.

10. В сосуде имеются две несмешивающиеся жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2; толщины слоев этих жидкостей равны d_1 и d_2 соответственно. С поверхности жидкости в сосуд опускают маленькое обтекаемое тело, которое достигает дна как раз в тот момент, когда его скорость становится равной нулю. Найдите плотность материала, из которого сделано тело. Силами вязкого трения пренебречь.

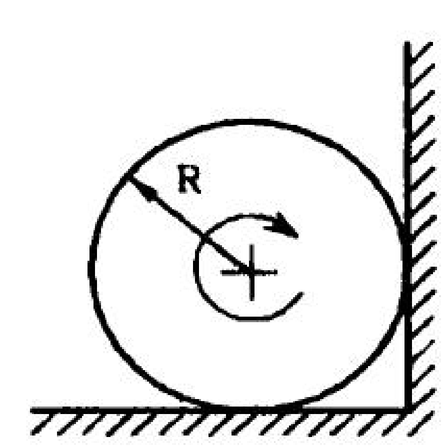
Ответ: $\boxed{\rho = \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}{d_1 + d_2}}$.

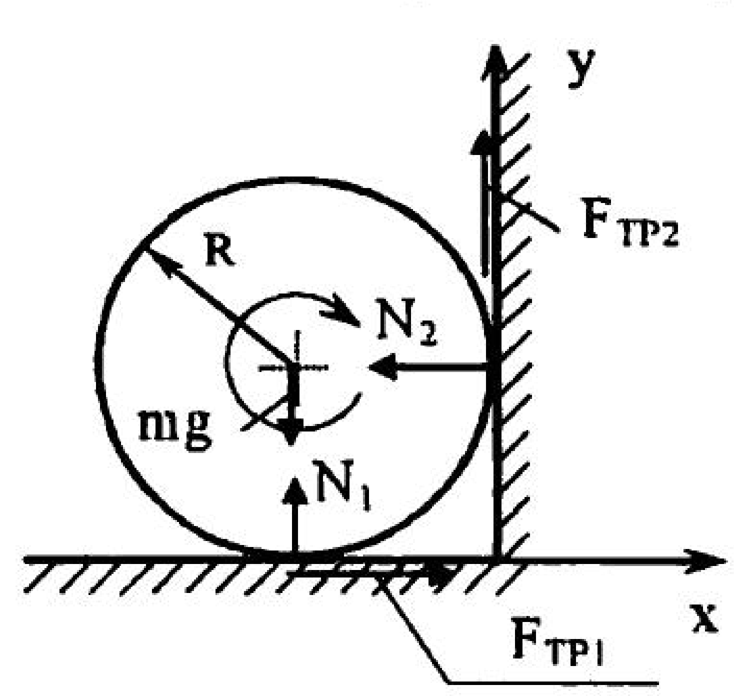
11. На гладком горизонтальном столе покоится «горка», угол наклона которой плавно изменяется от некоторого значения до нуля. С вершины «горки» соскальзывает без трения небольшое тело массы m. Найдите скорость тела относительно горки после соскальзывания, если высота «горки» h, масса M? Трением между горкой и столом пренебречь.



Ответ: $\boxed{\upsilon_{\text{отн}} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{m}{M}}}}$.

12. Тонкостенный цилиндр массы m и радиуса R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω и поместили затем в угол. Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен μ. Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки.



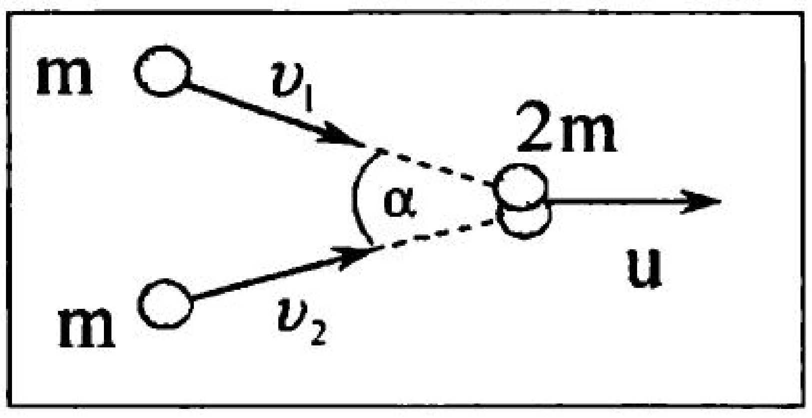


Ответ: $\boxed{n = \frac{\omega^2 R}{4\pi g} \cdot \frac{(1 + \mu^2)}{\mu(1 + \mu)}}$.

13. Горизонтальная платформа совершает гармонические колебания в вертикальном направлении вместе с лежащим на ней грузом. Силы, с которыми груз давит на платформу в крайних нижнем и верхнем положениях, отличаются в n = 2 раза. Найдите частоту колебаний, если их амплитуда составляет A = 6,8 см. Принять g =10 м/с^2.

Ответ: $\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}\cdot\frac{n-1}{n+1}} = 1{,}1\ \text{Гц}}$.

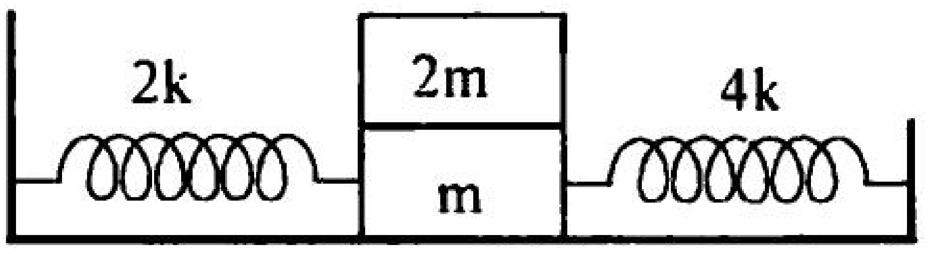
14. Два одинаковых пластилиновых шара, движущихся с равными по величине скоростями, совершают неупругий удар, после которого слипаются в одно целое. Какой угол α составляли друг с другом векторы скоростей шаров до удара, если при ударе половина начальной кинетической энергии шаров перешла в тепло?



Ответ: $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$.

15. Человек, находящийся в лодке, переходит с носа на корму. На какое расстояние S переместится лодка длиной L = 3 м, если масса человека m = 60 кг, а масса лодки M =120 кг ? Сопротивление воды не учитывать.

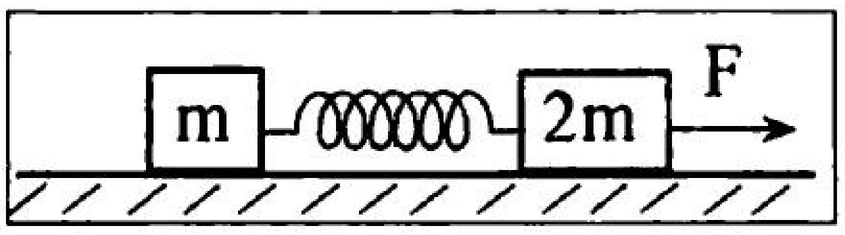
Ответ: $\boxed{S = -\frac{l\cdot m}{M+m} = -1\text{м}}$.



16. Определите максимальную амплитуду гармонических колебаний системы, состоящей из двух брусков и двух невесомых пружин, при которой бруски будут совершать колебания по горизонтальной плоскости без проскальзывания относительно друг друга. Жесткость пружин 2k и 4k. Масса нижнего бруска m, верхнего – 2m, коэффициент трения между брусками равен μ.. В положении равновесия пружины не деформированы. Трение между нижним бруском и плоскостью отсутствует.

Ответ: $\boxed{A = \frac{\mu mg}{2k}}$.

17. На горизонтальной плоскости лежат два бруска массы m и 2m, соединенные ненапряженной пружиной. Какую наименьшую постоянную силу F, направленную горизонтально, нужно приложить к бруску массы 2m, чтобы сдвинулся и второй брусок? Коэффициент трения брусков о плоскость равен μ.



Решение.

Если брусок массы m остается неподвижным при смещении на x бруска массы 2m, то сила F совершает работу по растяжению пружины и против сил трения (при условии, что в конечный момент скорость бруска массы 2m обращается в нуль):

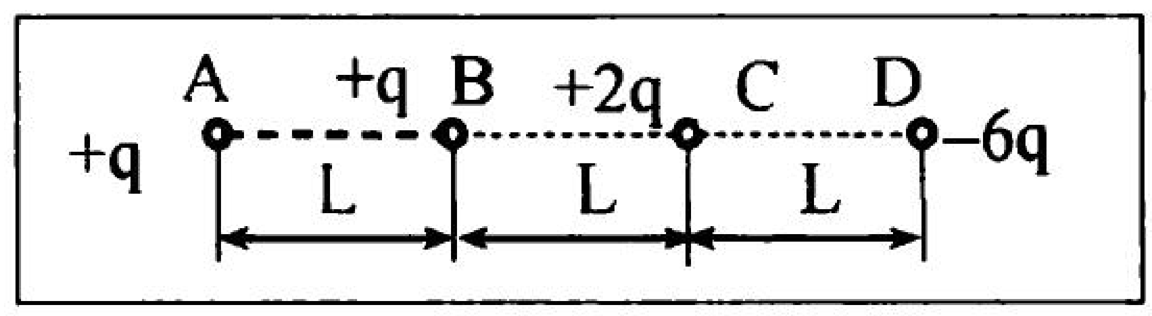
$Fx = \frac{kx^2}{2} + \mu \cdot 2mgx$. (1) т.е. $F = \frac{kx}{2} + \mu \cdot 2mg$. (2)

Условие начала скольжения бруска массы m: $kx = \mu mg$. (3)

Таким образом, подставив (3) в (2), найдем $F_{min} = \frac{\mu m g}{2} + \mu 2mg = \frac{5}{2}\mu mg$.

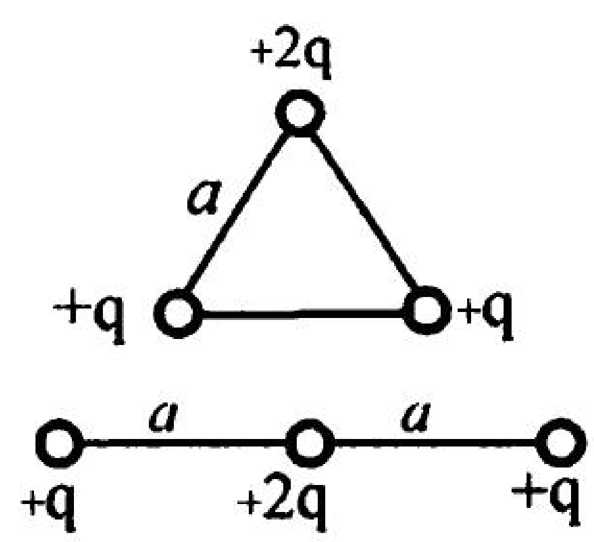
Ответ: $\boxed{F_{min} = \frac{5}{2}\mu mg}$.

18. В точках A, B, C, D расположены неподвижные точечные заряды +q, +q, +2q, $-6q$, как показано на рисунке. Определите работу, которую необходимо совершить для перемещения заряда +q из точки B в бесконечность, где потенциал электрического поля принимается равным нулю.



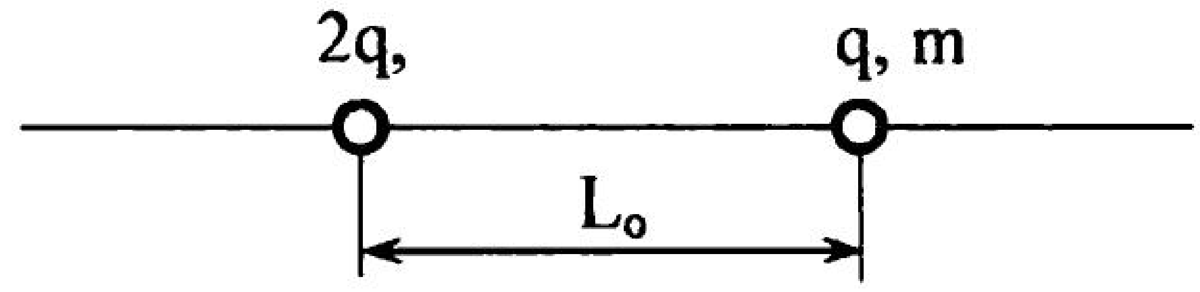
Ответ: $\boxed{A = 0}$.

19. Три положительных точечных заряда +q, +2q и +q, связанных между собой нитями, расположены в вершинах правильного треугольника со стороной *a*. После разрыва одной из нитей заряды расположились вдоль одной прямой, как показано на рисунке. Найдите работу сил электрического поля, необходимую для перестройки системы расположения зарядов.



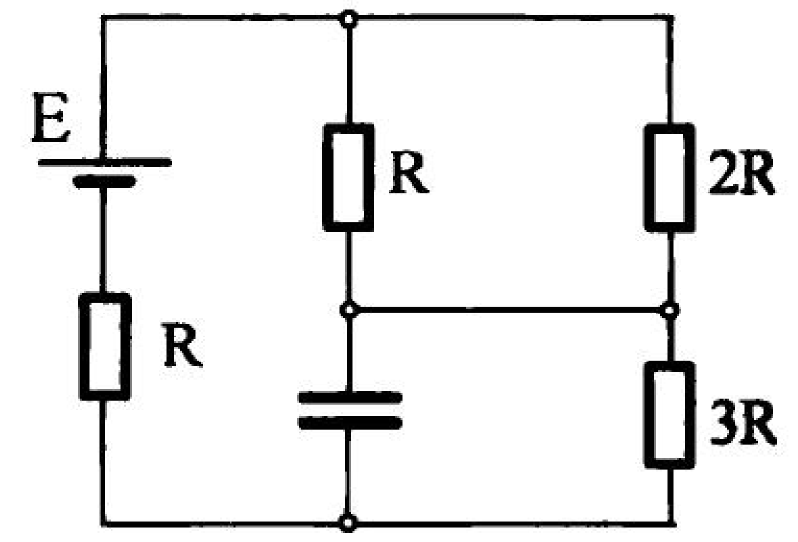
Ответ: $\boxed{A = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o a}}$.

20. Две бусинки, имеющие заряды +2q и +q, удерживаются на длинном горизонтальном изолирующем стержне на расстоянии L_o друг от друга. Бусинку, имеющую заряд +q и массу m отпускают, и она начинает скользить по стержню. Коэффициент трения скольжения равен μ. Найдите максимальное расстояние L между бусинками.



Ответ: $\boxed{L = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon\mu\, mgL_o}}$.

21. В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, ЭДС источника тока E = 42 В. Считая параметры элементов схемы известными, найдите установившееся напряжение U между обкладками конденсатора. Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.



Ответ: $\boxed{U = \dfrac{E \cdot 3R}{R_{\Sigma}} = \dfrac{42 \cdot 3R \cdot 3}{14R} = 27B}$.

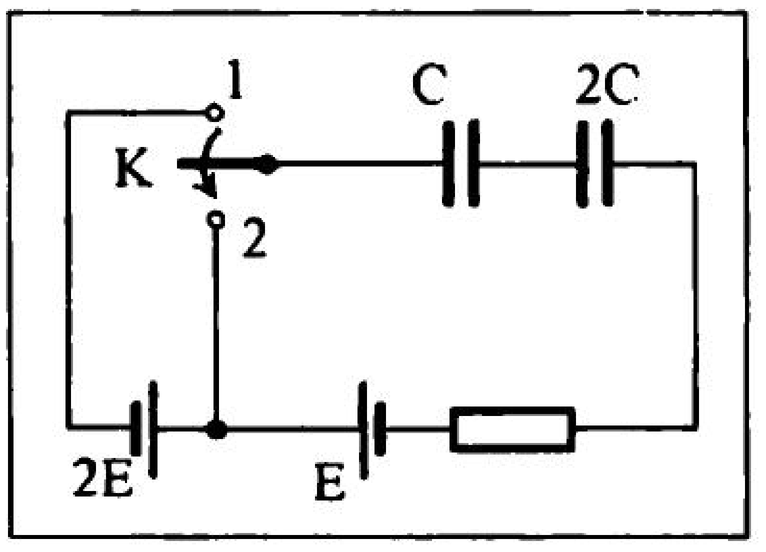
22. Определите массу меди, выделившейся из раствора Cu SO_4 за время t = 100 с, если ток, протекавший через электролит, менялся по закону I = (5 – 0,02 t) А, где t – время в секундах. Валентность меди n = 2.

Ответ: $\boxed{\mathrm{m} = \dfrac{\mu}{\mathrm{F} \cdot n}\mathrm{q} = \dfrac{0{,}064}{9{,}65 \cdot 10^{4} \cdot 2} q = 0{,}13 \cdot 10^{-3}\ кг}$.

23. Электромотор питается от батареи с ЭДС E = 12 В. Какую мощность P развивает мотор при протекании по его обмотке тока I = 2 А, если при полном затормаживании якоря по цепи течет ток I_o = 3 А?

Ответ: $\boxed{\mathrm{P} = \mathrm{IE}\left(1 - \dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{I_o}}\right) = 8\ \mathrm{Вт}}$.

24. Найдите количество теплоты, которое выделится в цепи при переключении ключа K из положения 1 в положение 2. Параметры элементов цепи, изображённых на рисунке, считать известными.



Решение.

При переключении ключа через источник тока E протечет некоторый заряд q. Работа батареи равна E·q. Эта работа может частично пойти на увеличение энергии, запасенной в батарее конденсаторов, частично на выделение тепла в цепи. Как видно из рисунка, заряд и, следовательно, энергия, запасенная в батарее конденсаторов, не изменяются при переключении ключа. Меняются лишь знаки зарядов на обкладках. Следовательно, при переключении ключа K через источник тока протекает заряд

$$q = 2C_{БАТ}E, \text{ где } C_{БАТ} = \frac{2}{3}C, \text{ т.е. } q = \frac{4}{3}CE,$$

и в цепи выделилось количество теплоты $Q = qE = \dfrac{4}{3}CE^2$.

Ответ: $\boxed{Q = qE = \frac{4}{3}CE^2}$.

25. Электрон, ускоренный разностью потенциалов U = 1000 В, влетает в однородное магнитное поле, перпендикулярное направлению его движения. Индукция магнитного поля $B = 1{,}19 \cdot 10^{-3}\ Тл$. Найдите: 1) радиус окружности, по которой движется электрон, 2) период обращения его по окружности.

Решение.

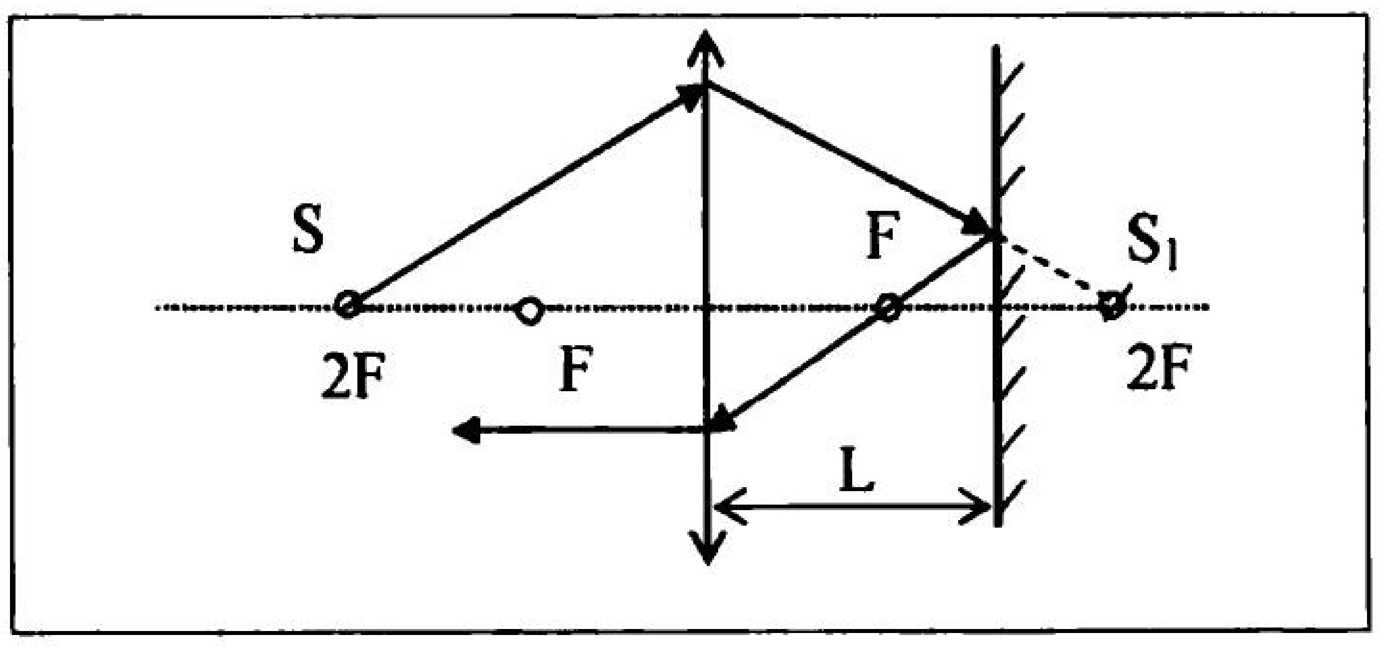
В соответствии с законом сохранения энергии $\frac{m\upsilon^2}{2} = eU$, откуда скорость электрона $\upsilon = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. В соответствии со вторым законом Ньютона $\frac{m\upsilon^2}{R} = eUB$, откуда радиус окружности, по которой движется электрон $R = \frac{m\upsilon}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}} = \frac{1}{1{,}19 \cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^3}{1{,}6 \cdot 10^{19}}} \approx 9{,}0 \cdot 10^{-2}\ м$.

Период обращения электрона по окружности $T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = 2\pi\frac{m}{eB} = 3 \cdot 10^{-8}\ c$, т.е. период не зависит от скорости электрона.

Ответ: $\boxed{R = \frac{m\upsilon}{eB} \approx 9{,}0 \cdot 10^{-2}\ м}$, $\boxed{T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = 2\pi\frac{m}{eB} = 3 \cdot 10^{-8}\ c}$.

26. Источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на её главной оптической оси. За линзой перпендикулярно оптической оси расположено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы нужно поместить зеркало, чтобы лучи, отраженные от зеркала, пройдя вторично через линзу, стали параллельными? Фокусное расстояние линзы F = 10см.

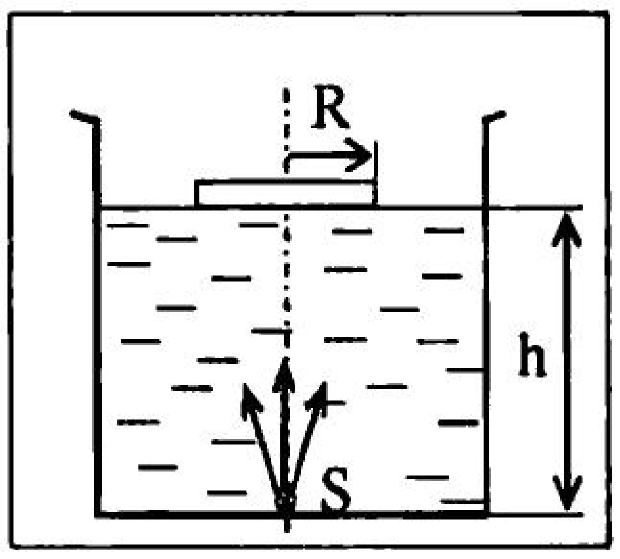
Решение



В отсутствие плоского зеркала изображение S_1 источника располагается на двойном фокусном расстоянии от линзы. Для того чтобы лучи, отраженные от зеркала, пройдя вторично через линзу, стали параллельными, необходимо, чтобы они пересекались в заднем фокусе линзы. Это произойдет в том случае, когда расстояние L между линзой и зеркалом будет равно 3F/2 т. е. L = 3F/2 = 15 см

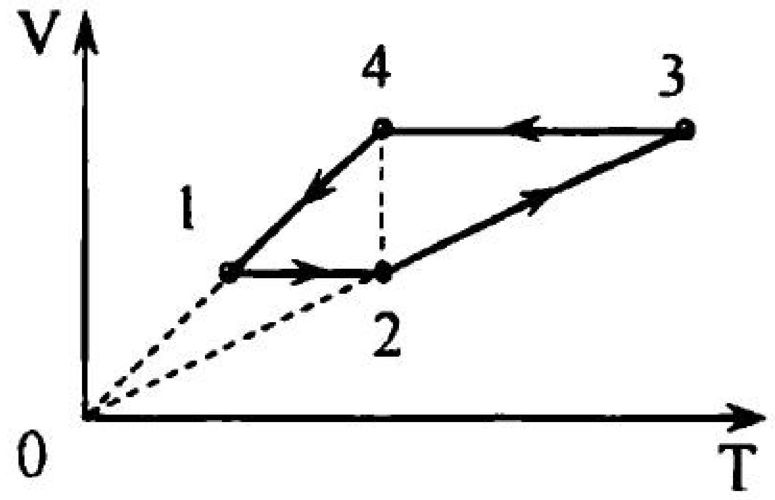
Ответ: $\boxed{L = 3F/2 = 0{,}15 \text{ м}}$.

27. На дне сосуда, наполненного жидкостью до высоты h, находится точечный источник света S. На поверхности жидкости плавает круглый диск радиуса R так, что центр диска находится над источником света. Определите показатель преломления жидкости n, при котором ни один луч не выйдет через поверхность жидкости.



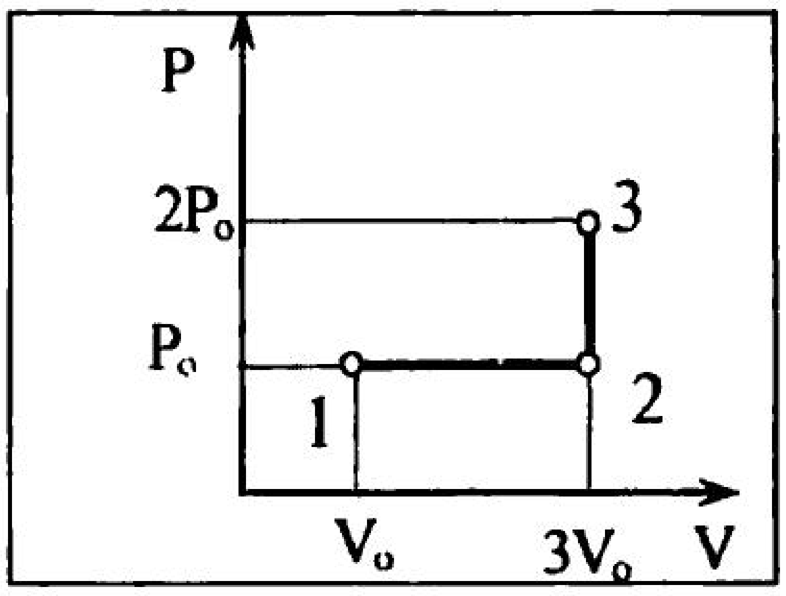
Ответ: $\boxed{n \ge \frac{\sqrt{h^2 + R^2}}{R}}$.

28. На V-T диаграмме изображен цикл 1-2-3-4, совершаемый двумя молями азота, и состоящий из двух изохор и двух изобар. Известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме, а средние квадратичные скорости молекул азота в точке 1 υ_1 = 300 м/с, а в точке 3 – υ_3 = 700 м/с. Определите работу, совершаемую газом за цикл. Молярная масса азота μ = 0,028 кг/моль.



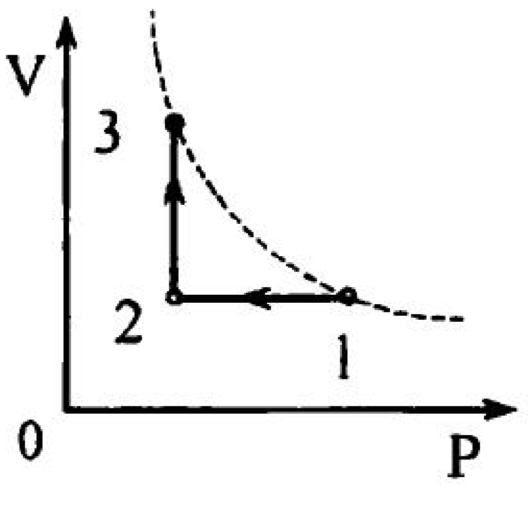
Ответ: $\boxed{A = \frac{\nu\mu}{3}(\upsilon_1 - \upsilon_3)^2 = 2985 \text{ Дж}}$.

29. Два моля кислорода, имеющих температуру T_1 = 100 К в состоянии 1, последовательно переводят в состояние 3. Считая кислород идеальным газом, определите среднюю квадратичную скорость его молекул в состоянии 3.



Ответ: $\boxed{\upsilon_{CP\ KB} = \sqrt{\frac{3RT_3}{\mu}} = 684\ \frac{м}{с}}$.

30. Идеальный одноатомный газ в количестве 10 моль сначала охладили, уменьшив при этом давление в 3 раза, а затем нагрели до первоначальной температуры 300 К. Найдите количество теплоты, сообщённое газу на участке 2–3.



Ответ: $\boxed{Q_{23} = \nu RT_1 \approx 41{,}6 кДж}$.

31. Какой максимальный заряд q может накопиться на удаленном от других тел медном шарике радиуса r = 3 см при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 0{,}14$ мкм? Работа выхода для меди A = 4,47 эВ.

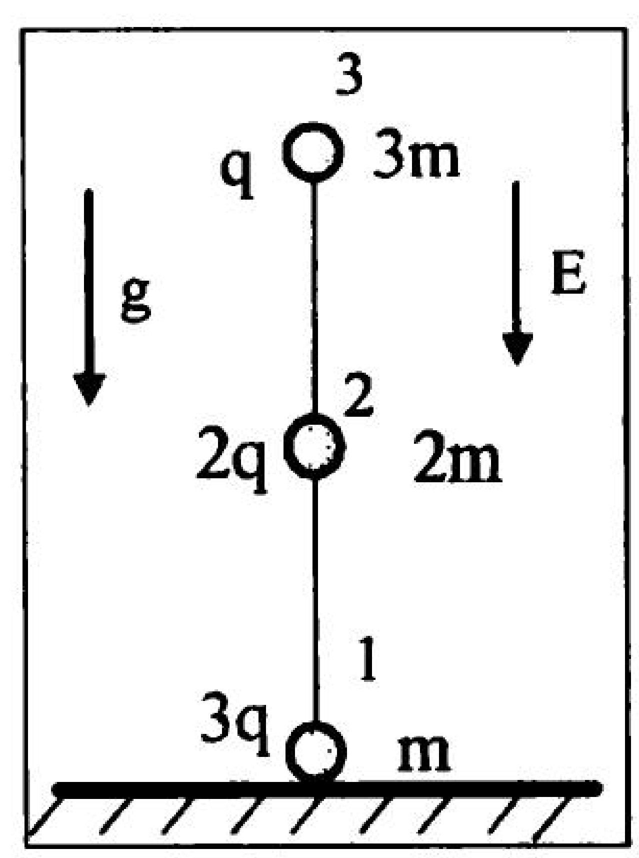
Ответ: $\boxed{q = 4\pi\varepsilon_0 r \dfrac{h\frac{c}{\lambda} - A}{e} = 1{,}45 \cdot 10^{-11}\ Кл}$.

ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ — это комбинированные задачи, требующие углубленного понимания физических явлений, творческого мышления, комплексного использования знаний по различным разделам физики, позволяющего путем логических рассуждений связать происходящие физические явления или процессы, оценить их с качественной и количественной сторон.

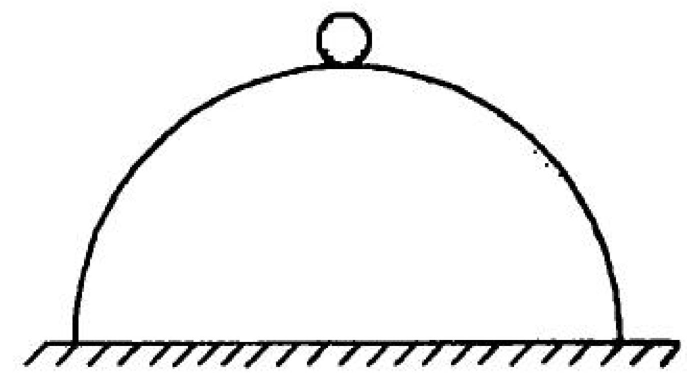
В комбинированных задачах оценивается способность абитуриента осмыслить физическое содержание задачи, понять, какие физические процессы и явления включены в её условие, его умение отыскать в динамике процессов момент, который можно описать, используя математический аппарат в рамках школьной программы. Комбинированные задачи являются лучшим критерием оценки глубины усвоения программного материала. Метод подхода к решению этих задач позволяет оценить способность абитуриента творчески мыслить и логически рассуждать, т.е. качества, которые в конечном счете являются необходимыми для формирования исследовательского стиля умственной деятельности студентов Университета.

3.5. Примеры задач третьего уровня сложности:

1. На концах и в середине невесомого жесткого вертикального стержня длины L укреплены маленькие шарики 1, 2, 3 равного объема, массы которых равны m, 2m и 3m, а заряды +3q, +2q, +q соответственно. В пространстве, где находятся шарики, создано однородное электрическое поле напряженности E, силовые линии которого направлены вертикально вниз. Какую скорость будут иметь шарики в момент падения их на горизонтальную поверхность? Силами трения и влиянием индуцированных на горизонтальной поверхности зарядов пренебречь.



Ответ: $\boxed{\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2L(2mg + qE)}{7m}}}$; $\boxed{\upsilon_3 = 2\sqrt{\frac{2L(2mg+qE)}{7m}}}$.



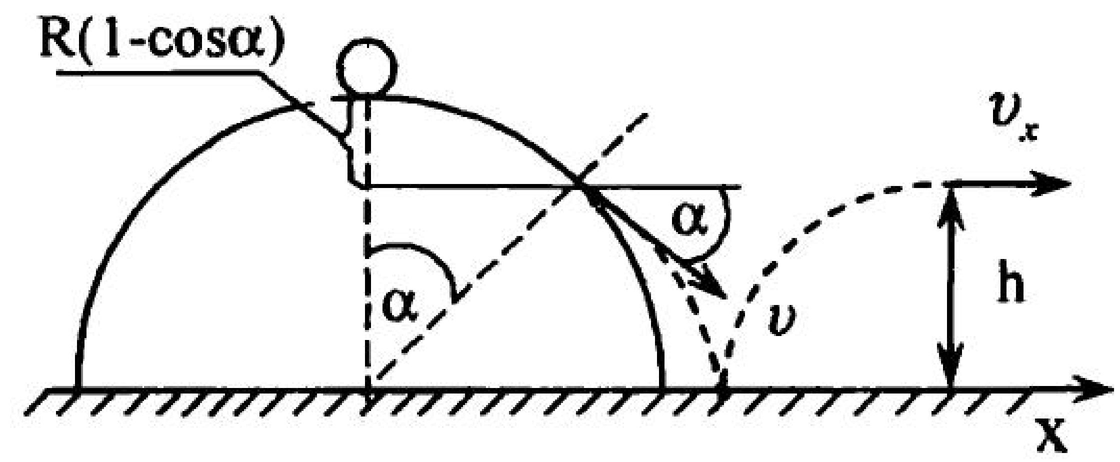
2. Небольшое тело начинает соскальзывать без начальной скорости из верхней точки неподвижной полусферы радиуса R. На какую высоту h оно подскочит после удара о горизонтальную поверхность, на которой находится полусфера? Удар считать абсолютно упругим, полусфера жестко закреплена на плоскости.

Решение.

1) Используя закон сохранения энергии, запишем выражения для полной энергии в начальной точке траектории и в точке максимального подъема:

$\mathrm{mgR} = \frac{m\upsilon_x^2}{2} + mgh$, отсюда найдем $\mathrm{h} = \mathrm{R} - \frac{\upsilon_x^2}{2g}$ (1), где $\upsilon_x = \upsilon \cdot \cos\alpha$.

2) Скорость υ и cos α найдем, используя закон сохранения энергии и исходя из условия отрыва тела от сферы (Сила реакции N обратится в ноль при значении α, при котором $\cos\alpha = 2/3$. Далее тело будет свободно двигаться в поле тяжести):

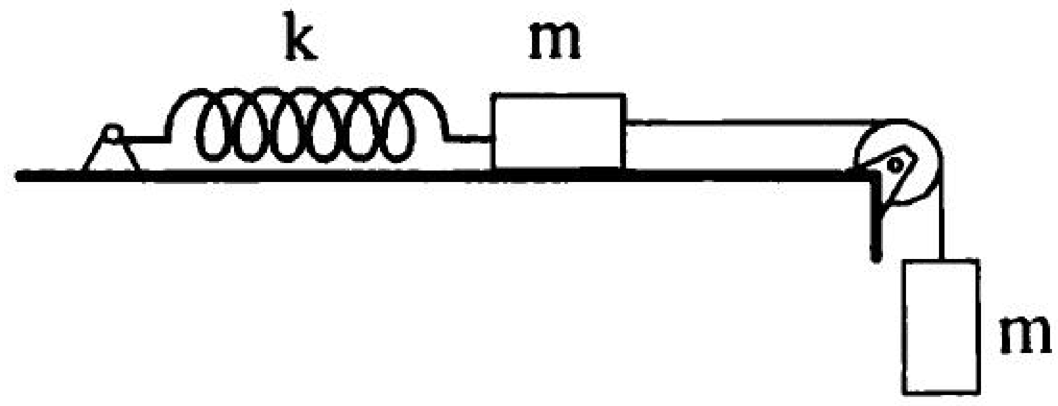


$$\left.\begin{aligned} \frac{m\upsilon^2}{2} &= \mathrm{mgR}(1-\cos\alpha) \\ \frac{m\upsilon^2}{R} &= mg\cos\alpha \end{aligned}\right\}. \text{ Отсюда } \left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{2}{3} \\ \upsilon^2 &= \frac{2}{3}gR \end{aligned}\right\}$$

Подставим эти выражения в (1), найдем $\boxed{\mathrm{h} = \mathrm{R} - \frac{1}{2g}(\upsilon\cos\alpha)^2 = R - \frac{1}{2g}\cdot\frac{2}{3}gR\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{23}{27}R}$.

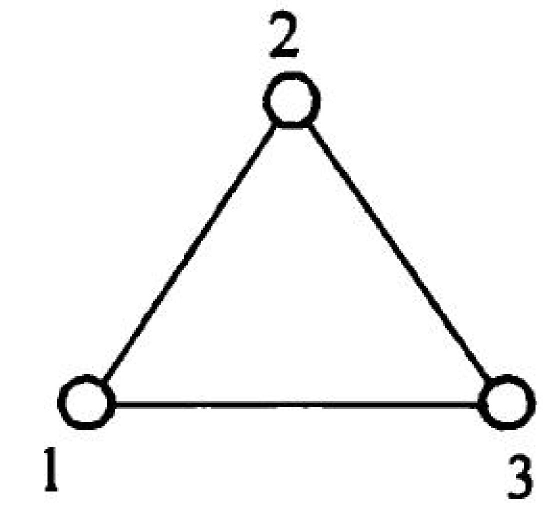
Ответ: $\boxed{\mathrm{h} = \frac{23}{27}\mathrm{R}}$.

3. В системе, показанной на рисунке, масса каждого бруска m = 1 кг , жесткость пружины k = 20 Н/м , коэффициент трения между бруском и плоскостью μ = 0,4. Массы блока и пружины пренебрежимо малы. Система пришла в движение с нулевой начальной скоростью при недеформированной пружине. Найдите максимальную скорость брусков. При вычислениях принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



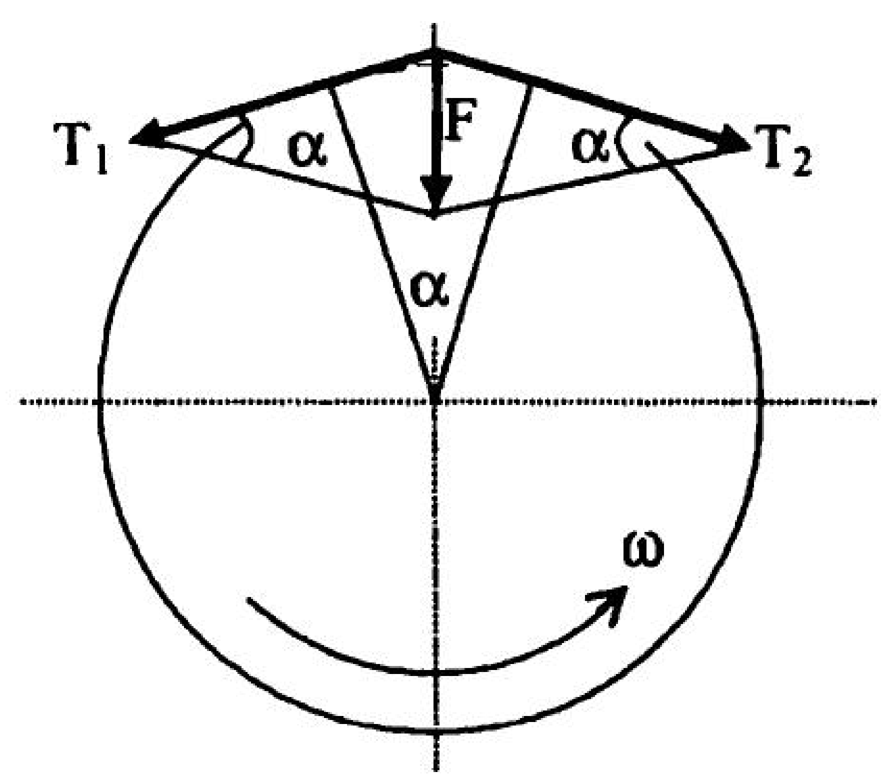
Ответ. $\boxed{V = g(1-\mu)\sqrt{\frac{m}{2k}} = 0,95\frac{м}{с}}$.

4. Три одинаковых одноименно заряженных шарика, заряд каждого из которых равен q, а масса m, соединены невесомыми, нерастяжимыми и непроводящими нитями длины L каждая так, что нити образуют равносторонний треугольник. Нить между шариками 1 и 3 пережигают. Найдите максимальную скорость шарика 2.



Ответ: $\boxed{\upsilon_2 = \frac{2q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 6mL}}}$.

5. Коэффициент жёсткости резинового жгута, длина которого L и масса m, равен k. Кольцо, изготовленное из этого жгута, вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Определите радиус вращающегося кольца.



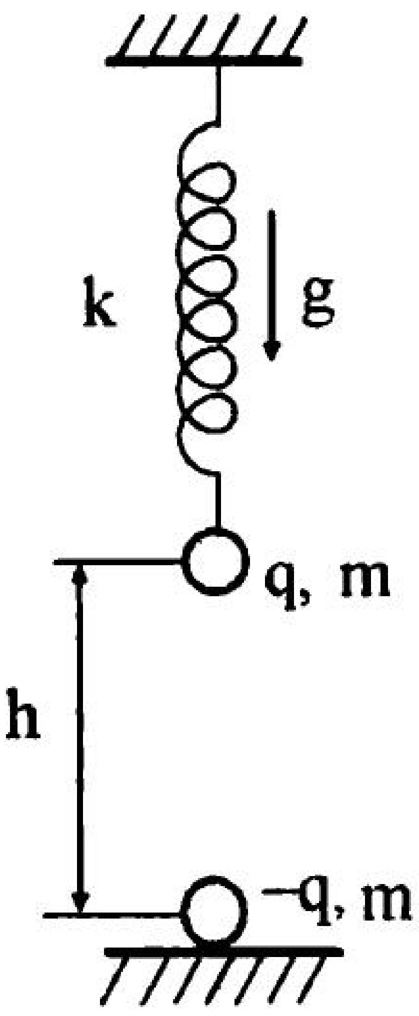
Решение.

Обозначим через $L_{BP.}$ длину вращающегося кольца ($L_{BP.} = 2\pi R$). Рассмотрим небольшой участок кольца длиной ΔL и массой $\Delta m = \frac{m}{L_{вр}} \cdot \Delta L$. На выделенный участок с двух сторон действуют силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, направленные по касательным к кольцу и одинаковые по модулю ($T_1 = T_2$). Их равнодействующая $\vec{F}$ направлена по радиусу к центру кольца и сообщает рассматриваемому участку центростремительное ускорение $a = \omega^2 R$. Из рисунка видно, что $F = 2T \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$. Запишем уравнение движения выделенного участка: $F = \omega^2 R \cdot \Delta m$ или $2T\sin\frac{\alpha}{2} = \omega^2 R\frac{m \cdot \Delta L}{L_{BP.}}$. (1)

Поскольку $T = k(L_{BP.} - L)$, $L_{вр} = 2\pi R$, а при малых углах $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta L}{2R}$, то из равенства (1) получаем $k(2\pi R - L)\frac{\Delta L}{2R} = \frac{\omega^2 m}{2\pi}\Delta L$. Отсюда $\boxed{R = \frac{2\pi kL}{4\pi^2 k - \omega^2 m}}$.

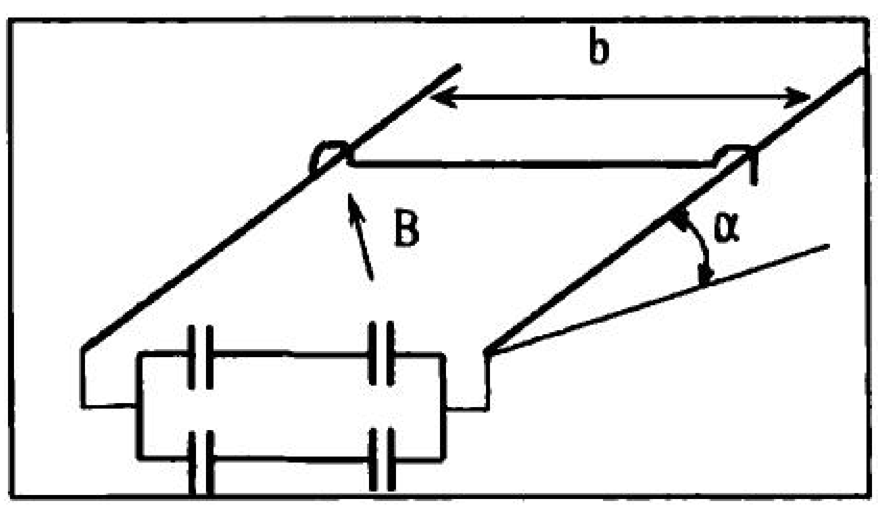
Ответ: $\boxed{R = \dfrac{2\pi kL}{4\pi^2 k - \omega^2 m}}$.

6. Маленький шарик массы m подвешен на пружине жесткости k и несет заряд q. В начальный момент шарик удерживают так, что пружина не деформирована. Под шариком на расстоянии h лежит такой же шарик с зарядом −q. Верхний шарик отпускают. При каком минимальном значении q нижний шарик подпрыгнет?



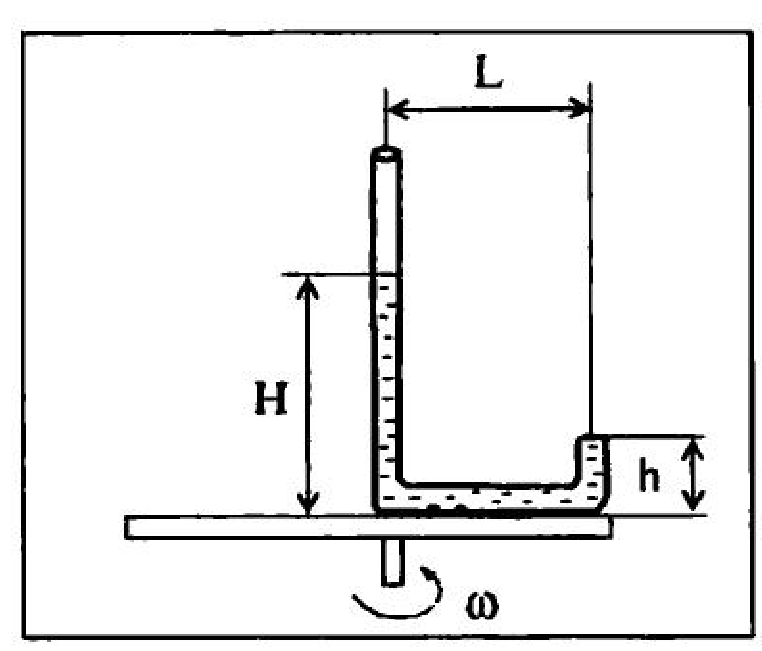
Ответ: $\boxed{q_{\min} = \sqrt{4\pi\varepsilon_o mg} \cdot h \cdot \dfrac{kh - 2mg}{kh + 2mg}}$.

7. По двум параллельным металлическим направляющим, наклоненным под углом α к горизонту и расположенным на расстоянии b друг от друга, скользит без трения металлическая перемычка массы m. Направляющие замкнуты снизу на батарею конденсаторов, емкость каждого из которых равна C. Вся конструкция находится в магнитном поле, индукция которого B направлена перпендикулярно плоскости, в которой перемещается перемычка. Определите ускорение перемычки. Сопротивлением направляющих, перемычки и индуктивностью контура пренебречь.



Ответ: $\boxed{a = \dfrac{mg\sin\alpha}{m + C\ B^2 b^2}}$.

8. Тонкая, запаянная с одного конца трубка заполнена водой и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Открытое и запаянное колена трубки вертикальны. Геометрические размеры установки указаны на рисунке. Атмосферное давление P_o, плотность воды ρ. Найдите давление воды у запаянного конца трубки. Силами поверхностного натяжения пренебречь.

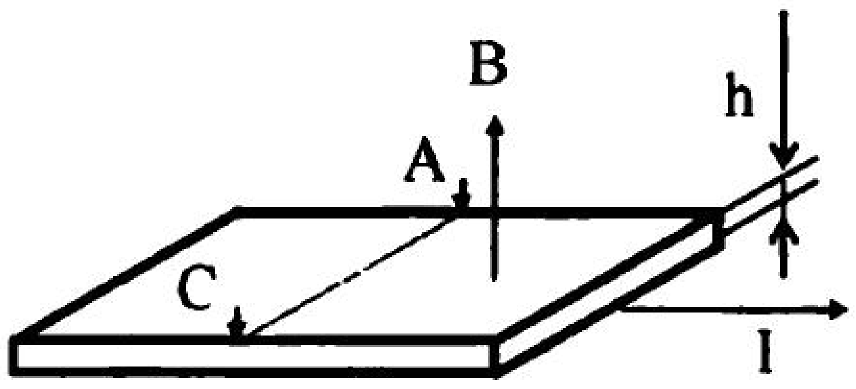


Ответ: $\boxed{p_3 = p_o + \rho g(H - h) + \dfrac{\rho\omega^2 L^2}{2}}$.

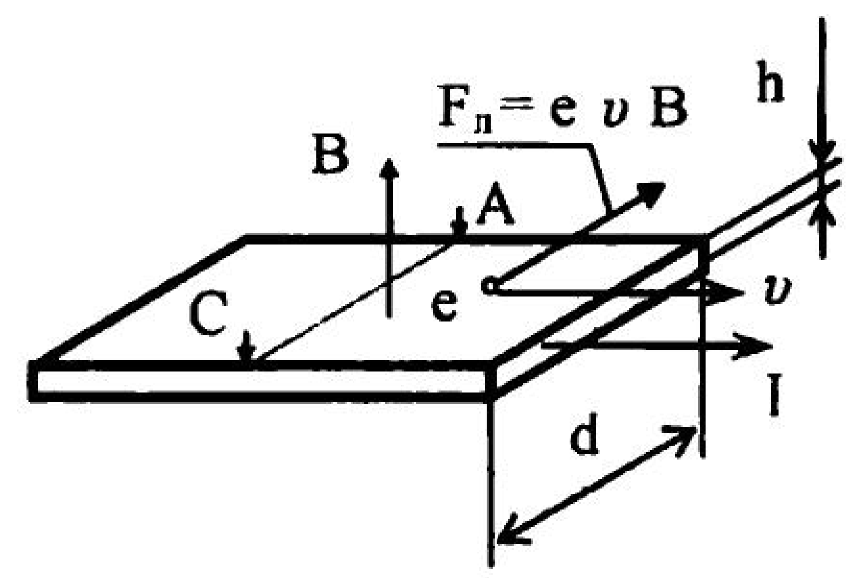
9. Массы двух звезд равны m_1 и m_2, расстояние между ними равно ℓ. Найдите период T обращения этих звезд по круговым орбитам вокруг их общего центра масс.

Ответ: $\boxed{T = 2\pi\ell\sqrt{\dfrac{\ell}{G(m_1 + m_2)}}}$.

10. По металлической ленте, толщина которой равна h, течет ток I. Лента помещена в однородное магнитное поле, индукция которого равна B и направлена перпендикулярно поверхности ленты. Определите разность потенциалов между точками A и C ленты, если концентрация свободных электронов в металле равна n.



Решение.



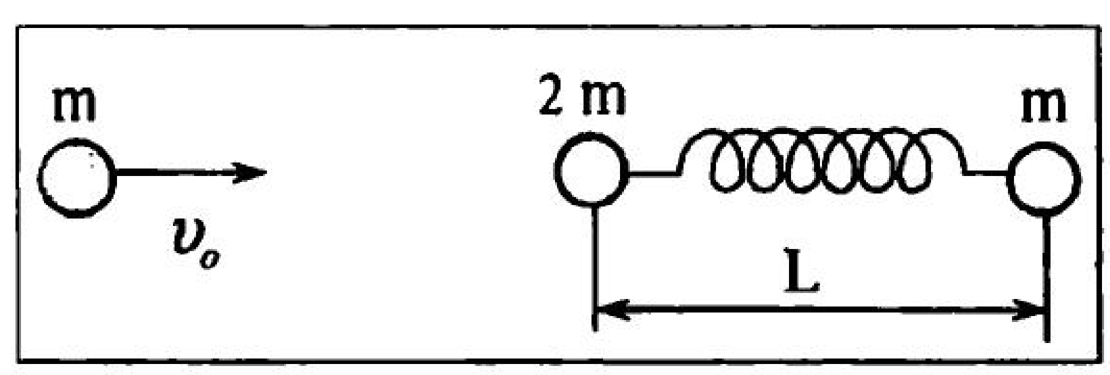
Поле E, возникающее из-за разделения зарядов под действием силы Лоренца, равно $E = \upsilon B$.

Скорость электронов в ленте $\upsilon = \dfrac{j}{en} = \dfrac{I}{dhen}$, тогда

$E = \dfrac{BI}{dhne}$. Разность потенциалов между точками A и C $\varphi_A - \varphi_C = Ed = \dfrac{BI}{neh}$.

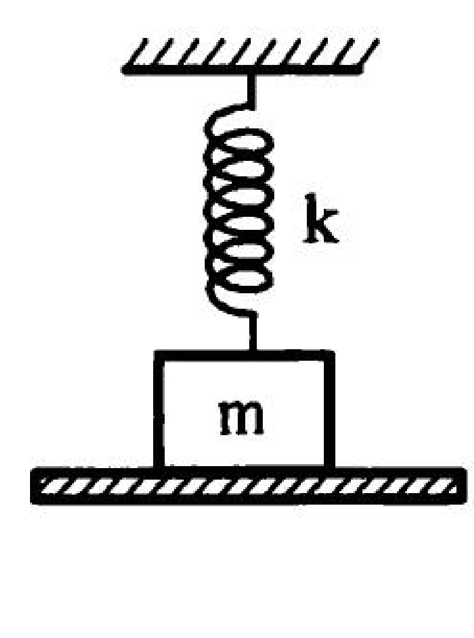
Ответ: $\boxed{\varphi_A - \varphi_C = \dfrac{BI}{neh}}$.

1. Два шарика массы 2m и m соединены невесомой пружиной жесткости k и длины L и лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе. Третий шарик массы m движется со скоростью по υ_0 линии, соединяющей центры первых двух, и упруго соударяется с шариком массы 2m. Пренебрегая временем соударения шариков по сравнению с временем деформации пружины, определите максимальное расстояние между шариками, связанными пружиной, при их дальнейшем движении.



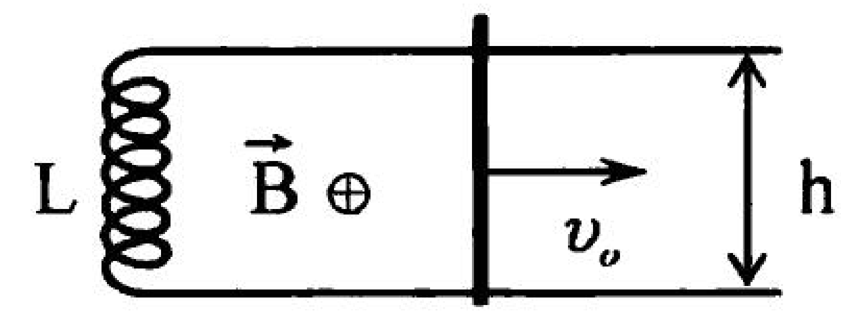
Ответ: $\boxed{L_{max} = L + A = L + \dfrac{2}{3}\upsilon_o\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}}$

12. На подставке лежит тело массы m, подвешенное на пружине жесткости k. В начальный момент пружина не растянута. Подставку начинают опускать вниз с ускорением *a*. Найдите время, через которое подставка оторвётся от тела. Каким будет максимальное растяжение пружины?



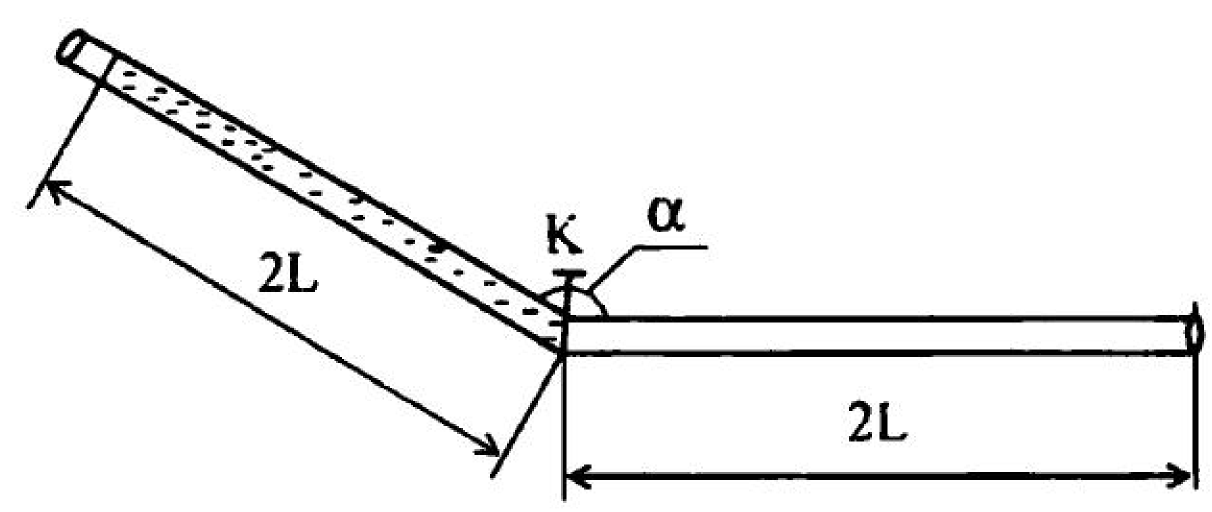
Ответ: $\boxed{t=\sqrt{\dfrac{2m(g-a)}{Ka}}}$; $\boxed{\Delta l=\dfrac{mg}{K}+\dfrac{m\sqrt{a(2g-a)}}{K}}$.

13. Горизонтальный контур образован двумя замкнутыми на катушку индуктивности L параллельными проводниками, находящимися на расстоянии h друг от друга. По проводникам без трения может скользить перемычка массы m. Контур помещен в вертикальное однородное магнитное поле. В начальный момент времени неподвижной перемычке сообщают скорость υ_0. Определите индукцию магнитного поля B, если известно расстояние S, которое пройдет перемычка до первой остановки, а также найдите время t_1, за которое перемычка пройдёт половину этого расстояния. Сопротивлением всех элементов контура пренебречь.



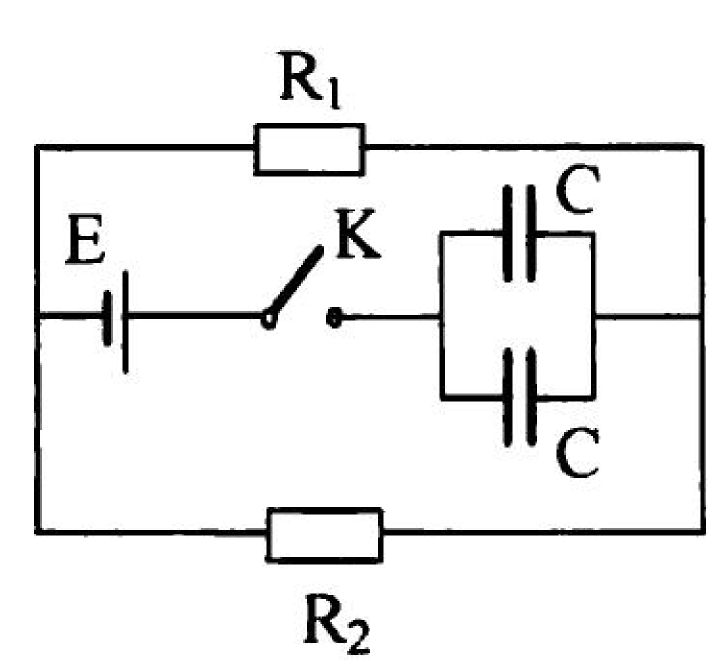
Ответ: $\boxed{B=\dfrac{\upsilon_o\sqrt{Lm}}{Sh}}$; $\boxed{t_1=\dfrac{\pi S}{6\upsilon_o}}$.

14. Тонкая, открытая с обоих концов трубка, согнутая под углом $\alpha = 150^\circ$ расположена в вертикальной плоскости. Верхнее колено трубки заполнено на длину 2L жидкостью, которая удерживается с помощью клапана K. Найдите, через какое время t после открытия клапана, вся жидкость вытечет из горизонтальной части трубки, длина которой равна 2L. Силами трения и поверхностного натяжения пренебречь. При течении жидкость заполняет всё сечение трубки.



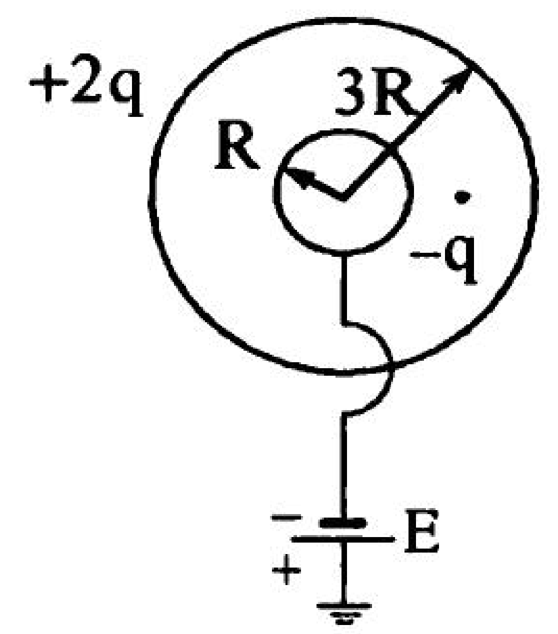
Ответ: $\boxed{t=\sqrt{\dfrac{L}{g\sin\alpha}}\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)=2\sqrt{\dfrac{L}{g}}\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)}$.

15. В схеме, показанной на рисунке, перед замыканием ключа K батарея, состоящая из двух одинаковых конденсаторов емкости C каждый, не была заряжена. Ключ замыкают на некоторое время, в течение которого конденсаторы зарядились до напряжения U. Определите, какое количество теплоты Q_2 выделится за это время на резисторе сопротивления R_2. ЭДС источника тока равна E, его внутренним сопротивлением пренебречь.



Ответ: $\boxed{Q_2=CU(2E-U)\dfrac{R_1}{R_1+R_2}}$.

16. В системе, состоящей из двух концентрических проводящих сфер радиусами R и 3R, внутренняя сфера соединена с землей через источник ЭДС, равной E. Заряд внешней сферы равен +2q. На расстоянии 2R от центра системы находится точечный заряд –q. Зная величины q, E, R, определите заряд внутренней сферы. Потенциал земли принять равным нулю.

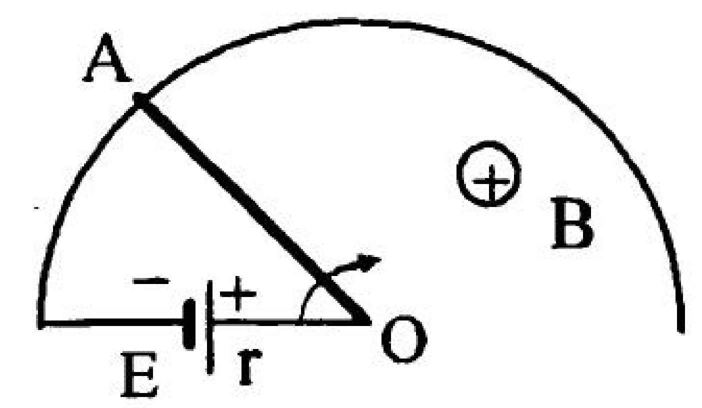


Решение.

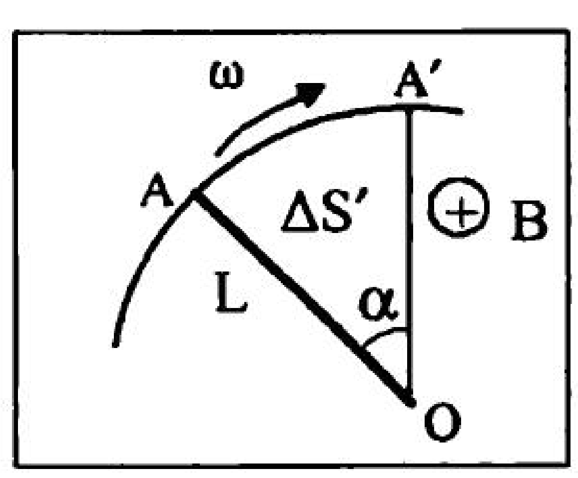
Согласно принципу суперпозиции, потенциал внутренней сферы равен $\varphi = -E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o \cdot 2R} + \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_o 3R}$, откуда находим искомый заряд внутренней сферы $Q = -\left(4\pi\varepsilon_o RE + \dfrac{1}{6}q\right)$.

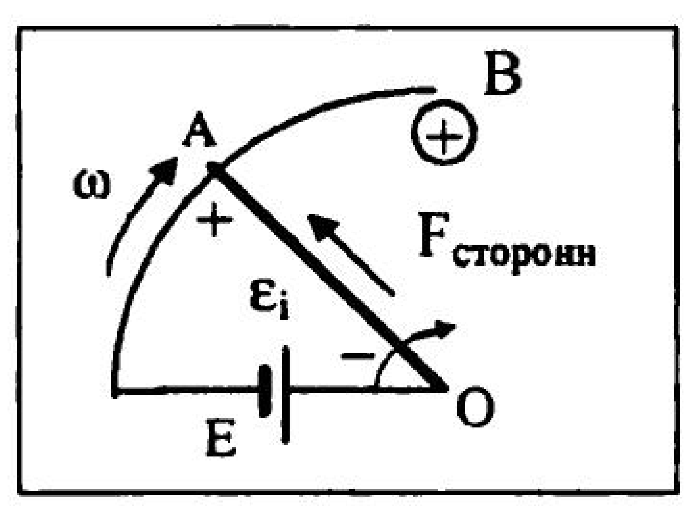
Ответ: $\boxed{Q = -\left(4\pi\varepsilon_o RE + \dfrac{1}{6}q\right)}$.

17. Стержень OA сопротивлением R и длиной L скользит по полукольцу, сопротивление которого ничтожно мало. Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией B, линии которой перпендикулярны плоскости контура. В контур включен источник тока с ЭДС E и внутренним сопротивлением r. Угловая скорость вращения стержня ω. Найдите разность потенциалов между точками O и A стержня.

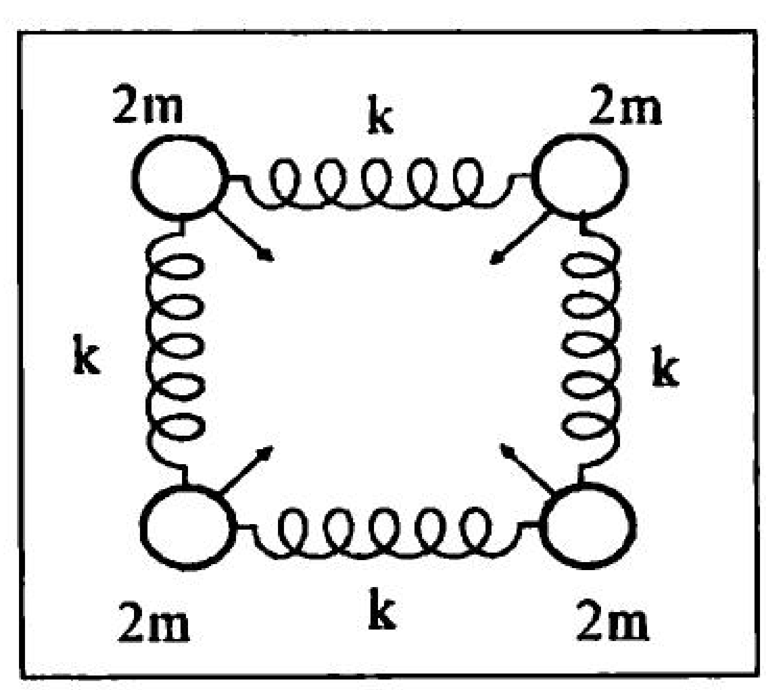


Ответ: $\boxed{\varphi_o - \varphi_A = \dfrac{2\varepsilon R - BL^2\omega r}{2(R+r)}}$.

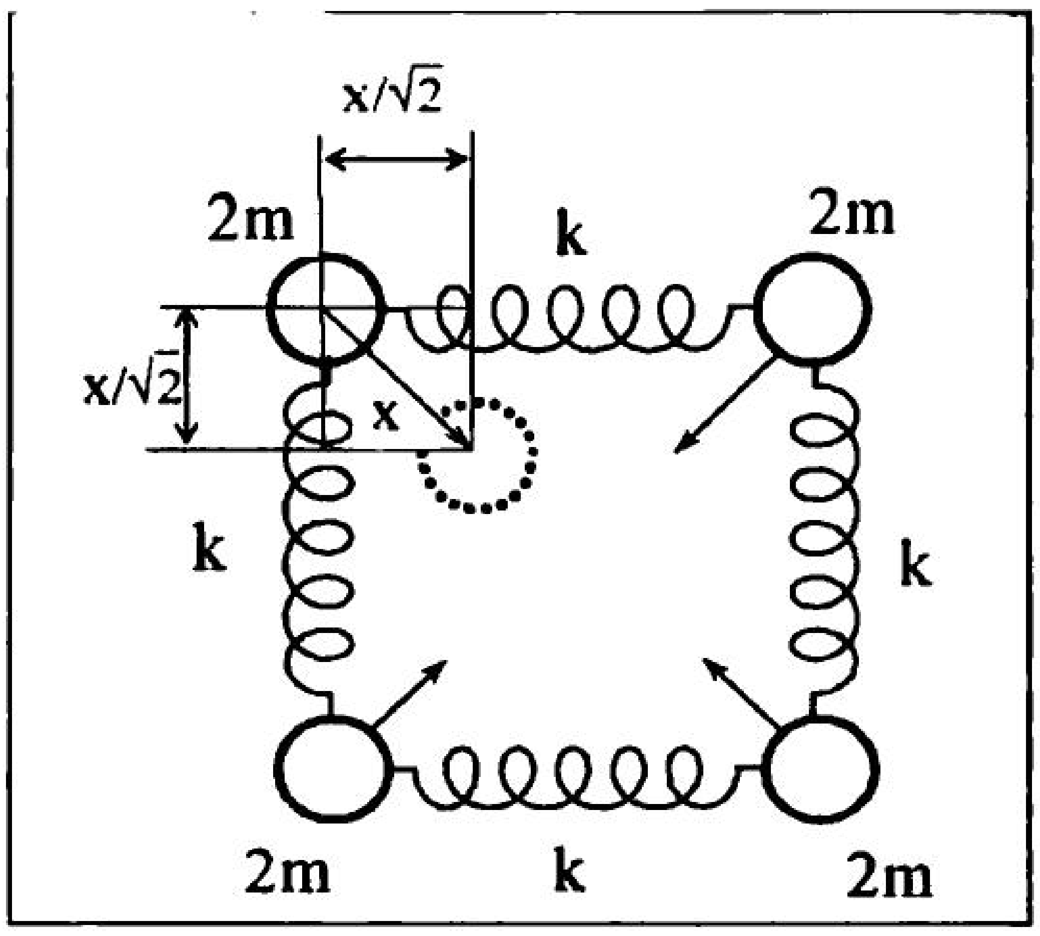




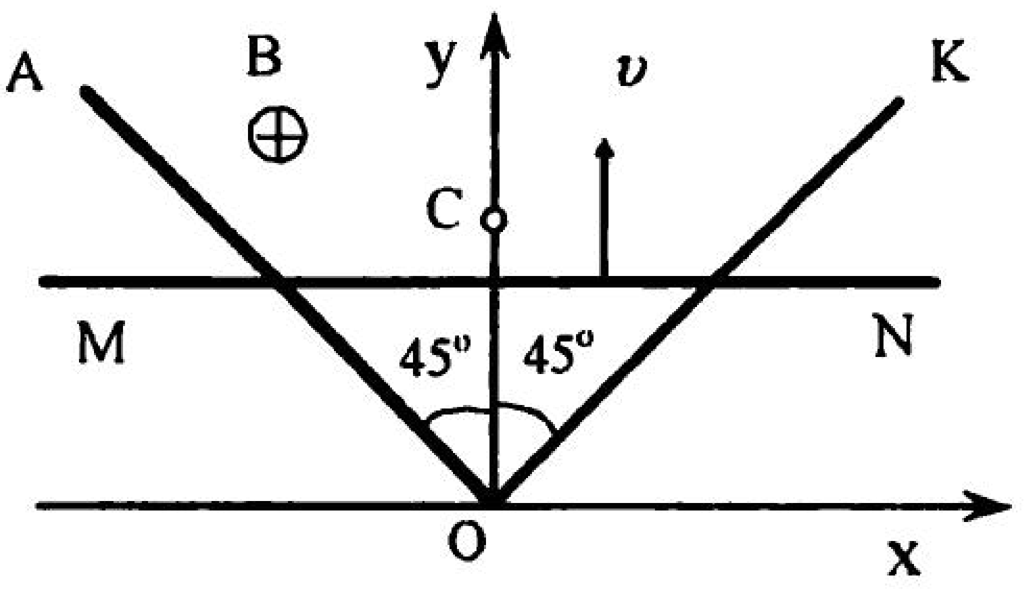
18. Четыре одинаковых шарика массы 2m каждый, соединенные одинаковыми пружинами жесткости k, образуют квадрат. Одновременно все четыре шарика толкнули, сообщив им одинаковые по модулю скорости, направленные к центру квадрата. Через какое минимальное время после этого пружины будут сильнее всего сжаты? Массами пружин пренебречь.



Ответ: $\boxed{t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}}$.

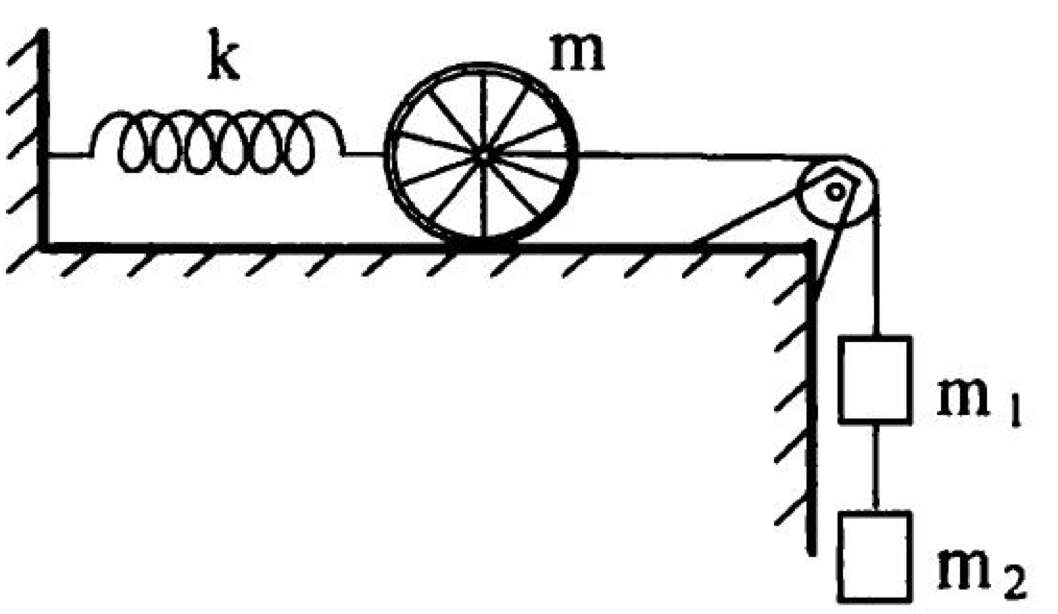


19. Проводник АОК, согнутый под углом $\alpha = 90^{\circ}$, расположен в плоскости xy, как показано на рисунке, в постоянном однородном магнитном поле индукции B, перпендикулярной плоскости xy. По проводнику из начала координат O перемещают поступательно вдоль оси y с постоянной скоростью v перемычку MN, параллельную оси x. Сопротивление единицы длины перемычки равно ρ. Пренебрегая сопротивлением проводника и скользящих контактов, а также индуктивностью контура, найдите полное количество теплоты Q, выделившейся в перемычке, за время её движения до точки C. Длина отрезка OC равна L.



Ответ: $\boxed{Q = \frac{B^2 vL^2}{\rho} tg\frac{\alpha}{2} = \frac{B^2 vL^2}{\rho}}$.

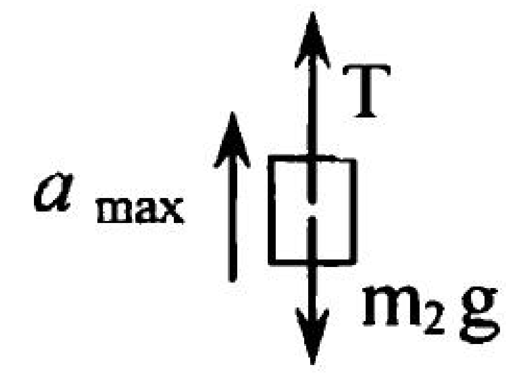
20. К оси колеса, масса m которого равномерно распределена по ободу, присоединена пружина жесткости k. Второй конец пружины прикреплен к стене. С помощью нити, перекинутой через блок, к оси колеса подвешены два груза: $m_1 = m$, и $m_2 = 3m$. Система пришла в движение с нулевой начальной скоростью при недеформированной пружине. Считая, что колесо катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания, определите максимальную силу натяжения нити, соединяющей грузы m_1 и m_2, при их дальнейшем движении. Массами пружины, нити и блока пренебречь.



Решение.

1) Квадрат круговой частоты $\omega^2 = \frac{k}{m_1 + m_2 + 2m} = \frac{k}{m + 3m + 2m} = \frac{k}{6m}$.

2) Амплитуда колебаний грузов $A = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} = \frac{4mg}{k}$.



3) Максимальное ускорение $a = A\omega^2 = \frac{4mg}{k}\frac{k}{6m} = \frac{2}{3}g$.

4) Уравнение 2-го закона Ньютона для момента времени, когда груз находится в нижнем положении; при этом сила натяжения нити максимальная: $m_2 a = T - m_2 g$, откуда

$$T = m_2(g+a) = m_2(g + A\omega^2) = 3m\left(g + \frac{2}{3}g\right) = 5mg.$$

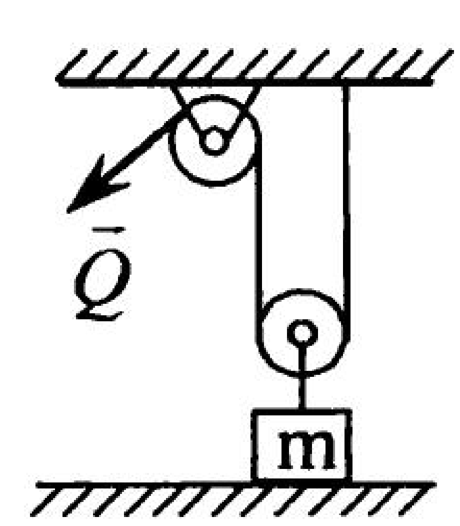
Ответ: $\boxed{T = 5mg}$.

ЗАДАЧА СЧИТАЕТСЯ ПОЛНОСТЬЮ РЕШЁННОЙ, ЕСЛИ:

- приведены ссылки на законы, используемые для решения данной задачи, с учетом, если необходимо, их векторного характера; указаны физические явления, рассматриваемые в задаче;
- даны текстовые пояснения по ходу решения задачи;
- записаны необходимые для решения задачи уравнения, правильно проведены все алгебраические преобразования и получен ответ в буквенном виде;
- если необходимо по условию задачи, выполнены числовые расчеты и записан окончательный ответ в системе СИ с указанием единиц измерения полученных величин.

3.6. ПРИМЕРЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ ОЛИМПИАДЫ
I ЭТАП ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ВАРИАНТ № 1

ЗАДАЧА 1.

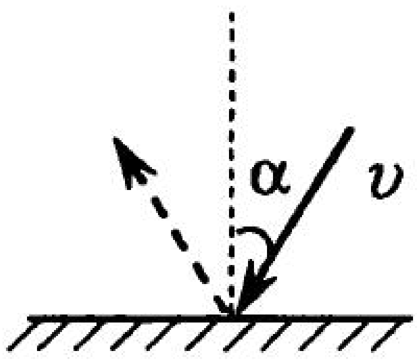


С помощью системы из подвижного и неподвижного блоков поднимают с поверхности земли груз массой m = 15 кг. За какое время груз достигнет высоты H = 1,1 м, если верёвку тянуть с постоянной силой Q = 90 Н ? Массами верёвки, блоков и трением в осях блоков пренебречь.

ЗАДАЧА 2.

Какие силы создают центростремительное ускорение конькобежцу при повороте на ледовой дорожке?

З А Д А Ч А 3.



Шарик массы m падает под углом α к нормали со скоростью υ. После упругого соударения с горизонтальной плоскостью он отскакивает под таким же углом и движется с такой же по модулю скоростью. Найдите модуль изменения импульса шарика за время соударения и работу силы упругости со стороны горизонтальной плоскости, действие которой испытал шарик.

З А Д А Ч А 4.

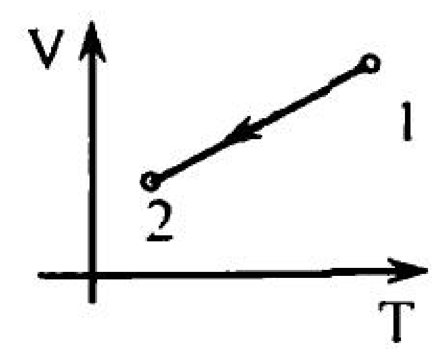
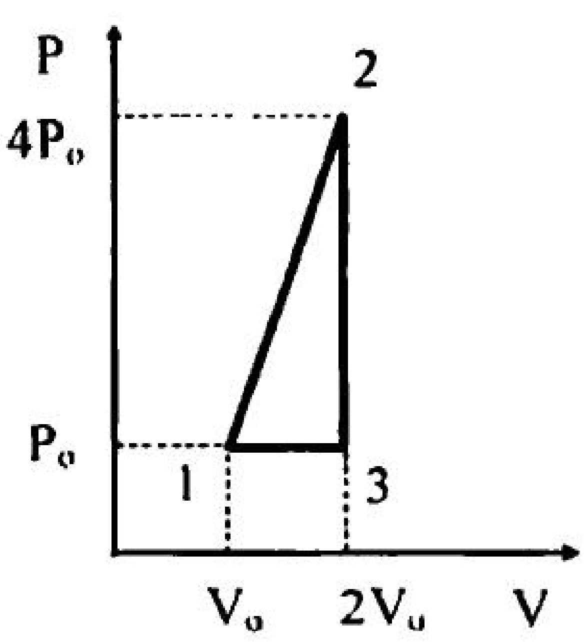


График изменения состояния идеального газа в координатах V – T представляет собой прямую 1–2. Как изменялось давление газа в этом процессе? Ответ обосновать.



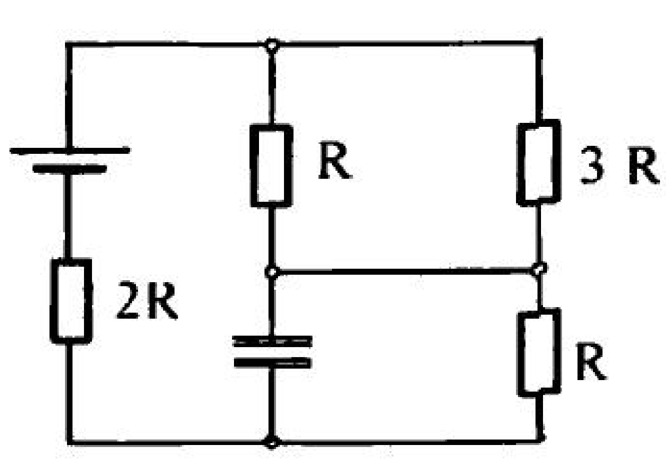
З А Д А Ч А 5.

На P – V диаграмме изображен цикл 1–2–3–1, проводимый с одноатомным идеальным газом. Определите коэффициент полезного действия этого цикла.

З А Д А Ч А 6.

Как изменится ёмкость плоского воздушного конденсатора, если площадь обкладок и расстояние между ними уменьшить в два раза и заполнить всё пространство между обкладками диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$?

З А Д А Ч А 7.

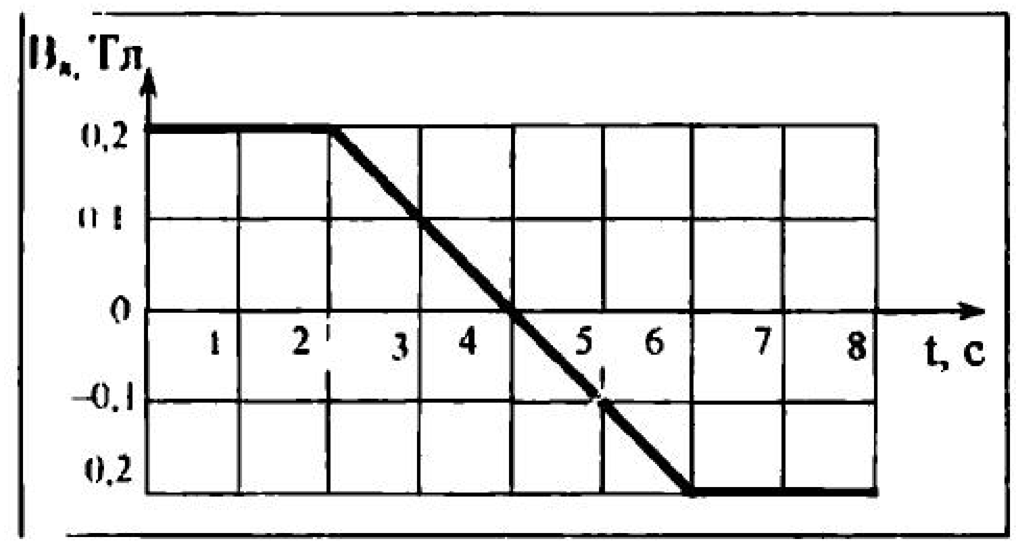


В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, установившееся напряжение на конденсаторе U = 28 В. Считая параметры элементов схемы известными, определите величину ЭДС источника тока.

З А Д А Ч А 8.

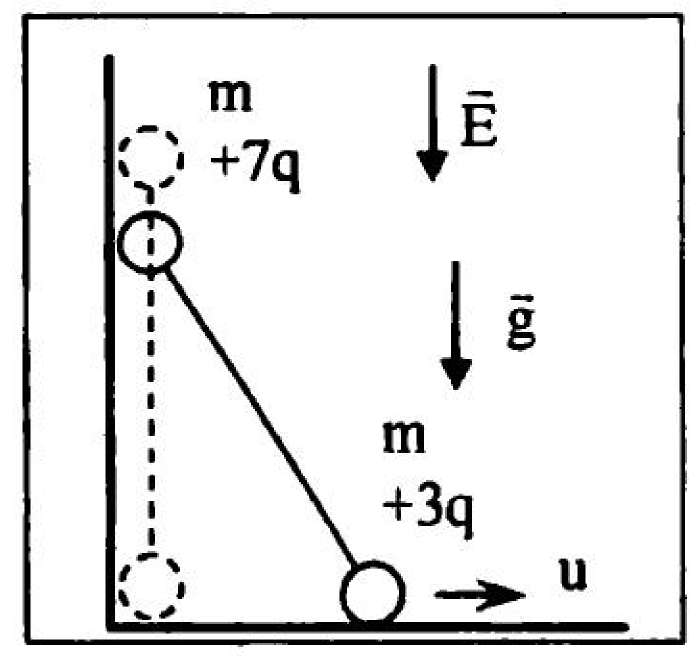
Чему равен коэффициент преломления стекла, из которого изготовлена симметричная собирающая линза, если фокусное расстояние этой линзы равно половине радиуса кривизны ее поверхностей?

ЗАДАЧА 9.



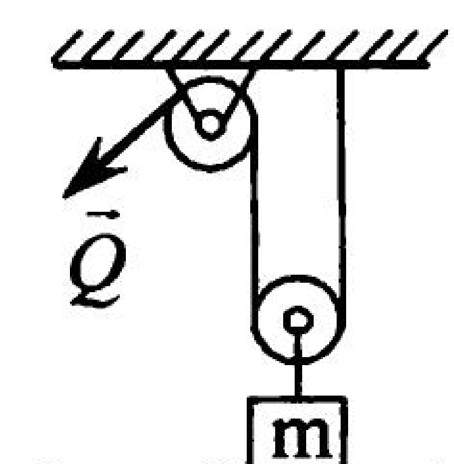
Тонкое проволочное кольцо площади S = 100 см ^{2}, имеющее сопротивление R = 0,01 Ом, помещено в однородное магнитное поле. Изменение проекции вектора магнитной индукции этого поля (B_x) на ось x, перпендикулярную плоскости кольца, от времени представлено на графике. Найдите заряд q, прошедший через поперечное сечение кольца за интервал времени от t = 2c до t = 4c. Индуктивностью кольца пренебречь.

ЗАДАЧА 10.



Два маленьких шарика массы m каждый соединены жестким невесомым изолирующим стержнем длины L и размещены вертикально в углу, образованном гладкими плоскостями. Верхний шарик имеет заряд равный +7q, а нижний заряд +3q. В пространстве, где находятся шарики, создано однородное электрическое поле напряженности E, силовые линии которого направлены вертикально вниз. Нижний шарик смещают вдоль нормали к вертикальной плоскости на очень маленькое расстояние, и гантель начинает двигаться. Найдите скорость нижнего шарика u в тот момент, когда верхний шарик оторвется от вертикальной плоскости.

3.7. РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА № 1



ЗАДАЧА 1. (8 баллов)

Ускорение груза $a = \dfrac{(2Q - mg)}{m}$. Высота поднятия груза $H = \dfrac{at^2}{2}$.

Из записанных уравнений находим время $t = \sqrt{\dfrac{2H}{\dfrac{2Q}{m} - g}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 1{,}1}{\dfrac{2 \cdot 90}{15} - 9{,}8}} = 1\ c$

Ответ: $\boxed{t = 1\ c}$

ЗАДАЧА 2. (8 баллов)

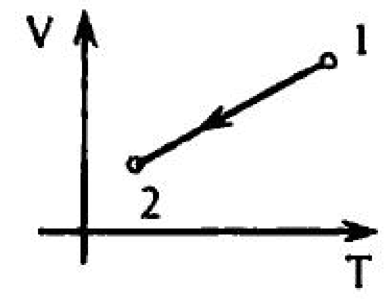
Ответ: Силы реакции, действующие на конькобежца со стороны льда.

ЗАДАЧА 3. (10 баллов)

Ответ: $\boxed{\Delta p = m\upsilon\sqrt{3}}$

ЗАДАЧА 4. (10 баллов)

Ответ: Давление уменьшалось.

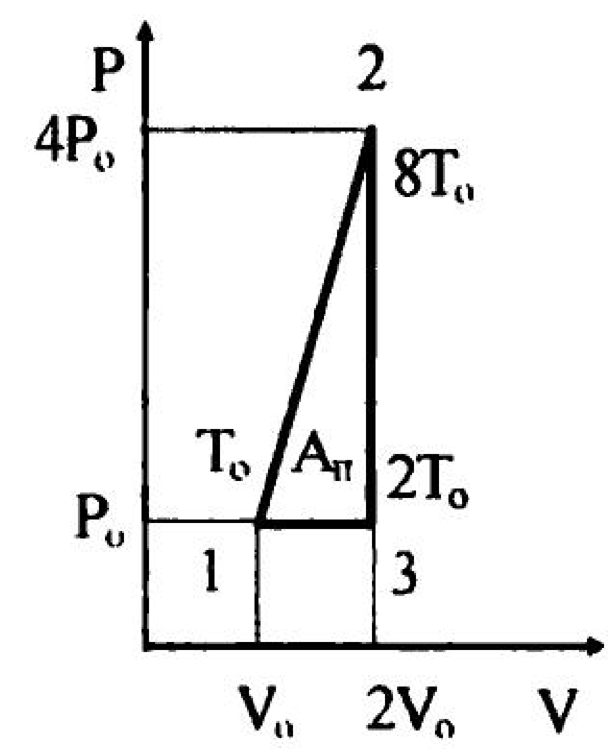


ЗАДАЧА 5. (10 баллов)

Полезная работа газа в прямом цикле пропорциональна площади цикла на графике P-V.

$$A_{\text{полезн}} = \frac{1}{2}\Delta P \cdot \Delta V = \frac{1}{2}(4P_o - P_o)(2V_o - V_o) = \frac{3}{2}P_oV_o = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT_o$$

$$P_oV_o = \frac{m}{\mu}RT_o$$



$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = c_v\frac{m}{\mu}\Delta T_{12} + \frac{1}{2}(P_o + 4P_o)(2V_o - V_o) =$$

$$= \frac{3}{2}R\frac{m}{\mu}(8T_o - T_o) + \frac{5}{2}P_oV_o = \frac{21}{2}\frac{m}{\mu}RT_o + \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT_o = 13\frac{m}{\mu}RT_o$$

Следовательно, $\eta = \dfrac{A_{\text{полезн}}}{Q_{12}} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{13} = \dfrac{3}{26} = 0{,}115 = 11{,}5\%$.

Ответ: $\boxed{\eta = \dfrac{A_{\text{полезн}}}{Q} = 0{,}115 = 11{,}5\%}$

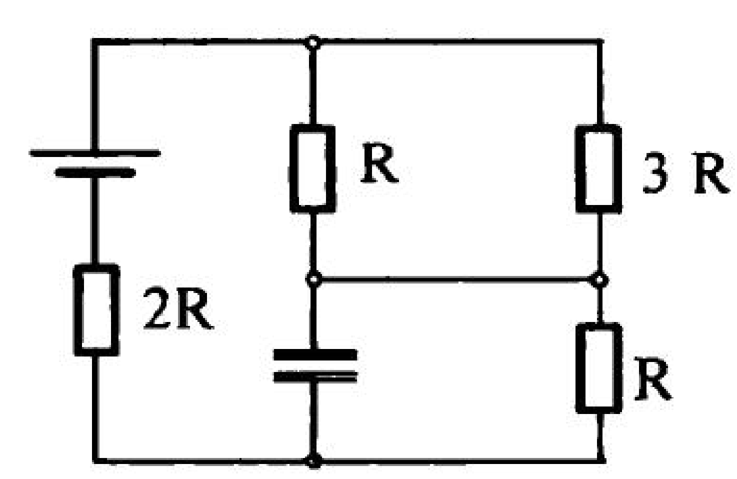
ЗАДАЧА 6. (10 баллов)

Ответ: Ёмкость конденсатора увеличится в четыре раза.

ЗАДАЧА 7. (10 баллов)

1) Полное сопротивление цепи

$$R_{\Sigma} = R + 2R + \frac{3}{4}R = \frac{15}{4}R.$$



2) Ток в источнике ЭДС равен току в сопротивлении, подключенном параллельно конденсатору

$$\frac{E}{R_{\Sigma}} = \frac{U}{R}, \text{ откуда } E = \frac{U \cdot R_{\Sigma}}{R} = \frac{15}{4}U = \frac{15}{4}28 = 105\ B.$$

Ответ: $\boxed{E = 105\ B}$.

ЗАДАЧА 8. (10 баллов)

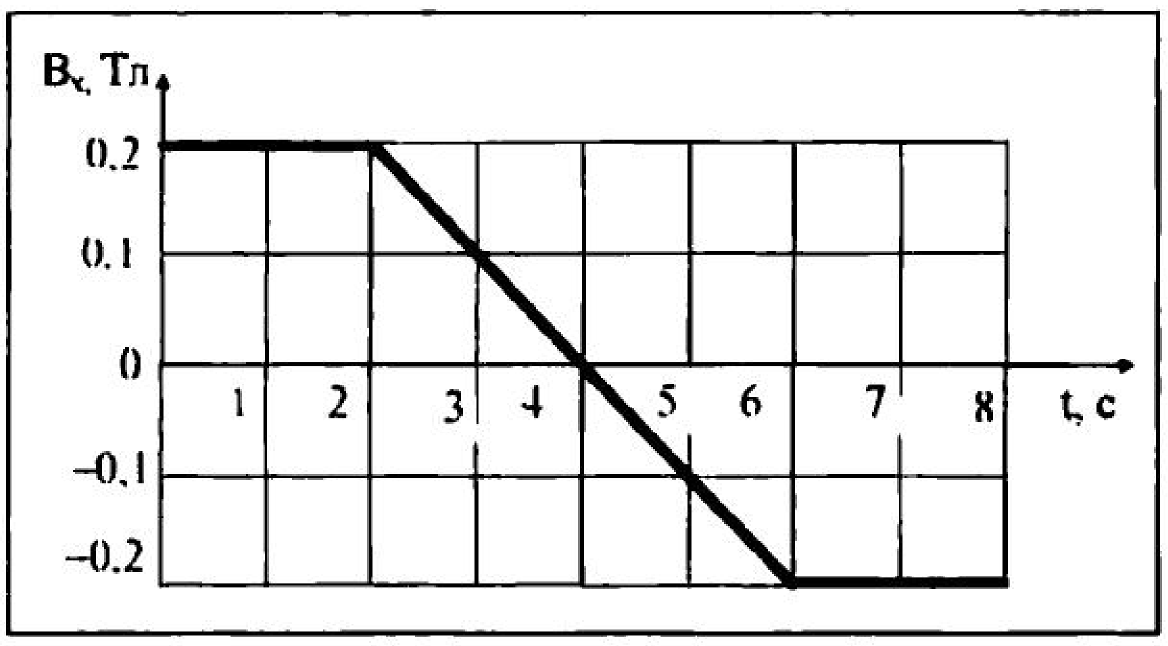
Положим в равенстве $\dfrac{1}{F} = (n-1)(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2})$ $R_1 = R_2 = R$; $F = 0{,}5R$, получим

$\dfrac{1}{0{,}5R} = (n-1)\cdot\dfrac{2}{R}$. Откуда n = 2.

Ответ: $\boxed{n = 2}$

ЗАДАЧА 9. (12 баллов)

$$q=\frac{|\Delta\Phi|}{R}=\frac{B_{t=2}\cdot S}{R}=\frac{0{,}2\cdot 10^{-2}}{10^{-2}}=0{,}2\ \ Кл$$



Ответ: $\boxed{q=\frac{B_{t=2}\cdot S}{R}=0{,}2\ \ Кл}$

ЗАДАЧА 10. (12 баллов)

Пусть в момент отрыва верхнего шарика от вертикальной плоскости гантелька составляет угол α с вертикалью, скорость верхнего шарика равна v, скорость нижнего – u.

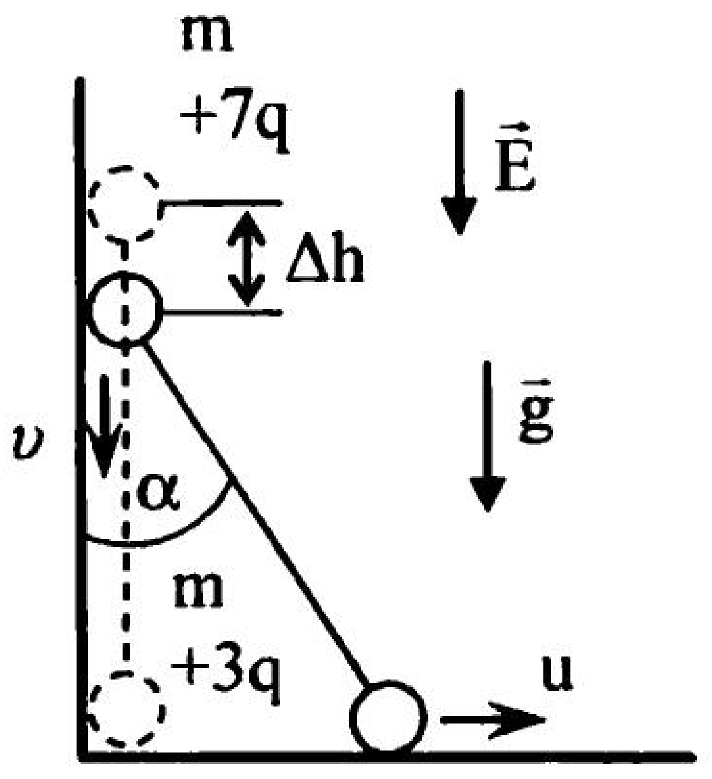
Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{mu^2}{2}=mg\Delta h+7qE\Delta h=(mg+7qE)L(1-\cos\alpha),\text{ или}$$

$$v^2+u^2=\frac{2(mg+7qE)}{m}L(1-\cos\alpha)\qquad(1)$$

(m-масса каждого шарика; 7q-заряд верхнего шарика,

v, u, g , E– модули соответствующих векторов).



Поскольку стержень жесткий, $v\cos\alpha=u\sin\alpha$. Следовательно, $$v=u\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\qquad(2)$$

Подставляя (2) в (1) получим

$$u^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+u^2=\frac{2(mg+7qE)}{m}L(1-\cos\alpha).$$

После преобразований получим $u^2=\frac{2(mg+7qE)}{m}L\left(\cos^2\alpha-\cos^3\alpha\right)$ (3)

До момента отрыва центр масс гантельки двигался с горизонтальным ускорением (это ускорение сообщалось силой реакции вертикальной стенки). Поэтому к моменту отрыва верхнего шарика от вертикальной стенки скорость u (а, следовательно, и горизонтальная составляющая скорости) максимальна. Найдем значение cos α, при котором выражение $\cos^2\alpha-\cos^3\alpha$ (смотри формулу (3)) максимально. Обозначим x = cos α.

$\left(x^2-x^3\right)'=2x-3x^2$ $2x-3x^2=0$ при x = 2/3, т.е. cos α = 2/3.

Подставив это значение $\cos\alpha$ в (3), найдем: $u = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{(mg + 7qE)L}{m}}$.

Ответ: $\boxed{u = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{(mg+7qE)L}{m}}}$.

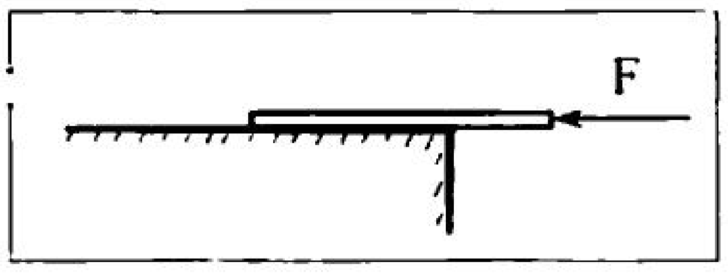
3.8. Заключительный этап олимпиады школьников

ВАРИАНТ № 2

ЗАДАЧА 1.

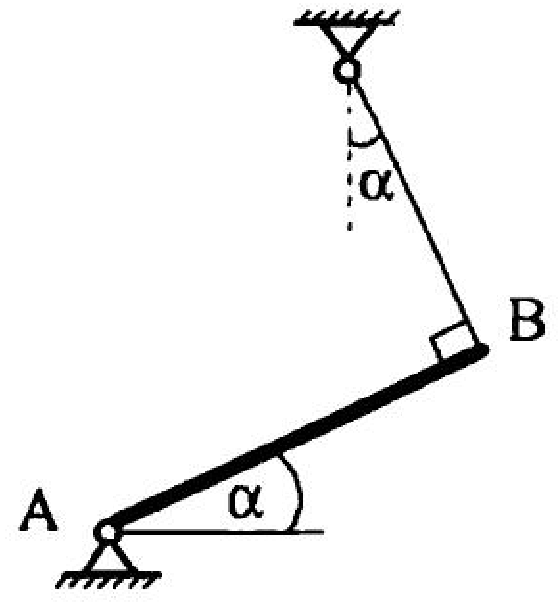
Тело массы m = 1 кг движется по оси x по закону $x = 5 + 4t - 2t^2$ м. Определите величину импульса тела в момент времени t = 1 с.

ЗАДАЧА 2.



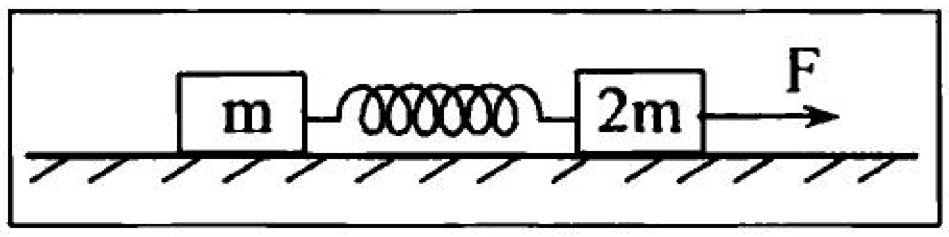
Пятая часть однородной линейки, имеющей массу m и длину L, выступает за край стола. Найдите минимальную величину работы A, которую необходимо совершить, чтобы переместить всю линейку на стол, сдвигая её силой, направленной вдоль длинной стороны. Коэффициент трения между линейкой и столом равен μ.

ЗАДАЧА 3.



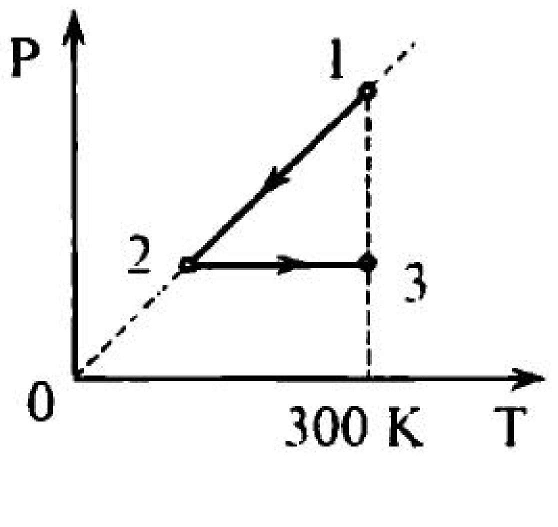
Однородный стержень массы m закреплён в точке A с помощью шарнира и удерживается за второй конец стержня под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту с помощью невесомой нерастяжимой нити, расположенной под таким же углом α к вертикали, как показано на рисунке. Найдите силу натяжения нити.

ЗАДАЧА 4.



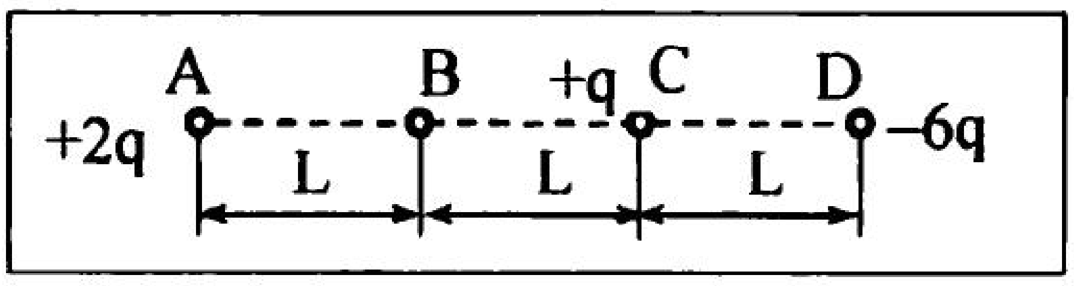
На горизонтальной плоскости лежат два бруска, массы которых m и 2m, соединенных ненапряженной пружиной. Какую наименьшую постоянную силу F, направленную горизонтально, нужно приложить к бруску массы 2m, чтобы сдвинулся и второй брусок? Коэффициент трения брусков о плоскость равен μ.

ЗАДАЧА 5.



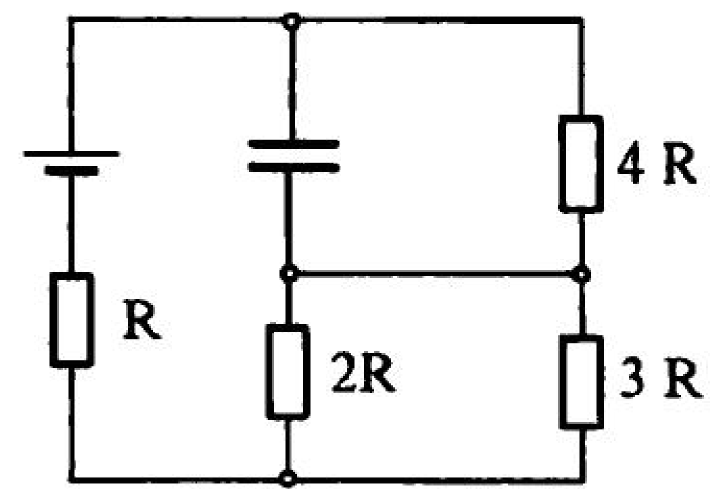
Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль сначала охладили, а затем нагрели до первоначальной температуры 300 K, увеличив при этом объём газа в 3 раза. Найдите количество теплоты, отданное газом на участке 1–2.

З А Д А Ч А 6.



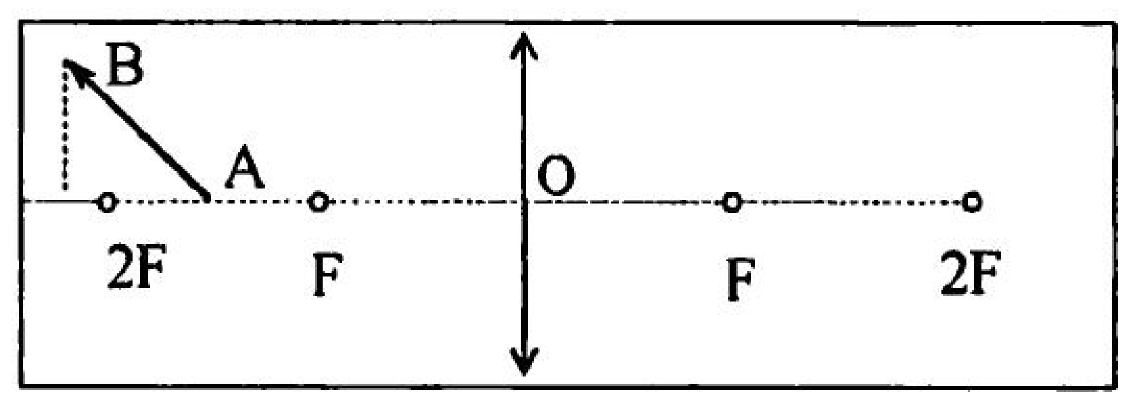
В точках A, C, D расположены неподвижные точечные заряды +2q, +q, $-6q$, как показано на рисунке. Определите работу сил поля при перемещении заряда +q из бесконечности, где потенциал электрического поля принимается равным нулю, в точку B.

З А Д А Ч А 7.



В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, установившееся напряжение на конденсаторе U = 20 В. Считая параметры элементов схемы известными, определите величину ЭДС источника тока. Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

З А Д А Ч А 8.

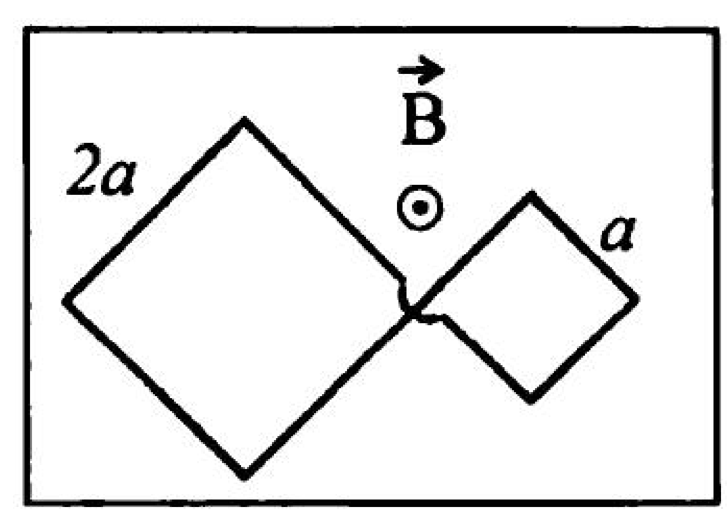


Постройте изображение предмета AB в собирающей линзе.

З А Д А Ч А 9.

При фотоэффекте максимальный импульс, передаваемый поверхности вольфрамовой пластинки при вылете каждого электрона $p = 3{,}45 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с. Найдите энергию ε квантов применяемого облучения. Работа выхода вольфрама A = 4,5 эВ.

З А Д А Ч А 10.



Из проволоки, общим сопротивлением R, сделан плоский замкнутый контур, состоящий из двух квадратов со сторонами *a* и *2a*. Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией *B*, направленной перпендикулярно плоскости контура. Найдите заряд, который протечёт через поперечное сечение провода при равномерном уменьшении индукции поля до нуля. Между пересекающимися на рисунке проводами электрический контакт отсутствует.

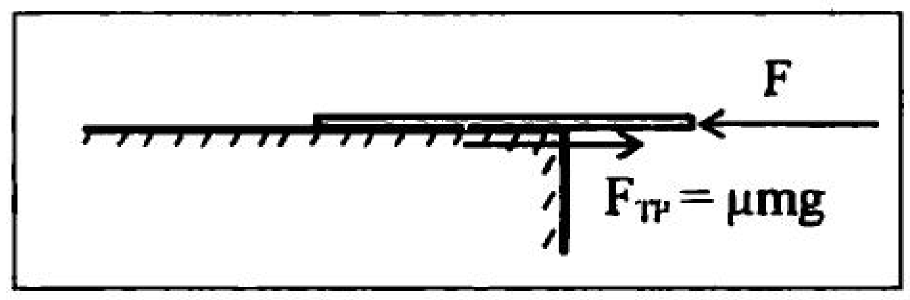
3.9. РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА № 2

ЗАДАЧА 1. (10 баллов)

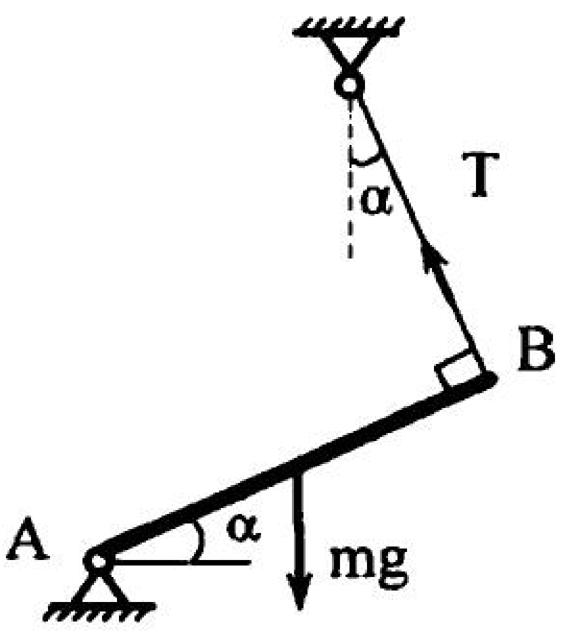
Ответ: $p = mv = mx' = m(4-4t)$. При t =1с. $p = 1 \cdot (4 - 4 \cdot 1) = 0$

ЗАДАЧА 2. (8 баллов)

Ответ: $\boxed{A = \frac{1}{5}\mu mgL}$



ЗАДАЧА 3. (10 баллов)



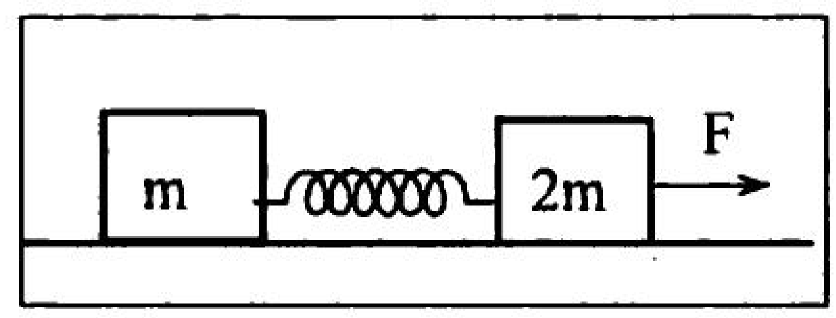
Условие равновесия стержня: $mg\frac{L}{2}\cos\alpha = TL$,

где L – длина стержня. Откуда $T = \dfrac{mg\cos\alpha}{2}$.

При $\alpha = 30^\circ$ $T = \dfrac{mg\cos\alpha}{2} = \dfrac{mg\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\boxed{T = \dfrac{mg\sqrt{3}}{4}}$

ЗАДАЧА 4. (10 баллов)



Если брусок массы m остается неподвижным при смещении на x бруска массы 2m, то сила F совершает работу по растяжению пружины и против сил трения (при условии, что в конечный момент скорость бруска массы 2m обращается в нуль): $Fx = \dfrac{kx^2}{2} + \mu \cdot 2mgx$, (1) т.е.

$F = \dfrac{kx}{2} + \mu \cdot 2mg$ (2)

Уравнение движения второго бруска массы m $ma = kx - \mu mg$ (3)

Брусок массы m сдвинется при условии $a > 0$, т.е. при условии $kx > \mu \cdot mg$ (4)

Минимальное значение $F_{min.}$ получим, если положим $kx = \mu mg$ (5)

Таким образом, подставив (5) в (2) , найдем

$$F_{min} = \frac{\mu m\ g}{2} + \mu 2mg = \frac{5}{2}\mu mg .$$

Ответ: $\boxed{F_{min} = \dfrac{5}{2}\mu mg}$

ЗАДАЧА 5. (10 баллов)

В соответствии с первым законом термодинамики $\Delta U = Q + A_{BH\,C}$.

Учитывая, что на участке 1–2 : $A_{12} = 0$, получим $Q_{12} = --\Delta U_{12}$. (1)

Формула расчёта изменения внутренней энергии: $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1)$ (2) .

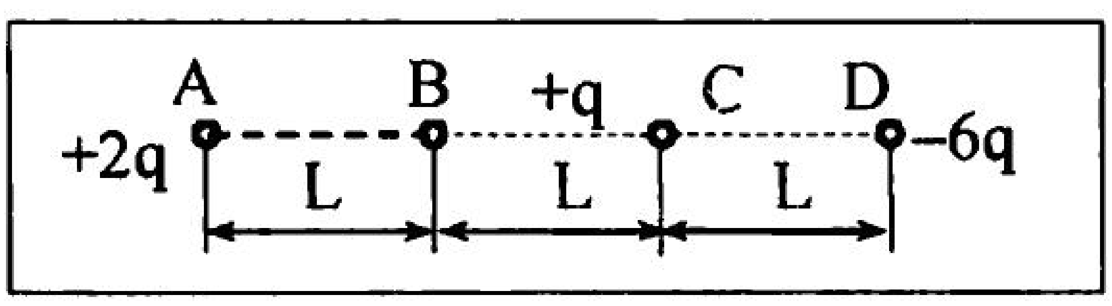
Применив закон Гей – Люссака для состояний 2 и 3, запишем $\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2}$, откуда

$T_2 = \frac{V_2}{V_3}T_3$. Учитывая, что объём газа в состоянии 3 V_3 увеличился в три раза, а температура в состоянии 3 равна первоначальной, т.е. $T_3 = T_1$, $T_2 = \frac{V_2}{V_3}T_3 = \frac{T_3}{3} = \frac{T_1}{3}$ (3). Тогда , подставив (3) в (2), а затем в (1), получим формулу для расчёта количества теплоты, отданного газом на участке 1–2:

$Q_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\nu R\left(\frac{T_1}{3} - T_1\right) = \frac{3}{2}\nu R\frac{2}{3}T_1 = \nu RT_1$. Подставив теперь числовые значения, найдём $Q_{12} = \nu RT_1 = 1 \cdot 8{,}31 \cdot 300 \approx 2{,}5$ $кДж$

Ответ: $\boxed{Q_{12} = \nu RT_1 \approx 2{,}5 кДж}$.

ЗАДАЧА 6. (8 баллов)



$A = q(\varphi_\infty - \varphi_B)$.

Используя принцип суперпозиции, найдём

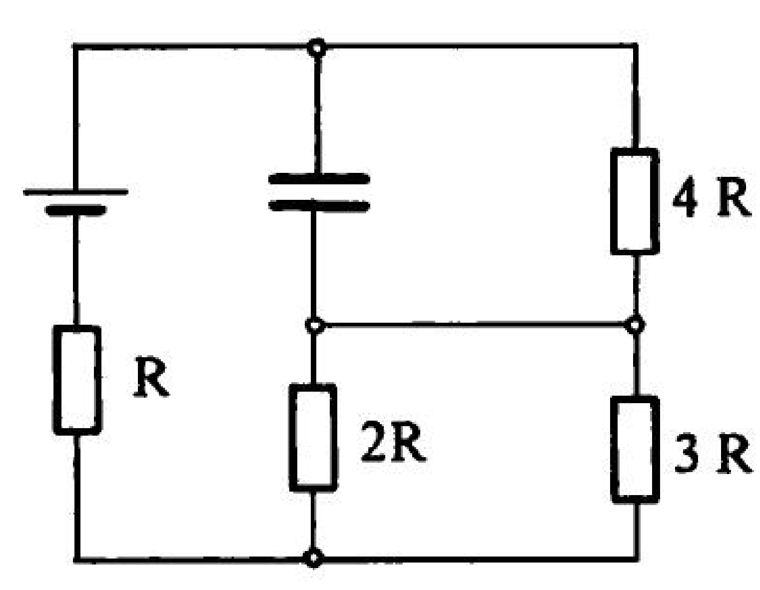
$\varphi_B = k\frac{2q}{L} + k\frac{q}{L} - k\frac{6q}{2L} = 0$, тогда $A = 0$.

Ответ: $\boxed{A = 0}$

ЗАДАЧА 7. (10 баллов)

1) Полное сопротивление цепи

$R_\Sigma = R + 4R + \frac{6}{5}R = \frac{31}{5}R$.



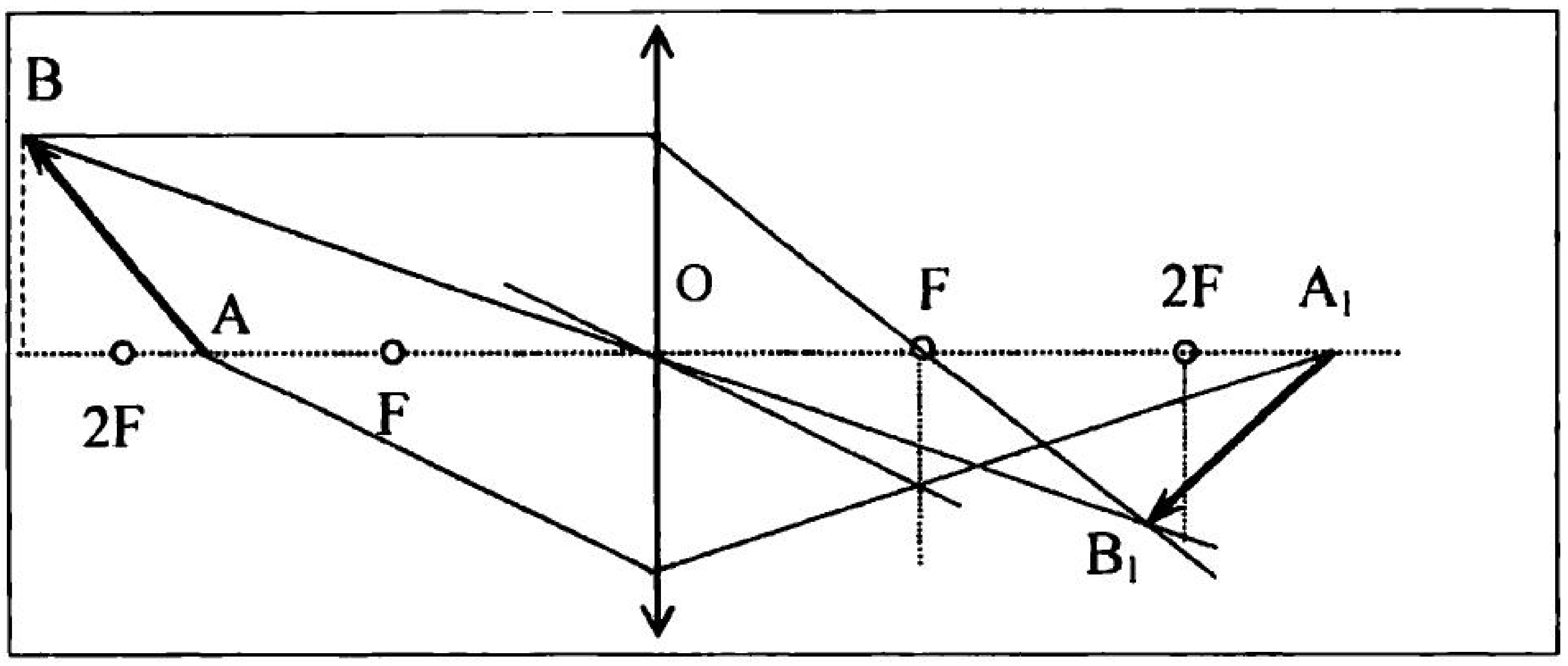
2) Ток в источнике ЭДС равен току в сопротивлении, подключенном параллельно конденсатору

$\frac{E}{R_\Sigma} = \frac{U}{4R}$, откуда $E = \frac{U \cdot R_\Sigma}{4R} = \frac{31}{4 \cdot 5}U = \frac{31}{20}20 = 31B$.

Ответ: $\boxed{E = 31\ B}$.

ЗАДАЧА 8. (10 баллов)

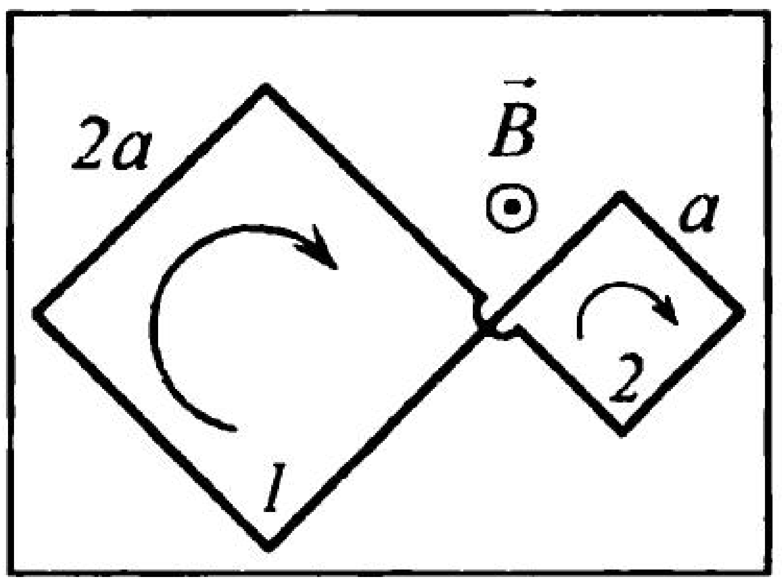
Ответ:



ЗАДАЧА 9. (12 баллов)

Ответ: $\boxed{\varepsilon = h\nu = A + \frac{p^2}{2m} = 7{,}85 \cdot 10^{-19}\ Дж}$.

ЗАДАЧА 10. (12 баллов)



$E = E_1 - E_2$. По закону электромагнитной индукции Фарадея

$E = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t}$, где $\Delta\Phi_1$ *и* $\Delta\Phi_2$ – изменения магнитных потоков через поверхность большого и малого квадратов.

$$E = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = -S_1\frac{\Delta B}{\Delta t} + S_2\frac{\Delta B}{\Delta t} = (S_2 - S_1)\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

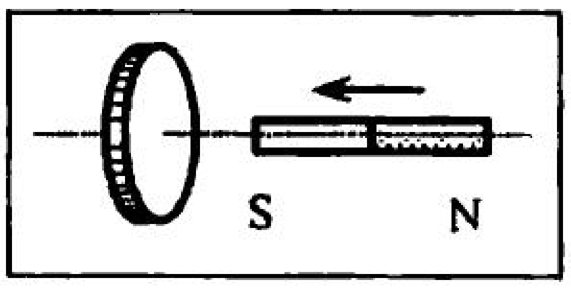
По закону Ома $I = \frac{E}{R}$. Искомый заряд $q = I\Delta t = \frac{S_2 - S_1}{R}\Delta B$. так как $\Delta B = 0 - B = -B$,

то $q = \frac{S_1 - S_2}{R}B = \frac{(2a)^2 - a^2}{R} \cdot B = \frac{3a^2}{R}B$.

Ответ: $\boxed{q = \frac{3a^2}{R}B}$.

3.10. ВАРИАНТ № 3

ЗАДАЧА 1.

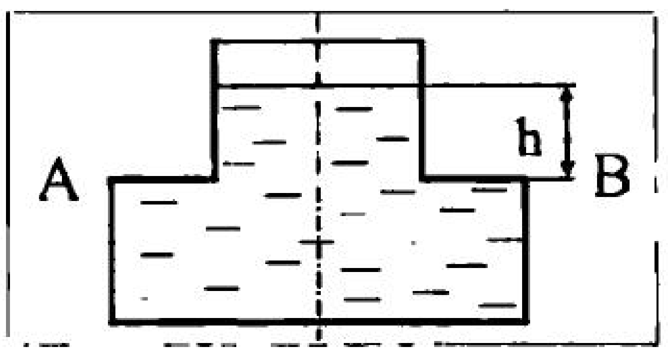


Южный полюс магнита приближается с некоторой скоростью к металлическому кольцу, двигаясь вдоль его оси перпендикулярно плоскости кольца. На рисунке покажите направление индукционного тока в кольце.

З А Д А Ч А 2.

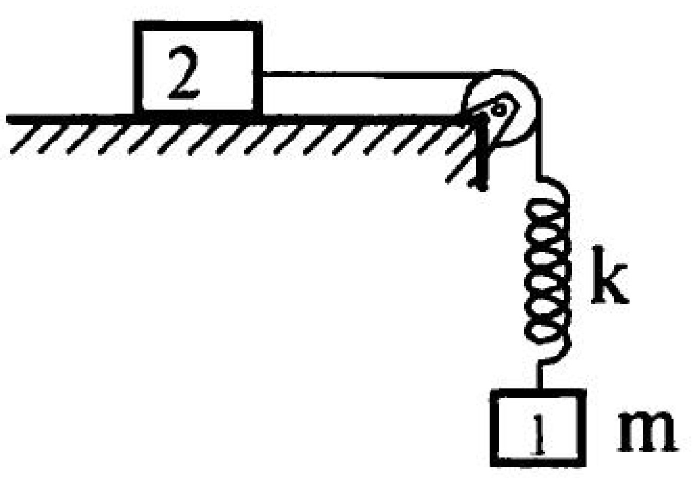
На столе лежат стопкой 10 одинаковых книг. В каком случае нужно приложить меньшую силу: чтобы сдвинуть четыре верхние книги или вытянуть из стопки третью книгу сверху? Ответ обосновать.

З А Д А Ч А 3.



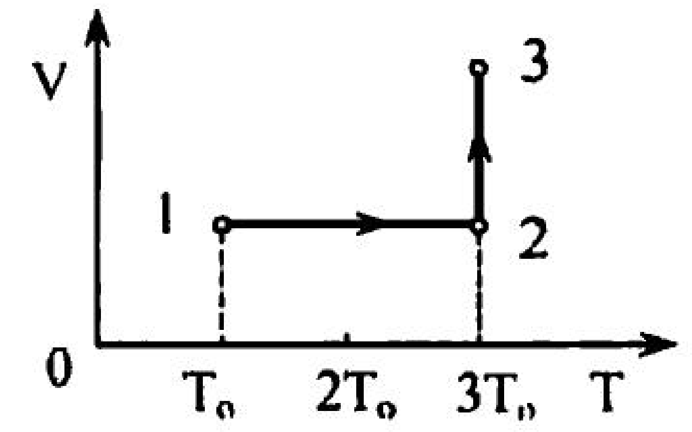
Открытый бак, состоящий из двух соосных цилиндров диаметрами d и 2d, заполнен жидкостью плотности ρ, как показано на рисунке. Бак стоит на полу лифта, который поднимается вверх с ускорением $a = 0{,}25\ g$. Определите силу давления жидкости на горизонтальную поверхность АВ, соединяющую ба цилиндра. Атмосферное давление равно p_0.

З А Д А Ч А 4.



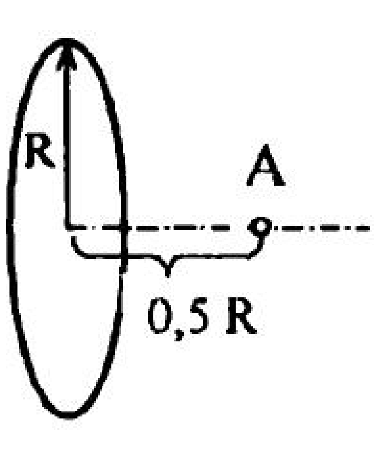
Груз массы m подвешен через пружину жёсткости k на нерастяжимой нити, перекинутой через блок, соединённой с бруском 2, лежащим на горизонтальной плоскости. В начальный момент груз m удерживается так, что пружина находится в ненапряжённом состоянии, затем его отпускают без начальной скорости. Найдите минимальную массу бруска 2, при которой он ещё будет оставаться неподвижным. Коэффициент трения между бруском 2 плоскостью равен μ. Массой пружины, нити, блока и трением в нём пренебречь.

З А Д А Ч А 5.



Один моль одноатомного идеального газа переходит из состояния 1 в состояние 3 по изохоре 1-2 и изотерме 2-3, как показано на графике зависимости объёма V от температуры T ($T_0 = 100$ K). На участке 2–3 к газу подводят 2,5 кДж теплоты. Найдите отношение полной работы газа A_{123} ко всему количеству подведённой к газу теплоты Q_{123}.

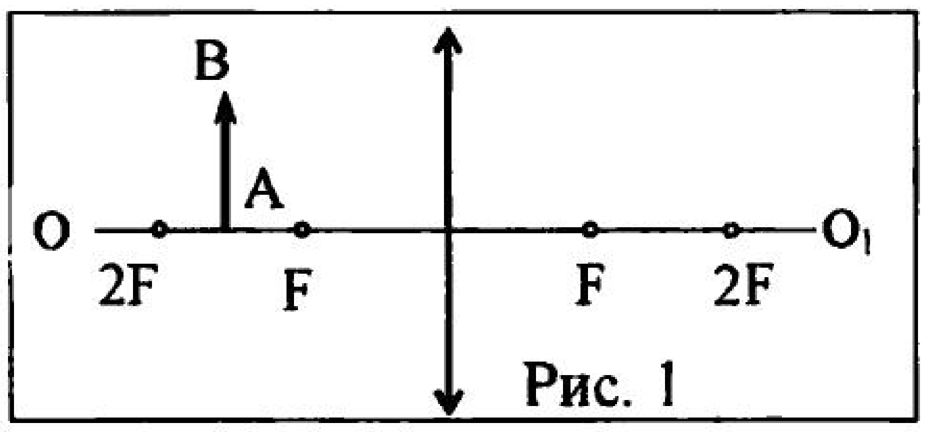
З А Д А Ч А 6.

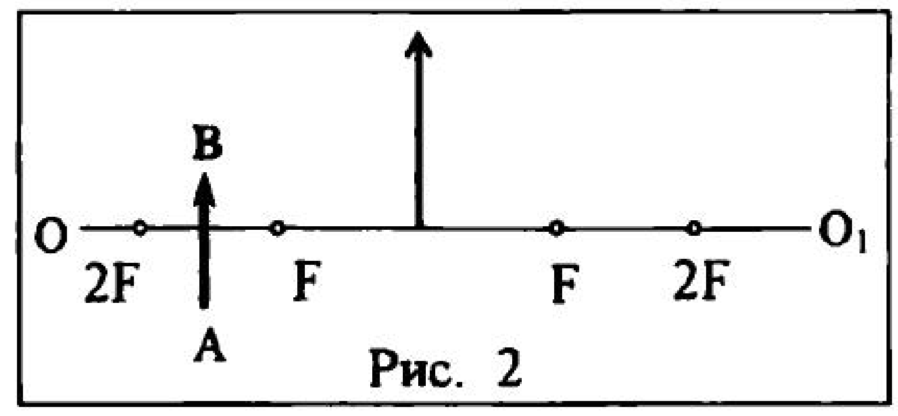


По кольцу радиуса R равномерно распределён заряд q. Определите потенциал φ в точке А, находящейся на оси, перпендикулярной плоскости кольца, и отстоящей от центра кольца на расстоянии h = 0, 5 R.

З А Д А Ч А 7.

Предмет располагается перед собирающей линзой, как показано на рис. 1. Линзу разрезали по оси OO_1. Нижнюю половину линзы удалили, а верхнюю половину сдвинули вверх по отношению к предмету, как показано на рис. 2. Постройте изображение предмета в оставшейся верхней половине линзы (рис. 2).



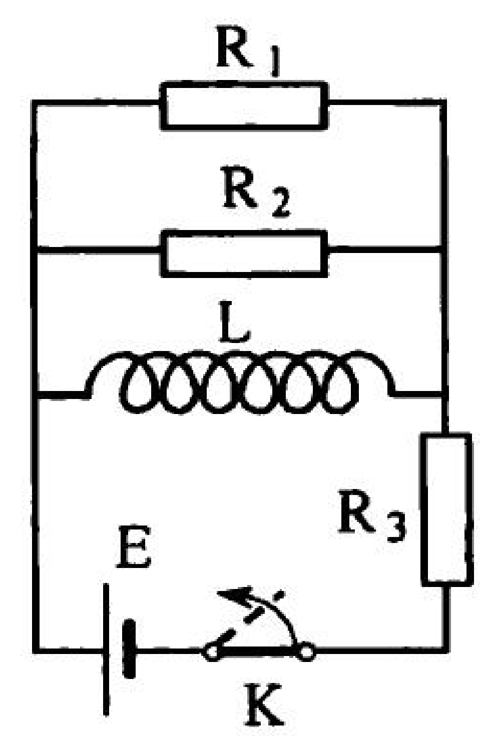


З А Д А Ч А 8.

Найдите максимальный потенциал φ, до которого может зарядиться удаленный от других тел медный шарик при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 0.14$ мкм. Работа выхода для меди $A = 4.47$ эВ.

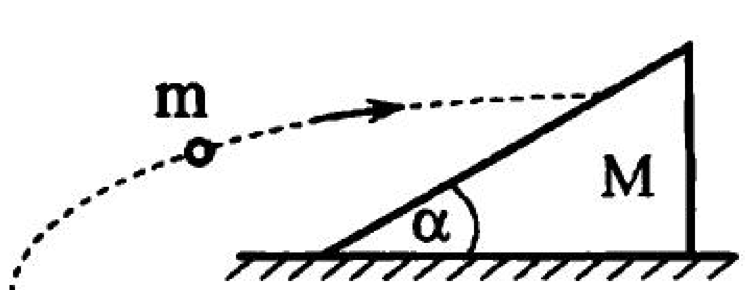
З А Д А Ч А 9.

В электрической цепи, представленной на рисунке, ключ K в начальный момент замкнут, и по цепи идет постоянный ток. Какое количество теплоты выделится в резисторе R_1 после размыкания ключа. Параметры элементов цепи: индуктивность катушки равна L, $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = R$, ЭДС источника тока равна E. Активным сопротивлением катушки и сопротивлением источника тока пренебречь.



З А Д А Ч А 10.

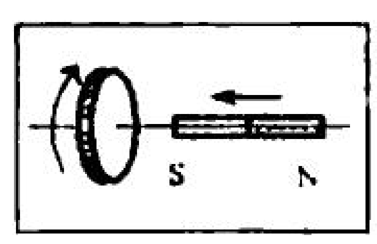
На гладкой горизонтальной поверхности массивной плиты покоится клин массы M с углом наклона $\alpha = 30°$. Клин плотно прилегает к поверхности плиты. Летящий по параболической траектории шар массы m ударяется о гладкую наклонную поверхность клина, причём в момент удара его скорость направлена горизонтально (удар абсолютно упругий). В результате клин начинает двигаться по плите. Найдите отношение m/M, если через некоторое время шар попадает в ту же самую точку на клине, от которой он отскочил.



3.11. РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА № 3

ЗАДАЧА 1. (8 баллов)

Ответ:



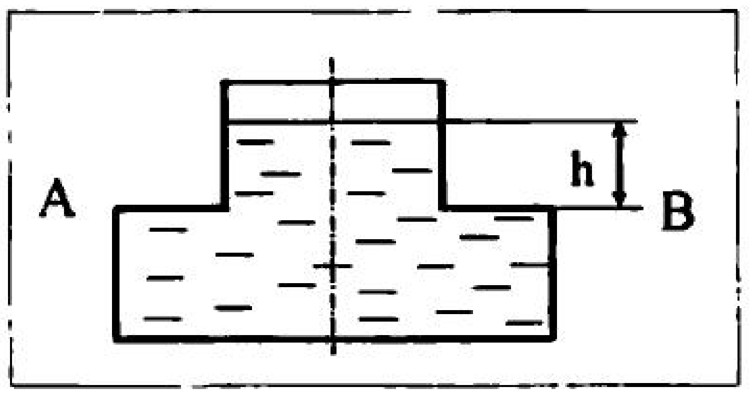
ЗАДАЧА 2. (8 баллов)

1) Сила F_1, необходимая для того, чтобы сдвинуть верхние четыре книги $F_1 = 4\mu mg$.

2) Сила F_2, необходимая для того, чтобы вытянуть из стопки третью книгу: $F_2 = 2\mu mg + 3\mu mg = 5\mu mg$. $F_1 < F_2$. Таким образом, меньшую силу $F_1 = 4\mu mg$ нужно приложить, чтобы сдвинуть верхние четыре книги.

Ответ: Меньшую силу $F_1 = 4\mu mg$ нужно приложить, чтобы сдвинуть верхние четыре книги.

ЗАДАЧА 3. (10 баллов)



$F = [p_o + \rho h(g + a)]S$, где

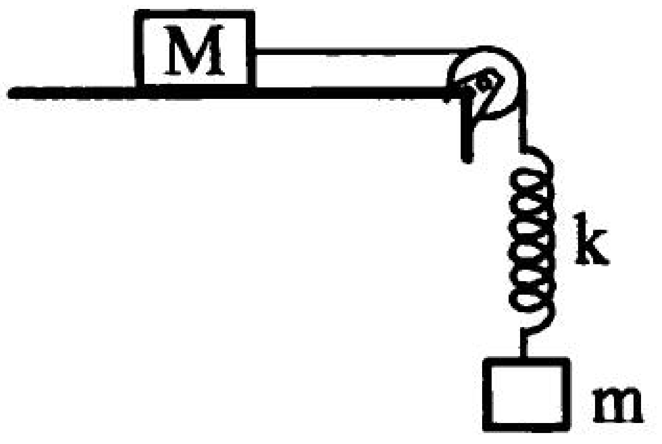
$$S = \frac{\pi}{4}\left((2d)^2 - d^2\right) = \frac{3}{4}\pi d^2$$

$$F = [p_o + \rho h(g + 0{,}25\,g)]\frac{3}{4}\pi d^2 = \frac{3}{4}\pi d^2 (p_o + 1{,}25\,\rho gh).$$

$$F = \frac{3}{4}\pi d^2 (p_o + 1{,}25\,\rho gh).$$

Ответ: $\boxed{F = \frac{3}{4}\pi d^2 (p_o + 1{,}25\,\rho gh)}$.

ЗАДАЧА 4. (10 баллов)



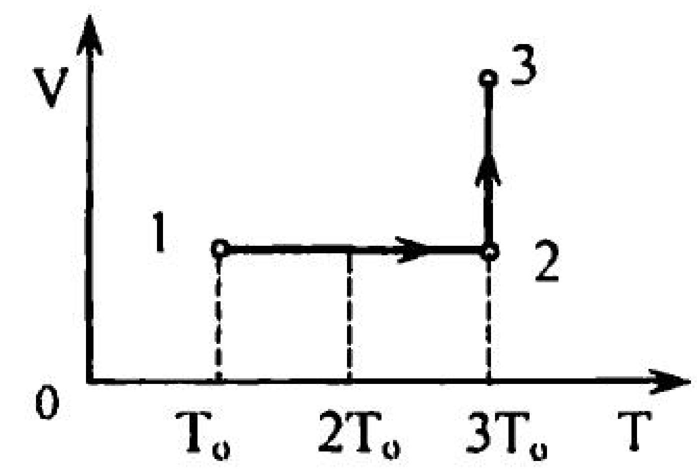
Брусок массы M на плоскости остается неподвижным до тех пор, пока сила упругости, действующая на него со стороны нити, не достигнет максимального значения силы трения покоя, т.е. $F_{TP} = T$, где $F_{TP} = \mu N = \mu Mg$. Тогда $\mu Mg = T$ (1).

Величина силы упругости нити T зависит от амплитуды колебаний груза m. Амплитуда A равна начальному отклонению груза от положения равновесия, которое определяется равенством $mg = kx_o = kA$, откуда $x_o = A = \frac{mg}{k}$. Следовательно, максимальное растяжение пружины равно $x_{\max} = 2A = \frac{2mg}{k}$. Соответственно, сила упругости $T = kx_{\max} = 2mg$ (2).

Подставляя (2) в (1), получим $\mu Mg = 2mg$, откуда $M = \frac{2mg}{\mu g} = \frac{2m}{\mu}$.

Ответ: $\boxed{M = \dfrac{2m}{\mu}}$.

ЗАДАЧА 5. (10 баллов)

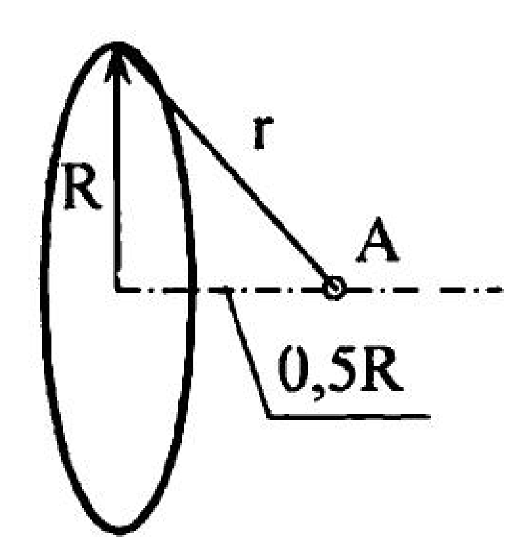


Согласно первому закону термодинамики $Q_{123} = \Delta U_{123} + A_{123}$, где $A_{123} = A_{12} + A_{23}$ и $\Delta U_{123} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23}$. В изохорном процессе $A_{12} = 0$, и $A_{123} = A_{23}$; а в изотермическом процессе $\Delta U_{23} = 0$ и $\Delta U_{123} = \Delta U_{12}$. Поэтому $Q_{123} = \Delta U_{12} + A_{23}$. При переходе $2 \to 3$: $Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = A_{23}$. Следовательно, $Q_{123} = \Delta U_{12} + Q_{23}$. Изменение внутренней энергии газа при переходе $1 \to 2$: $\Delta U_{12} = \dfrac{3}{2}\nu R \Delta T_{12}$. Поскольку $\Delta T_{12} = 2T_0$, то $\Delta U_{12} = 3\nu R T_0$. Поэтому:

$Q_{123} = 3\nu R T_0 + Q_{23}$. $\dfrac{A_{123}}{Q_{123}} = \dfrac{Q_{23}}{3\nu R T_0 + Q_{23}} \approx 0{,}5$.

Ответ: $\boxed{\dfrac{A_{123}}{Q_{123}} \approx 0{,}5}$.

ЗАДАЧА 6. (10 баллов)



$\varphi = k\dfrac{q}{r}$; $r = \dfrac{R}{2}\sqrt{5}$; $\varphi = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_o R\sqrt{5}} = \dfrac{q\sqrt{5}}{10\pi\varepsilon_o R}$.

Ответ: $\boxed{\varphi = \dfrac{q\sqrt{5}}{10\pi\varepsilon_o R}}$.

ЗАДАЧА 7. (10 баллов)

Ответ:

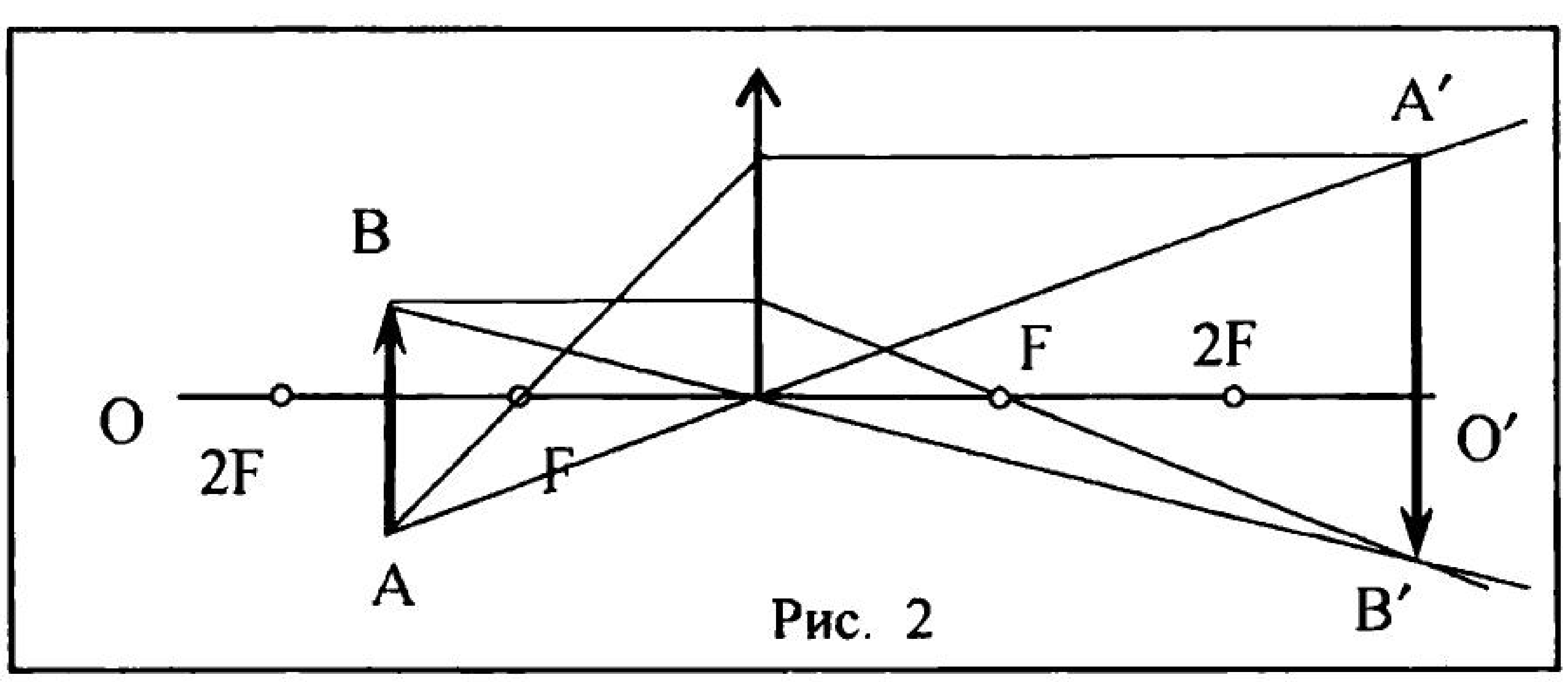


Рис. 2

ЗАДАЧА 8. (10 баллов)

В результате фотоэффекта на шарике накапливается положительный заряд, поле которого тормозит фотоэлектроны. Величина заряда определяется электрической ёмкостью шарика и его потенциалом, т.е. $q = 4\pi\varepsilon_o r \cdot \varphi$. Максимальный потенциал φ_{max} шарика зависит от начальной кинетической энергии электронов. Так как приращение кинетической энергии электронов равно работе сил поля шарика, то, принимая потенциал поля шарика и скорость электронов в бесконечности равными нулю, а также то, что заряд электрона отрицательный, можно записать

$$\Delta W_{кин} = -e\varphi_{max}, \text{ т.е. } -\frac{mv^2_{max}}{2} = -e\varphi_{max}, \text{ откуда } \varphi_{max} = \frac{mv^2_{max}}{2e} \quad (1)$$

Используя формулу Эйнштейна для фотоэффекта, получим $\frac{mv^2_{max}}{2} = h\nu - A$ (2),

и подставив (2) в (1), получим $\varphi_{max} = \frac{h\nu - A}{e} = \frac{h\frac{c}{\lambda} - A}{e}$.

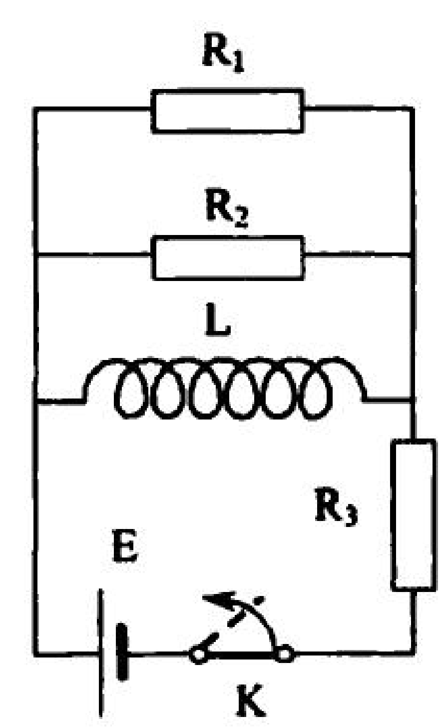
$$\varphi_{max} = \frac{6{,}625\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}14\cdot 10^{-6}} - 4{,}47 = 8{,}87 - 4{,}47 = 4{,}4 \ B.$$

Ответ: $\boxed{\varphi_{max} = \frac{h\frac{c}{\lambda} - A}{e} = 4{,}4 \ B}$.

ЗАДАЧА 9. (12 баллов)

1). До размыкания ключа установившаяся сила тока равна $I = \frac{E}{R_3}$ (через резисторы R_1 и R_2 ток не течет, так как. разность потенциалов на катушке индуктивности равна нулю).

2). После размыкания ключа электрическая энергия катушки выделится в виде тепла на резисторах R_1 и R_2 (через резистор R_3 ток течь не будет): $Q = \frac{LI^2}{2} = \frac{LE^2}{2R^2_3}$.



3). Так как резисторы R_1 и R_2 соединены параллельно, разности потенциалов на них равны: $I_1R_1 = I_2R_2 = U$.

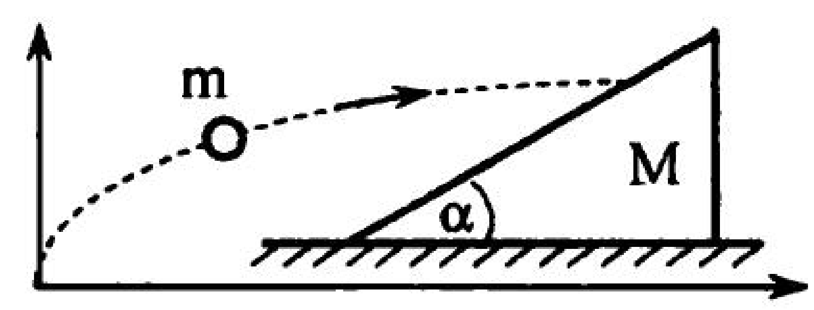
По закону Джоуля Ленца количества теплоты, выделяющиеся в резисторах за небольшой интервал времени Δt, равны $\Delta Q_1 = I_1^2R_1\Delta t = \frac{U^2}{R_1}\Delta t$,

$$\Delta Q_2 = I_2^2R_2\Delta t = \frac{U^2}{R_2}\Delta t.$$

Из этих уравнений следует, что $Q_1 R_1 = Q_2\ R_2$. Вместе с тем, $Q_1 + Q_2\ = Q$. Окончательно находим $Q_1 = \dfrac{Q}{1+\dfrac{R_1}{R_2}} = \dfrac{LE^2}{2R^2{}_3\left(1+\dfrac{R_1}{R_2}\right)}$.

Подставляя $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = R$, получим $Q_1 = \dfrac{1}{3}\dfrac{LE^2}{R^2}$.

Ответ: $\boxed{Q_1 = \dfrac{LE^2}{3R^2}}$.

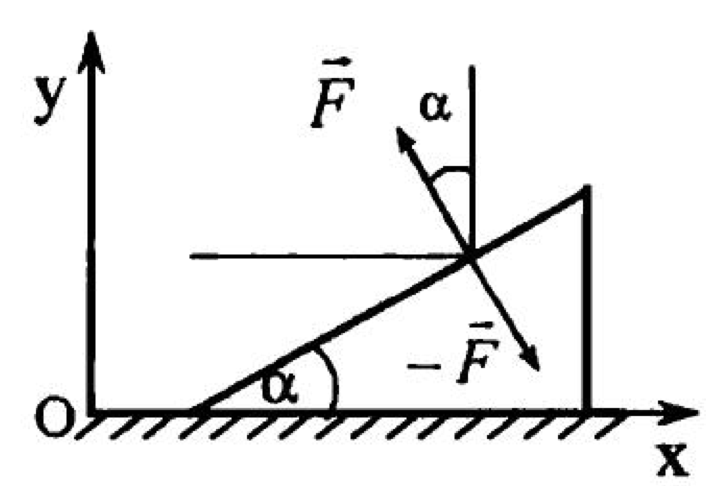


ЗАДАЧА 10. (12 баллов)

Пусть υ_o - скорость шара в момент удара.

Так как трение между клином и плитой отсутствует, то вдоль оси x выполняется закон сохранения импульса: $m\upsilon_o = (m+M)\upsilon_x$ (1), где υ_x-горизонтальная составляющая скорости шара после столкновения, равная скорости клина (в противоположном случае шар не упадёт в ту же точку).

Закон сохранения энергии: $\dfrac{m\upsilon_o{}^2}{2} = \dfrac{(m+M)}{2}\upsilon_x{}^2 + \dfrac{m}{2}\upsilon_y{}^2$ (2), где υ_y вертикальная составляющая скорости шара после столкновения с клином. Пусть за время удара Δt шарика о клин между ними действовала сила, среднее значение которой равно F. Тогда в проекциях на координатные оси уравнение второго закона Ньютона для обоих тел будет иметь вид:

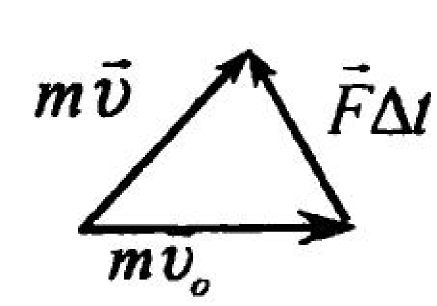


$$m\upsilon_y = F\Delta t\cos\alpha, (3)$$

$$M\upsilon_x = F\Delta t\sin\alpha\ (4).$$

Из-за отсутствия трения сила $\vec{F}$ направлена перпендикулярно поверхности клина. Исключив $F\Delta t$ из (3) и (4), получим выражение $\dfrac{m}{M}\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

откуда $\upsilon_y = \dfrac{M}{m}\upsilon_x\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. (5)



Подставим υ_y в (2) и преобразуем полученное выражение:

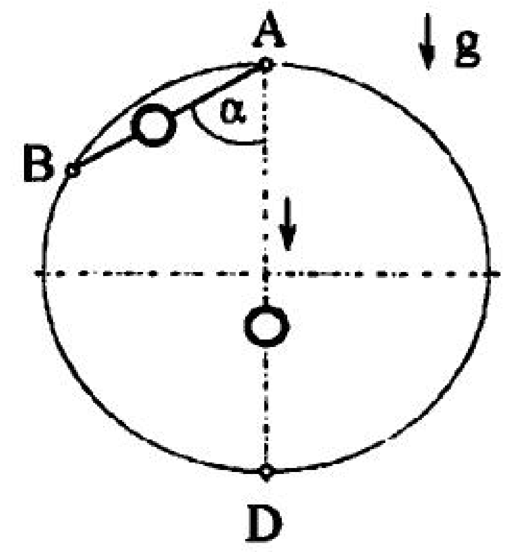
$$m^2\upsilon_o{}^2 = \frac{m^2\sin^2\alpha + mM\sin^2\alpha + M^2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\upsilon_x{}^2\ (6).$$

Возведя (1) в квадрат и поделив его на (6), найдём искомое соотношение: $\frac{m}{M} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 2$.

Ответ: $\boxed{\frac{m}{M} = 2}$.

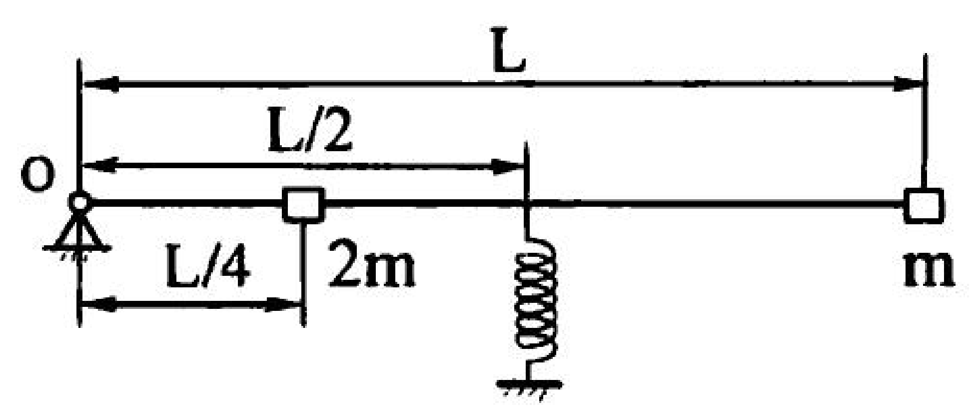
3.12. ВАРИАНТ № 4

ЗАДАЧА 1.



Из верхней точки окружности A одновременно начинают двигаться две одинаковые бусинки. Одна бусинка падает вдоль диаметра AD, другая скользит по абсолютно гладкой спице AB, вписанной в окружность, составляющей угол $\alpha = 60^0$ с вертикалью AD, как показано на рисунке. Найдите отношение времени, за которое одна бусинка достигнет точки D, ко времени, за которое другая бусинка достигнет точки B.

ЗАДАЧА 2.

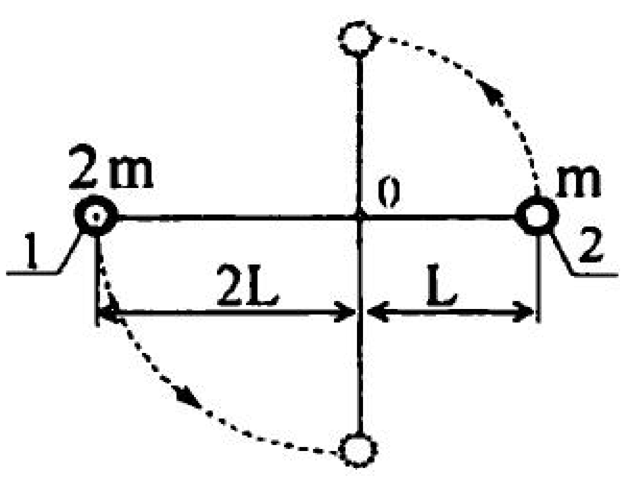


Однородный стержень длины L и массы m шарнирно закреплён в точке O. Середина стержня опирается на пружину. На стержне закреплены два маленьких груза массы 2m и m, положения которых показаны на рисунке. Найдите силу упругости, возникающую в пружине в положении равновесия стержня, если в этом положении стержень расположен горизонтально. Массой пружины и силами трения пренебречь.

ЗАДАЧА 3.

Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна υ_o = 200 м/с. В точке максимального подъёма снаряд разорвался на два одинаковых осколка. Первый осколок упал на землю вблизи точки выстрела, имея скорость в два раза больше начальной скорости снаряда. На какую максимальную высоту поднялся второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебречь.

ЗАДАЧА 4.

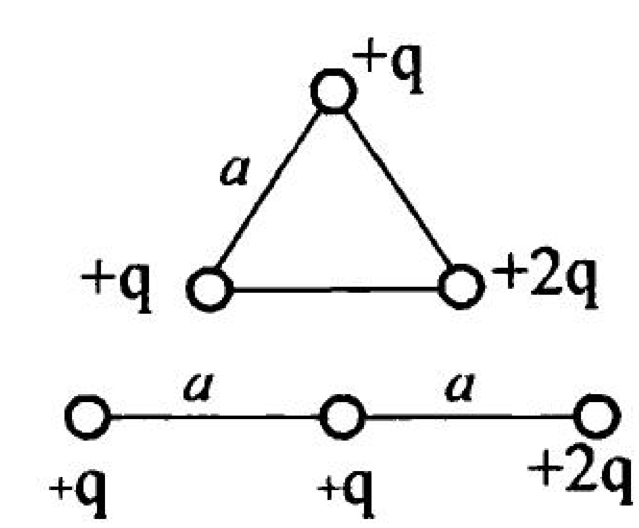


Вокруг горизонтальной оси O может свободно вращаться легкий рычаг, плечи которого равны 2L и L. На концах рычага укреплены грузы, массы которых 2m и m. Первоначально рычаг удерживается в горизонтальном положении, как показано на рисунке. Затем рычаг отпускают без начальной скорости. Определите линейные скорости грузов в момент прохождения стержнем положения равновесия.

ЗАДАЧА 5.

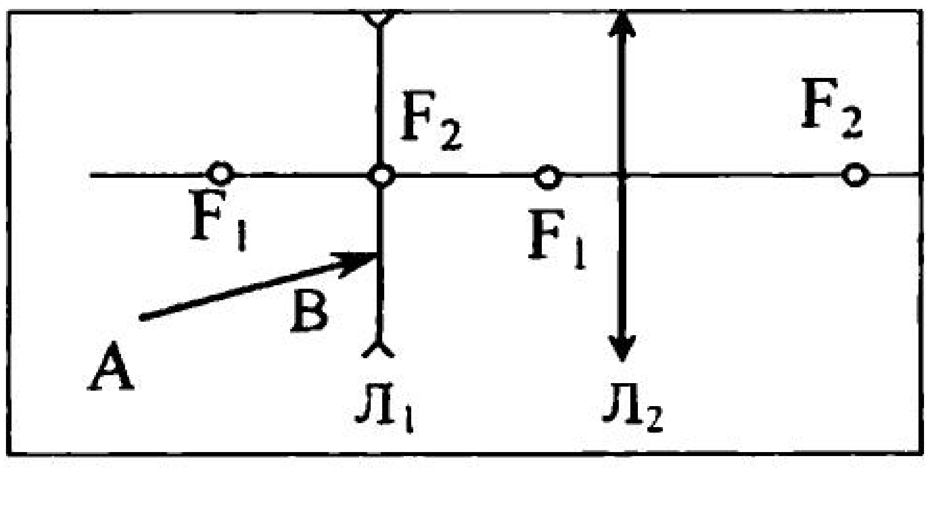
Теплоизолированный сосуд разделён пористой неподвижной перегородкой на две части. Атомы гелия могут свободно проникать через поры в перегородке, а атомы аргона – нет. В начальный момент в одной части сосуда находится $\nu_{He} = 2$ моль гелия, а в другой – $\nu_{Ar} = 1$ моль аргона. Температура гелия $T_{He} = 300\ K$, а температура аргона $T_{Ar} = 600\ K$. Считая аргон и гелий идеальными газами, определите температуру гелия после установления равновесия в системе.

ЗАДАЧА 6.



Три положительных точечных заряда +q, +q и +2q, связанных между собой нитями, расположены в вершинах правильного треугольника со стороной a. После разрыва одной из нитей заряды расположились вдоль одной прямой, как показано на рисунке. Найдите работу сил электрического поля, необходимую для перестройки системы расположения зарядов.

ЗАДАЧА 7.



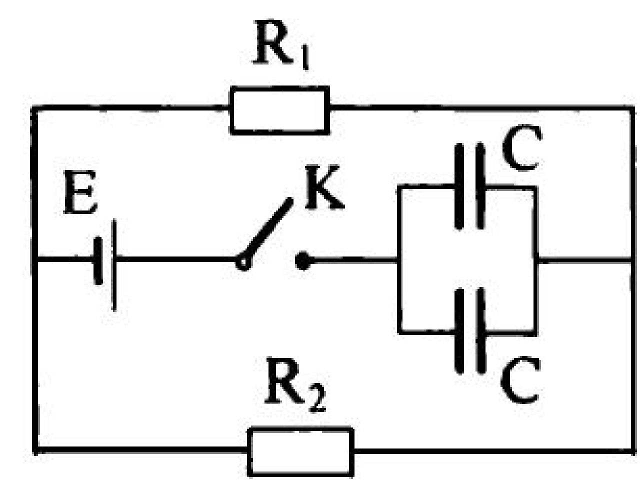
Оптическая система состоит из рассеивающей Л₁ и собирающей Л₂ линз с общей главной оптической осью. Главные фокусы рассеивающей линзы обозначены F_1, а собирающей линзы – F_2. Постройте дальнейший ход луча AB через оптическую систему.

З А Д А Ч А 8.

Найдите максимальный заряд q, который может накопиться на удаленном от других тел медном шарике радиуса r = 3 см при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 0{,}14$ мкм. Работа выхода для меди A = 4,47 эВ.

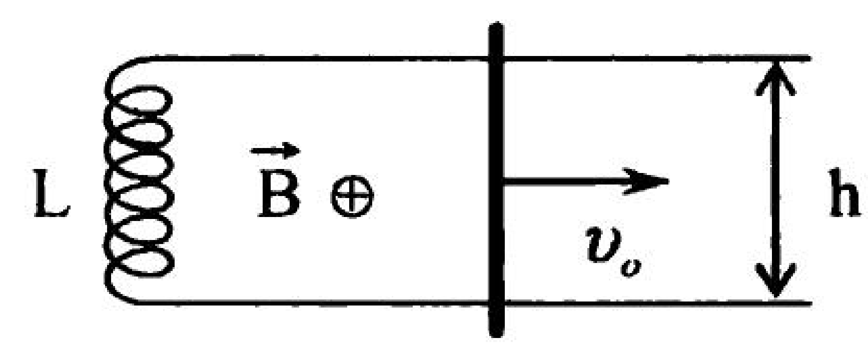
З А Д А Ч А 9.

В схеме, показанной на рисунке, перед замыканием ключа K батарея, состоящая из двух одинаковых конденсаторов ёмкости C каждый, не была заряжена. Ключ замыкают на некоторое время, в течение которого конденсаторы зарядились до напряжения U. Определите, какое количество теплоты Q_1 выделится за это время на резисторе сопротивления R_1. ЭДС источника тока равна E, его внутренним сопротивлением пренебречь.



З А Д А Ч А 10.

Горизонтальный контур образован двумя замкнутыми на катушку индуктивности L параллельными проводниками, находящимися на расстоянии h друг от друга. По проводникам без трения может скользить перемычка. Контур помещен в вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B. В начальный момент времени неподвижной перемычке сообщают скорость υ_0. Определите массу перемычки и время t_1, за которое скорость перемычки уменьшится в два раза, если известно расстояние S, которое пройдет перемычка до первой остановки. Сопротивлением всех элементов контура пренебречь.



3.13. РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА № 4

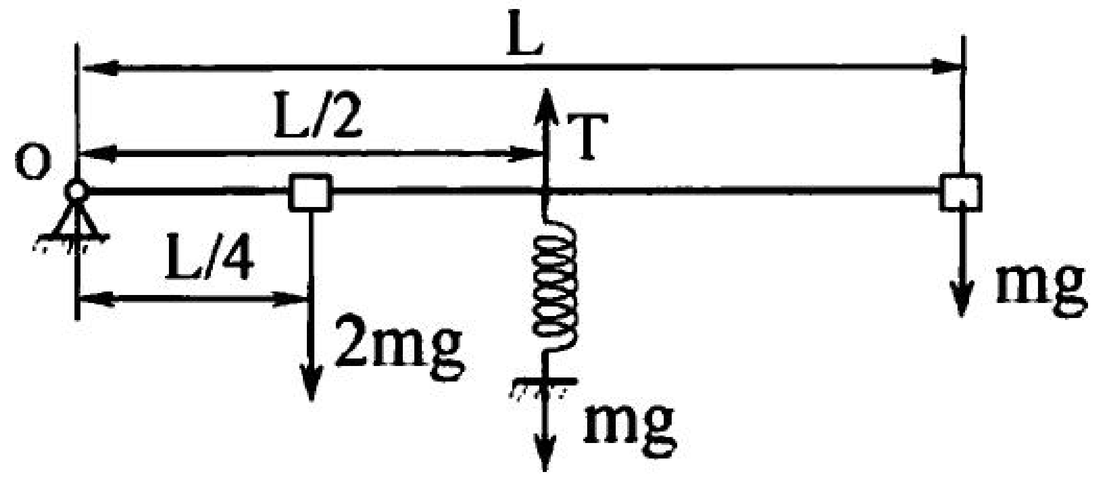
ЗАДАЧА 1. (8 баллов)

Пусть диаметр окружности равен *d*, т.е. путь, пройденный первой бусинкой $d = \frac{gt^2}{2}$, тогда время свободного падения бусинки до точки D $t_1 = \sqrt{\frac{2d}{g}}$. Перемещение второй бусинки $AB = d\cos\alpha$, а её ускорение $a = g\cos\alpha$, следовательно, время её движения до точки B $t_2 = \sqrt{\frac{2AB}{a}} = \sqrt{\frac{2d\cos\alpha}{g\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{2d}{g}}$; $t_1 = t_2$.

Вывод: Бусинки одновременно достигают точек B и D, т.е. $\frac{t_1}{t_2} = 1$.

Ответ: $\boxed{\dfrac{t_1}{t_2}=1}$

ЗАДАЧА 2. (8 баллов)



Условие равновесия стержня: $\sum M_0(F_i)=0$

$$-2mg\frac{L}{4}-mg\frac{L}{2}-mgL+T\frac{L}{2}=0,$$ отсюда

$$T=\left(2mg\frac{1}{4}+mg\frac{1}{2}+mg\right)\cdot 2=4mg$$

Ответ: $\boxed{T=4mg}$

ЗАДАЧА 3. (10 баллов)

Согласно закону сохранения энергии высоту подъёма снаряда и второго осколка можно рассчитать по формулам: $mgh=\dfrac{m\upsilon_o^{\,2}}{2}$, откуда $h=\dfrac{\upsilon_o^{\,2}}{2g}$, $m_2gh_{\max}=m_2gh+\dfrac{m_2\upsilon_2^{\,2}}{2}$.

Из закона сохранения энергии определяем начальную скорость первого осколка:

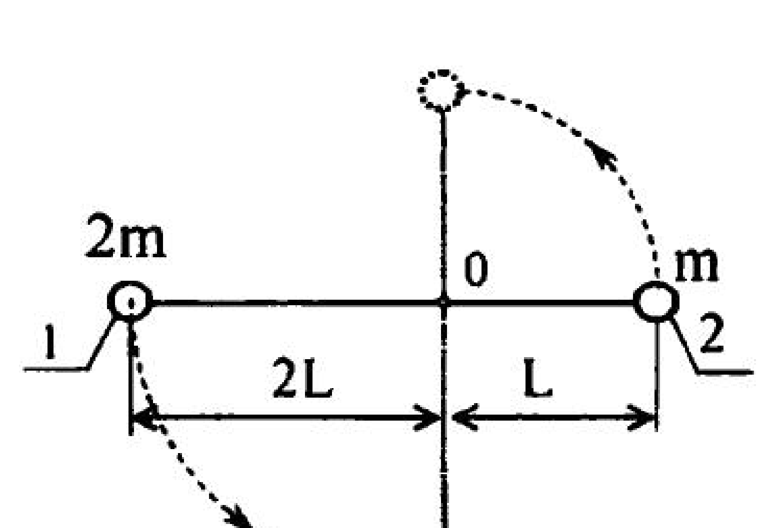
$$\frac{m_1(2\upsilon_o)^2}{2}=m_1gh+\frac{m_1\upsilon_1^{\,2}}{2},$$ откуда $\upsilon_1=\sqrt{4\upsilon_o^{\,2}-2gh}=\sqrt{4\upsilon_o^{\,2}-\upsilon_o^{\,2}}=\sqrt{3}\upsilon_o$.

Согласно закону сохранения импульса $m_1\upsilon_1=m_2\upsilon_2$,

откуда начальная скорость второго осколка после разрыва снаряда $\upsilon_2=\dfrac{m_1\upsilon_1}{m_2}=\upsilon_o\sqrt{3}$.

Максимальная высота подъёма второго осколка $h_{\max}=\dfrac{2\upsilon_o^{\,2}}{g}=8000\text{м}$.

Ответ: $\boxed{h_{\max}=\dfrac{2\upsilon_o^{\,2}}{g}=8000\text{м}}$



ЗАДАЧА 4. (10 баллов)

Пусть скорости грузов в момент прохождения положения равновесия равны υ_1 и υ_2. Тогда, пренебрегая трением, в соответствии с законом сохранения механической энергии запишем:

$$\frac{2m\upsilon_1^{\,2}}{2}+\frac{m\upsilon_2^{\,2}}{2}=2mg2L-mgL,\ (1)$$

Поскольку угловая скорость ω вращения грузов одинакова, то

$\upsilon_1 = \omega 2L$, $\upsilon_2 = \omega L$, $\upsilon_1 = 2\upsilon_2$ (2).

Подставив (2) в (1), получим $4\upsilon_2^{2} + \frac{\upsilon_2^{2}}{2} = 3gL$, $9\upsilon_2^{2} = 6gL$.

Следовательно, искомые скорости равны: $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2gL}{3}}$; $\upsilon_1 = 2\sqrt{\frac{2gL}{3}}$.

Ответ: $\boxed{\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2gL}{3}}}$; $\boxed{\upsilon_1 = 2\sqrt{\frac{2gL}{3}}}$.

ЗАДАЧА 5. (10 баллов)

He	Ar
$\nu_{He} = 2$	$\nu_{Ar} = 1$
$T_{He} = 300$	$T_{Ar} = 600$

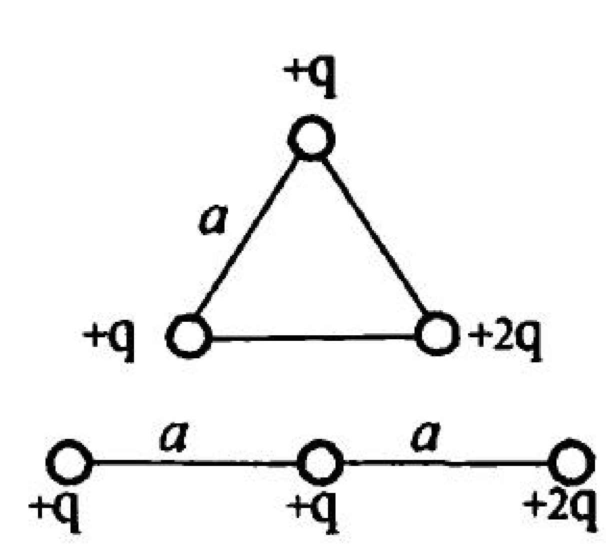
1) После установления равновесия в системе, температура обеих частей сосуда станет одинаковой и равной Т, а гелий равномерно распределится по всему сосуду.

2) Температура в сосуде определяется из закона сохранения энергии $U = \frac{3}{2}\nu_{He}RT_{He} + \frac{3}{2}\nu_{Ar}RT_{Ar} = \frac{3}{2}(\nu_{He} + \nu_{Ar})RT$.

Отсюда $T = \frac{\nu_{He}T_{He} + \nu_{Ar}T_{Ar}}{\nu_{He} + \nu_{Ar}} = \frac{2\cdot 300 + 1\cdot 600}{3} = \frac{600+600}{3} = 400K$.

Ответ: $\boxed{T = 400K}$

ЗАДАЧА 6. (10 баллов)



Работа сил электрического поля, необходимая для перестройки системы, равна убыли потенциальной энергии взаимодействующих зарядов при изменении конфигурации расположения зарядов $A = W_1 - W_2$.

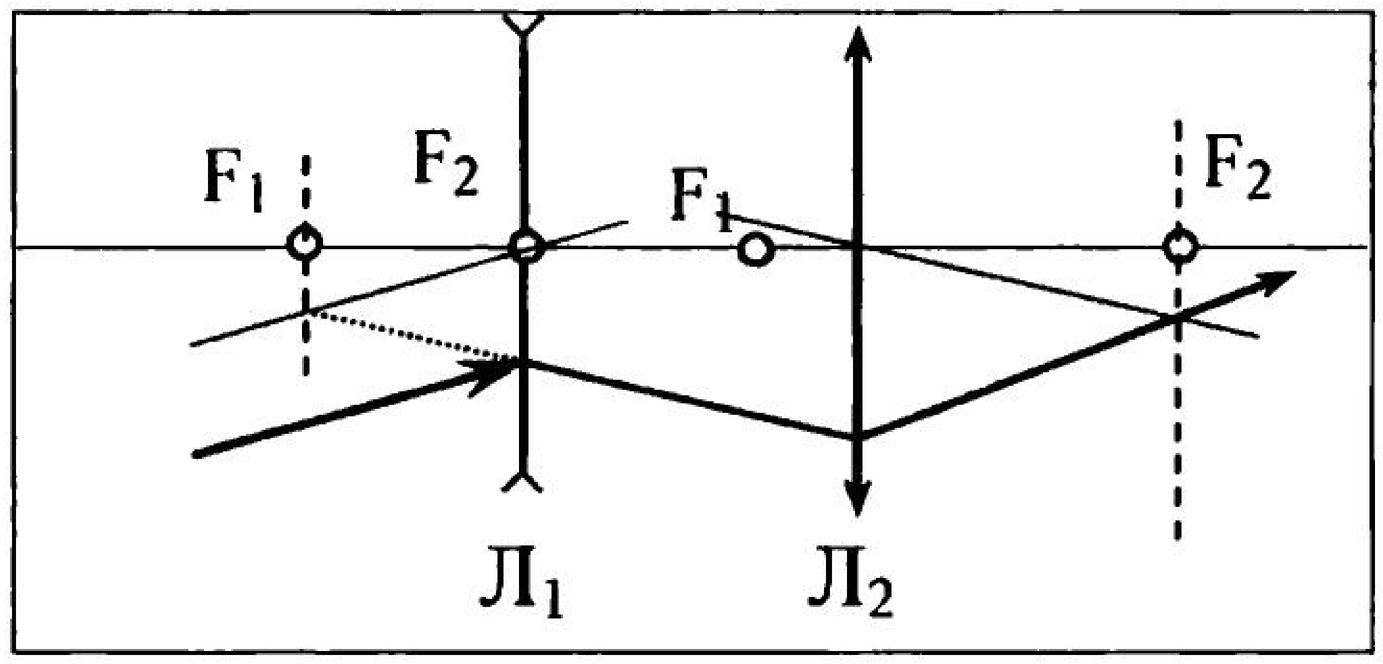
Начальная энергия системы $W_1 = k\frac{q\cdot q}{a} + k\frac{q\cdot 2q}{a} + k\frac{2q\cdot q}{a} = 5k\frac{q^2}{a}$.

Конечная энергия системы $W_2 = k\frac{q\cdot q}{a} + k\frac{q\cdot 2q}{2a} + k\frac{q\cdot 2q}{a} = 4k\frac{q^2}{a}$.

$$A = W_1 - W_2 = 5k\frac{q^2}{a} - 4k\frac{q^2}{a} = k\frac{q^2}{a} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o a}.$$

Ответ: $\boxed{A = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o a}}$.

ЗАДАЧА 7. (10 баллов)



ЗАДАЧА 8. (10 баллов)

В результате фотоэффекта на шарике накапливается положительный заряд, поле которого тормозит фотоэлектроны. Величина заряда определяется электрической ёмкостью шарика и его потенциалом, т.е. $q = 4\pi\varepsilon_o r \cdot \varphi$. Максимальный потенциал φ_{max}, а, следовательно, и максимальный заряд шарика, зависит от начальной кинетической энергии электронов. Так как приращение кинетической энергии электронов равно работе сил поля шарика, то принимая потенциал поля шарика и скорость электронов в бесконечности равными нулю, а также то, что заряд электрона отрицательный, можно записать:

$$\Delta W_{КИН} = -e\varphi_{max}, \text{ т.е. } -\frac{m\upsilon^2_{max}}{2} = -e\varphi_{max}, \text{ откуда } \varphi_{max} = \frac{m\upsilon^2_{max}}{2e} \qquad (1)$$

Используя формулу Эйнштейна для фотоэффекта, получим $\frac{m\upsilon^2_{max}}{e} = h\nu - A$ (2)

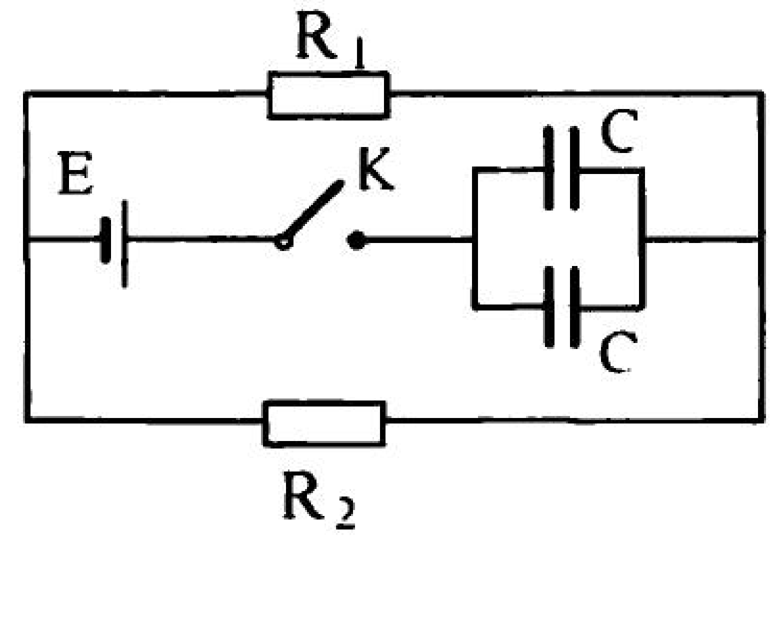
Из (1) и (2) получим $\varphi_{max} = \frac{h\nu - A}{e}$, и $q_{max} = 4\pi\varepsilon_o r\frac{h\nu - A}{e} = \frac{h\frac{c}{\lambda} - A}{e}$.

Подставим числовые значения для работы выхода для меди, получим

$$q = 4\pi\varepsilon_o r \cdot \frac{h \cdot \frac{c}{\lambda} - A}{e} = 4\pi \cdot \varepsilon_o \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{hc}{e \cdot 0{,}14 \cdot 10^{-6}} - 4{,}47\right) = 1{,}45 \cdot 10^{-11}\ Кл$$

Ответ: $\boxed{q = 4\pi\varepsilon_o r \frac{h\frac{c}{\lambda} - A}{e} = 1{,}45 \cdot 10^{-11}\ Кл}$.

ЗАДАЧА 9. (12 баллов)



1) На обоих резисторах выделяется количество теплоты $Q = A - \Delta W$, где

2) $A = \Delta qE = (C_{БАТ}U_2 - C_{БАТ}U_1)E$.

Т.к. $U_1 = 0$, $U_2 = U$; $C_{БАТ} = 2C$, то $A = 2CUE$.

3) $\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{2CU^2}{2} = CU^2$-приращение энергии батареи конденсаторов

4) $Q = 2CUE - CU^2$.

5) Так как резисторы соединены параллельно, то $Q = Q_1 + Q_2$.

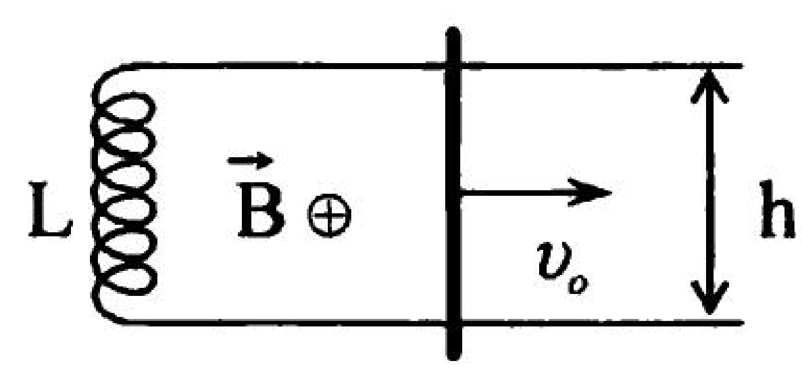
6) По закону Джоуля–Ленца $Q_1 = \frac{U^2}{R_1}\Delta t$, $Q_2 = \frac{U^2}{R_2}\Delta t$, тогда $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1}$.

7) Из 4) , 5) и 6) находим $Q_1 = Q\frac{R_2}{R_1 + R_2} = CU(2E - U)\frac{R_2}{R_1 + R_2}$..

Ответ: $\boxed{Q_1 = CU(2E - U)\frac{R_2}{R_1 + R_2}}$.

ЗАДАЧА 10. (12 баллов)

Так как сопротивление контура R = 0, то суммарная ЭДС в контуре должна быть равна нулю. Значит, суммарный магнитный поток через контур не должен изменяться. Если перемычка сдвинулась на величину x, и в ней появился ток I, то изменение суммарного магнитного потока $\Delta\Phi = Bhx + LI = 0$. Отсюда $I = -\frac{Bh}{L}x$.



По закону Ампера сила, действующая на перемычку с током $F_x = IBh = -\frac{B^2h^2}{L}x$.

Ускорение перемычки $a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{B^2h^2}{mL}x$. Из последнего уравнения следует, что перемычка совершает колебательное движение с круговой частотой $\omega = \frac{Bh}{\sqrt{mL}}$.

Для колебательного движения максимальная скорость $\upsilon_{max} = A\omega$. В нашем случае $\upsilon_{max} = \upsilon_o$ - максимальная скорость перемычки, A = S – амплитуда колебаний, равная расстоянию, которое проходит перемычка до первой остановки. Поэтому $\upsilon_o = S\omega = \frac{SBh}{\sqrt{Lm}}$. Отсюда найдем $m = \frac{S^2B^2h^2}{L\upsilon_o^2}$. Скорость перемычки описывается уравнением $\upsilon = \upsilon_o \cdot \cos(\omega t)$; $\omega = \frac{\upsilon_o}{S}$. В момент времени $t = t_1$ скорость $\upsilon = \frac{\upsilon_o}{2}$.

Тогда $\frac{\upsilon_o}{2} = \upsilon_o \cos \omega t_1$, $\cos \omega t_1 = \frac{1}{2}$; $\omega t_1 = \frac{\pi}{3}$, откуда $t_1 = \frac{\pi}{3\omega}$, где $\omega = \frac{\upsilon_o}{S}$. Тогда $t_1 = \frac{\pi S}{3\upsilon_o}$. Ответ: $\boxed{t_1 = \frac{\pi S}{3\upsilon_o}}$.

Раздел 4.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 8-10 КЛАССОВ

Ежегодно в марте-апреле в МГТУ им. Н.Э. Баумана силами преподавательского состава лицея №1581 при МГТУ им. Н.Э. Баумана проводятся олимпиады по физике и математике для школьников 8 – 10 классов. Результаты этих олимпиад учитываются при поступлении школьников в лицеи и профильные школы при МГТУ им. Н.Э. Баумана. Ниже приводятся варианты олимпиадных работ по физике и математике разных лет.

4.1. Математика

10 класс вариант 2009г

1. (16 баллов) Сорок участников школьной олимпиады по легкой атлетике соревновались в беге на 60 м, в прыжках в длину и в прыжках в высоту. Результаты соревнований выявили 25 призеров по бегу, а также по 22 призера – в прыжках в длину и в высоту. Кроме того, по бегу и/или по прыжкам в длину выявлено 33 призера, по бегу и/или по прыжкам в высоту – 32 призера, по прыжкам в длину и/или в высоту – 31 призер. Во всех трех видах призерами стали 10 участников. – Сколько участников стали призерами по каждому, но только одному, виду соревнований? – Сколько всего призеров только по одному виду соревнований?

2. (12 баллов) Центр окружности, проходящей через середины сторон неравнобедренного треугольника ABC, лежит на биссектрисе угла A. Найдите угол A.

3. (12 баллов) Докажите неравенство

$$\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sin^4\alpha}+\frac{1}{\cos^4\alpha}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{\sin^{2n}\alpha}+\frac{1}{\cos^{2n}\alpha}\right)\geq 2^{\frac{n(n+3)}{2}}.$$

4. (12 баллов) Натуральное число N записано в виде цифровой строки, состоящей из 121 цифры, среди которых встречаются только *единица*, *тройка* и *пятерка*, причем число *единиц* на 11 больше числа *пятерок*. Найдите остаток при делении числа N на 9.

5. (10 баллов) Найдите действительные корни уравнения $(2x^2+4)^2 = 25\cdot(x^3+1)$.

6. (10 баллов) При каких значениях t больший корень уравнения $5x^2-4(t+3)x+4=t^2$ больше 10^3 и меньше 10^4, а меньший корень больше (-10^4) и меньше (-10^3)?

7. (10 баллов) При каких значениях a четыре различных действительных корня уравнения $x^4 - (3 - a)x^2 + (a + 100)^2 = 0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии? Для каждого такого a найдите подходящую прогрессию.

8. (6 баллов) Правильный октаэдр составлен из двух четырехугольных пирамид: EABCD и E'ABCD, имеющих общее основание ABCD. Все ребра имеют длину 1. Найдите угол:

1) между боковыми ребрами AE и EC; 2) между ребрами BE и DC;3) между боковыми гранями BEC и DEC.

9. (12 баллов) Правильный октаэдр составлен из двух четырехугольных пирамид: EABCD и E'ABCD, имеющих общее основание ABCD. Все ребра имеют длину 1. Пусть точки F, H, K – середины соответственно ребер AE, EC и AD. Постройте сечение данного октаэдра плоскостью (FHK) и найдите: 1) площадь сечения; 2) угол между плоскостями (FHK) и (ABC); 3) площадь проекции сечения на плоскость (ABC).

4.2. Решение и ответы варианта 2009г

1. Сорок участников школьной олимпиады по легкой атлетике соревновались в беге на 60 м, в прыжках в длину и в прыжках в высоту. Результаты соревнований выявили 25 призеров по бегу, а также 22 призера – по прыжкам в длину и в высоту. Кроме того, по бегу и/или по прыжкам в длину выявлено 33 призера, по бегу и/или по прыжкам в высоту – 32 призера, по прыжкам в длину и/или в высоту – 31 призер. Во всех трех видах призерами стали 10 участников. Сколько участников стали призерами по каждому, но только одному, виду соревнований? Сколько призеров только по одному виду соревнований?

Решение.

1. Обозначим ***Б*** множество призеров по бегу, ***В*** – множество призеров по прыжкам в высоту, ***Д*** – множество призеров по прыжкам в длину. Отметим, что среди перечисленных содержатся призеры и по другим видам соревнований. Воспользуемся обозначениями рис. 1 и найдем:

– количество призеров по бегу и прыжкам в длину

$|\textbf{Б} \cap \textbf{Д}| = |\textbf{Б}| + |\textbf{Д}| - |\textbf{Б} \cup \textbf{Д}| = 25 + 22 - 33 = 14,$

– количество призеров по бегу и прыжкам в высоту

$|\textbf{Б} \cap \textbf{В}| = |\textbf{Б}| + |\textbf{В}| - |\textbf{Б} \cup \textbf{В}| = 25 + 22 - 32 = 15,$

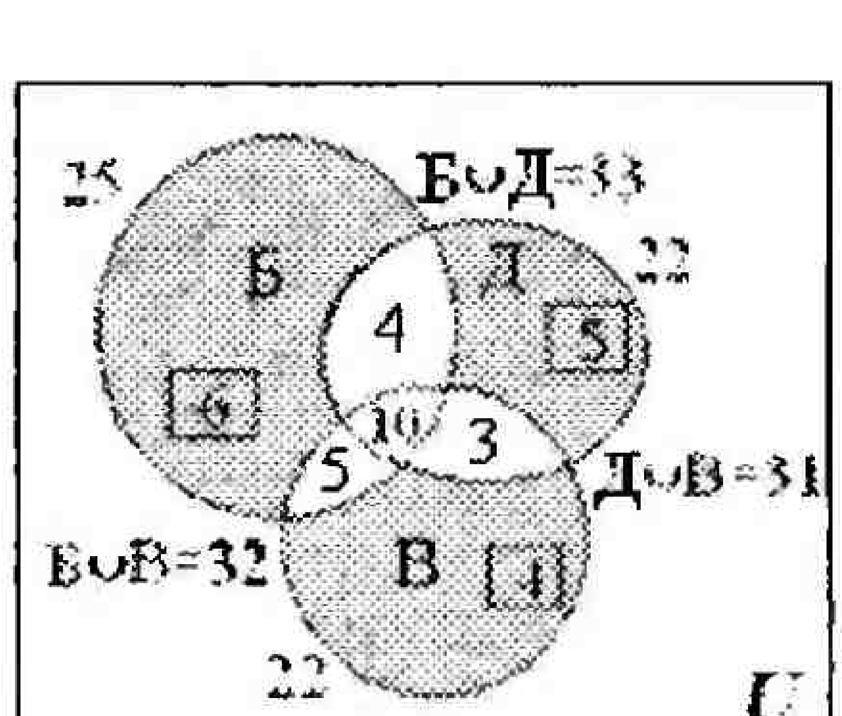


Рис. 1

– количество призеров по прыжкам в высоту и в длину

$|\boldsymbol{В} \cap \boldsymbol{Д}| = |\boldsymbol{В}| + |\boldsymbol{Д}| - |\boldsymbol{Д} \cup \boldsymbol{В}| = 22 + 22 - 31 = 13$

2. Среди перечисленных содержатся победители по всем трем видам. Действительно, все луночки на рис. 2 имеют общую часть, обозначающую 10 призеров во всех трех видах соревнований. С учетом предыдущих вычислений, найдем число призеров в двух видах соревнований, множество которых заполняет дополнения их общей части в каждой луночке на рис. 1. – это соответственно 4, 5, 3. Затем установим, что:

только по бегу призерами стали 25-(10+4+5)= 6 школьников;

только по прыжкам в длину – 22-(10+4+3)= 5 школьников;

только по прыжкам в высоту – 22-(10+5+3)= 4 школьника.

Следовательно, только по одному виду соревнований призерами стали 6+5+4=15 школьников – они образуют затененное множество на рис. 1.

Ответ: Только по бегу – 6 призеров; только по прыжкам в длину – 5 призеров; только по прыжкам в высоту – 4 призера. Только по одному виду соревнований призерами стали 15 участников.

2. Центр окружности, проходящей через середины сторон неравнобедренного треугольника ABC, лежит на биссектрисе угла A. Найдите угол A.

Решение.

1. Точки A', B', C' – середины сторон треугольника ABC, AO – биссектриса угла A. Обозначим: $\angle BAC = A$, $\angle AB'O = \beta$, $\angle AC'O = \alpha$ (рис.2).

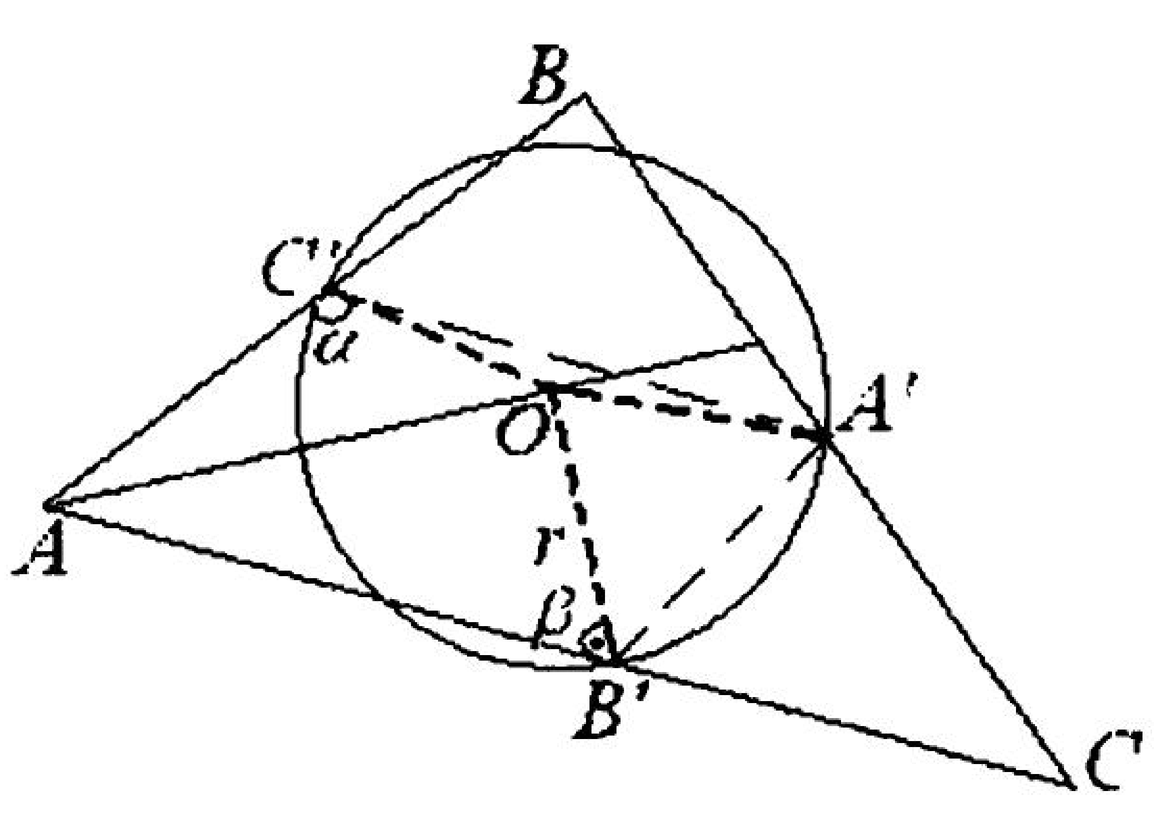


Рис.2

Из треугольников AOC' и AOB' по теореме синусов, находим равенства

$\frac{|OC'|}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{|OA|}{\sin\alpha}$, $\frac{|OB'|}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{|OA|}{\sin\beta}$, из которых, с учетом $|OC'| = |OB'| = R$, вытекает

равенство $\sin\alpha = \sin\beta$, откуда следует, что либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha = \pi - \beta$.

2. Из равенства $\alpha = \beta$ следует равенство углов C'OA и B'OA, а также – по второму признаку – равенство треугольников C'OA и B'OA, влекущее равенство соответственных сторон AC' и AB', противоречащее условию о неравенстве сторон треугольника ABC.

3. Рассмотрим равенство $\alpha = \pi - \beta$. Запишем выражение для суммы внутренних углов четырехугольника AB'OC'

$\angle C'OB' + \alpha + \beta + A = 2\pi$, или $\angle C'OB' = \pi - A$

Вписанный угол $\angle C'A'B' = \frac{1}{2}\ \angle C'OB' = \frac{\pi - A}{2}$ – острый. Отрезки A'C' и A'B' –

средние линии Δ ABC, поэтому $(A'C') \| (AC)$ и $(A'B') \| (AB)$. Отсюда вытекает равенство $A = \angle C'A'B' = (\pi - A)/2$, равносильное равенству $3A = \pi$, откуда $A = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\{\frac{\pi}{3}\}$.

3. Докажите неравенство

$$\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sin^4\alpha} + \frac{1}{\cos^4\alpha}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{\sin^{2n}\alpha} + \frac{1}{\cos^{2n}\alpha}\right) \ge 2^{\frac{n(n+3)}{2}}.$$

Решение.

Воспользуемся неравенством Коши для доказательства вспомогательного неравенства

$$\frac{1}{\sin^{2k}\alpha} + \frac{1}{\cos^{2k}\alpha} \ge 2\sqrt{\frac{1}{\sin^{2k}\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^{2k}\alpha}} = 2\sqrt{\frac{2^{2k}}{\sin^{2k}2\alpha}} \ge 2^{k+1},$$

из которого вытекает следующее неравенство

$$\log_2\left(\frac{1}{\sin^{2k}\alpha} + \frac{1}{\cos^{2k}\alpha}\right) \ge k + 1.$$

Сложим почленно левые и правые части этого неравенства и получим

$$\sum_{k=1}^{k=n}\log_2\left(\frac{1}{\sin^{2k}\alpha} + \frac{1}{\cos^{2k}\alpha}\right) \ge \sum_{k=1}^{k=n}(k+1) = 2 + 3 + \ldots + n + 1 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Преобразуем левую часть полученного неравенства и найдем

$$\log_2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sin^4\alpha}+\frac{1}{\cos^4\alpha}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{\sin^{2n}\alpha}+\frac{1}{\cos^{2n}\alpha}\right)\geq\frac{n(n+3)}{2},$$

а после потенцирования – получим требуемое неравенство.

4. Натуральное число N записано в виде цифровой строки, состоящей из 121 цифры, среди которых встречаются только *единица*, *тройка* и *пятерка*, причем число *единиц* на 11 больше числа *пятерок*. Чему равен остаток при делении числа N на 9?

Решение.

1. Докажем утверждение: остаток от деления натурального числа $N=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$ на 9 равен остатку от деления суммы σ всех значащих цифр числа N на 9.

Доказательство. Произвольное натуральное число $N=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$ в десятичной системе счисления обозначает следующую запись

$$N=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_1 10^1+a_0 10^0=$$

$$=a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10^1-1)+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0)$$

Поскольку каждая из скобок кратна 9, то остаток при делении числа N на 9 равен остатку при делении на 9 суммы $\sigma=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$ всех его значащих цифр.

Отсюда вытекает также признак делимости на 9: если сумма σ всех значащих цифр натурального числа N делится на 9, то и число N делится на 9. Утверждение доказано.

2. Введем обозначения: ν_1 – количество *единиц*, ν_3 – количество *троек*, ν_5 – количество *пятерок*, σ – сумма всех значащих цифр данного числа. По условию задачи, выполнена система условий $\begin{cases}\nu_5=\nu_1-11,\\ \nu_1+\nu_3+\nu_5=121,\\ \sigma=1\cdot\nu_1+3\cdot\nu_3+5\cdot\nu_5.\end{cases}$

Выразим $\nu_3=121-\nu_1-\nu_5=121-\nu_1-(\nu_1-11)=132-2\nu_1$ и вычислим

$$\sigma=1\cdot\nu_1+3\cdot\nu_3+5\cdot\nu_5=1\cdot\nu_1+3\cdot(132-2\nu_1)+5\cdot(\nu_1-11)=396-55=341.$$

3. Остаток при делении числа 341 на 9 равен остатку при делении суммы цифр числа 341 на 9, то есть 8. Ответ: $\{8\}$.

5. Найти действительные корни уравнения $(2x^2+4)^2 = 25\cdot(x^3+1)$.

(Указание. Возведем обе части данного уравнения в квадрат и после приведения подобных получим алгебраическое уравнение четвертой степени $4x^4-25x^3+16x^2-9=0$, решение которого методом неопределенных коэффициентов позволяет получить два квадратных уравнения с целочисленными коэффициентами, из которых одно не имеет корней, а другое имеет корни $\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.)

Решение.

Преобразуем данное уравнение

$(2x^2+4)^2 = 25\cdot(x^3+1) \Leftrightarrow 4x^4-25x^3+16x^2-9=0$.

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов

$$4x^4-25x^3+16x^2-9=0 \Leftrightarrow (x^2+ax+b)(4x^2+cx+d)=0$$
$$4x^4-25x^3+16x^2-9 \equiv (x^2+ax+b)(4x^2+cx+d)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+c=-25, \\ 4b+ac+d=16, \\ ad+bc=0, \\ bd=-9. \end{cases}$$

Система 4-го, 3-го и 1-го уравнений имеет решение $b=-3$, $d=3$; $a=c=-5$;

при этом второе уравнение дает истинное равенство: $-12+25+3=16$.

Таким образом, данное уравнение преобразуется к виду:

$$(x^2-5x-3)(4x^2-5x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x-3=0, \\ 4x^2-5x+3=0. \end{array}\right.$$

Второе уравнение действительных корней не имеет, а первое – имеет корни $\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$, оба больше -1.

Ответ: $\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

6. При каких значениях параметра t больший корень уравнения

$5x^2-4(t+3)x+4=t^2$

больше 10^3 и меньше 10^4, а меньший корень больше (-10^4) и меньше (-10^3)?

Решение.

Дискриминант данного квадратного уравнения равен $\frac{1}{4}D = 4(t+3)^2 - 5(4-t^2) = (3t+4)^2$. Запишем корни данного уравнения – это $x_1 = t+2$, $x_2 = \frac{2-t}{5}$. На рис. 3 линии 1 соответствует график функции $x = t+2$, а линии 2 – $x = \frac{2-t}{5}$, их точка пересечения $A(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. При $t < -\frac{4}{3}$ корень $x_2 = \max(x_1, x_2)$, а при $t > -\frac{4}{3}$ корень $x_1 = \max(x_1, x_2)$. Ограничения на корни запишем в виде совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < -\frac{4}{3}, \\ 10^3 < \frac{2-t}{5} < 10^4, \\ -10^4 < t+2 < -10^3; \end{cases} \\ \begin{cases} t > -\frac{4}{3}, \\ 10^3 < t+2 < 10^4, \\ -10^4 < \frac{2-t}{5} < -10^3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < -\frac{4}{3}, \\ 2-5\cdot 10^4 < t < 2-5\cdot 10^3, \\ -2-10^4 < t < -2-10^3; \end{cases} \\ \begin{cases} t > -\frac{4}{3}, \\ -2+10^3 < t < -2+10^4, \\ 2+5\cdot 10^3 < t < 2+5\cdot 10^4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

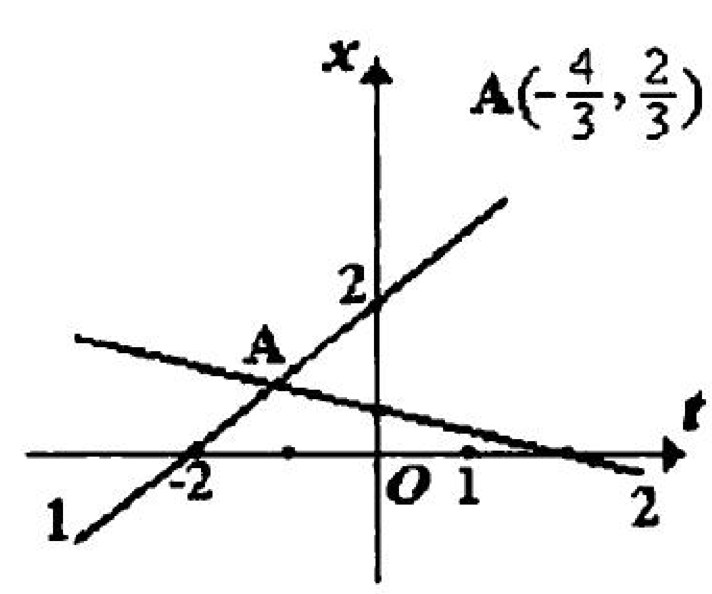


Рис. 3

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2-10^4 < t < 2-5\cdot 10^3, \\ 2+5\cdot 10^3 < t < 10^4-2, \end{array}\right. \Leftrightarrow t \in (-2-10^4, 2-5\cdot 10^3) \cup (2+5\cdot 10^3, 10^4-2).$$

Ответ: $(-2-10^4, 2-5\cdot 10^3) \cup (2+5\cdot 10^3, 10^4-2)$.

7. При каких значениях a четыре различных действительных корня уравнения $x^4 - (3-a)x^2 + (a+10)^2 = 0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии? Для каждого такого a найдите подходящую прогрессию.

Решение.

По условию, данное биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня. Расположенные в порядке возрастания, они имеют вид:

$x_1 = -\frac{3d}{2}, x_2 = -\frac{d}{2}, x_3 = \frac{d}{2}, x_4 = \frac{3d}{2}, d > 0$ (соответствующие точки числовой прямой симметричны относительно начала отсчета, рис. 4)

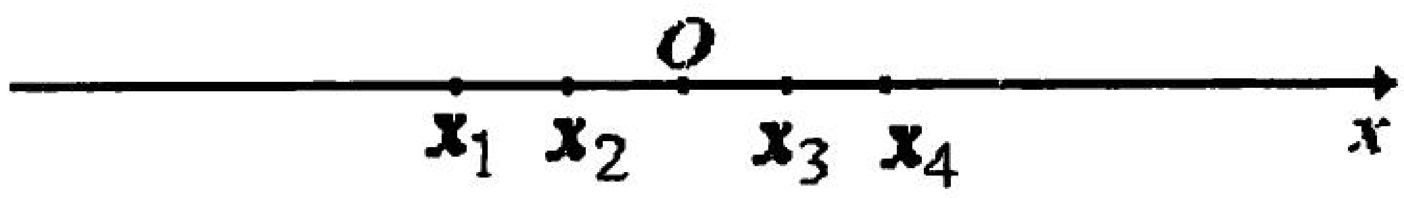


Рис. 4

Обозначим $x^2 = t > 0$, очевидно, $t_1 = \frac{d^2}{4}$, $t_2 = \frac{9d^2}{4}$. По теореме Виета, корни квадратного уравнения $t^2 - (3-a)t + (a+10)^2 = 0$ удовлетворяют соотношениям:

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{9d^4}{16} = (a+10)^2,\ t_1 + t_2 = \frac{5d^2}{2} = 3 - a\ (a < 3).$$

Эквивалентные преобразования позволяют получить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{3d^2}{4} = |a+10|, \\ \frac{5d^2}{2} = 3 - a, \end{cases}$$

имеющую решения: $a = -7$, $d = \pm 2$; $a = -\frac{109}{7}$, $d = \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{13}{7}}$. При этом значению $a = -7$ отвечает прогрессия $\{-3, -1, 1, 3\}$, а значению $a = -\frac{109}{7}$ – прогрессия

$\{-3 \cdot \sqrt{\frac{13}{7}}, -\sqrt{\frac{13}{7}}, \sqrt{\frac{13}{7}}, 3 \cdot \sqrt{\frac{13}{7}}\}$.

Ответ: Значению $a = -7$ отвечает прогрессия $\{-3, -1, 1, 3\}$;

значению $a = -\frac{109}{7}$ – прогрессия $\{-3 \cdot \sqrt{\frac{13}{7}}, -\sqrt{\frac{13}{7}}, \sqrt{\frac{13}{7}}, 3 \cdot \sqrt{\frac{13}{7}}\}$.

8. Правильный октаэдр составлен из двух четырехугольных пирамид, EABCD и E’ABCD с равными ребрами единичной длины, имеющих общее основание ABCD. Найти угол: 1) между боковыми ребрами AE и EC;

2) между ребрами BE и DC;

3) между боковыми гранями BEC и DEC.

Ответы: 1) 90°; 2) 60°; 3) arccos(-1/3).

9. Правильный октаэдр составлен из двух четырехугольных пирамид, EABCD и E’ABCD с равными ребрами единичной длины, имеющих общее основание ABCD. Пусть точки F, H, K – середины соответственно ребер AE

EC и AD. Построить сечение данного октаэдра плоскостью (FHK) и найти:

1) площадь сечения;

2) угол между плоскостями (FHK) и (ABC);

3) площадь проекции сечения на плоскость (ABC).

Ответы: 1) $3\sqrt{2}/8$; 2) 45°; 3) $3/8$.

4.3. Вариант 2010г

1. (10 баллов) Имеются два одинаковых стакана, заполненных до одного и того же уровня соответственно чистой водой и подкрашенной водой. Сначала берут одну чайную ложку подкрашенной воды и вливают в стакан с чистой водой и перемешивают; затем чайную ложку смеси вливают в стакан с подкрашенной водой. Чего больше: подкрашенной воды в стакане с чистой водой или чистой воды в стакане с подкрашенной водой? – Что будет, если число переливаний не ограничено?

2. (15 баллов) При каких значениях x числа $\sqrt[6]{\frac{1}{8}x^3}$, $\sqrt[4]{x-7}$, $\frac{1}{2}\sqrt{x^2-63}$ образуют геометрическую прогрессию?

3. (15 баллов) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения x^2+2y^2, если $x^2-xy+2y^2=1$.

4. (15 баллов) Три окружности радиусом 1, 2, 3 соответственно, лежат в одной плоскости и попарно касаются друг друга. Найти площадь круга, ограниченного окружностью, проходящей через точки касания данных окружностей.

5. (10 баллов) Решить уравнение

$$4\sin^2 3x-2\cos^2(x-\pi)-\sin\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\pi}{2}=\sin(2x-\tfrac{\pi}{2}).$$

6. (10 баллов) Решить систему уравнений $\begin{cases} ax-ay=5, \\ \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{5}. \end{cases}$

7. (15 баллов) Три шара, имеющих центры A, B, C и радиусы $^{15}/_{8}$, $^{6}/_{5}$, $^{10}/_{3}$ соответственно, попарно касаются друг друга. Найти площадь треугольника, вершины которого лежат в точках касания данных шаров с общей опорной плоскостью.

8. (10 баллов) При каких значениях параметра t бóльший корень уравнения $t^2+4(t+3)x-5x^2-4=0$ больше 10^3 и меньше 10^4, а меньший корень больше (-10^4) и меньше (-10^3)?

4.4. Решения варианта 2010г

Составление, подготовка, ответы В.Е. Епихин

1. *При перемешивании*, независимо от числа переливаний, во втором стакане подкрашенной воды будет не меньше, чем чистой воды. Также и для чистой воды в первом стакане.

Без перемешивания, во втором стакане уменьшится содержание подкрашенной воды ровно настолько, насколько прибавилось чистой воды. Следовательно, из второго стакана в первый перелито столько же подкрашенной воды, сколько – из первого стакана во второй перелито чистой воды. Поэтому подкрашенной воды в стакане с чистой водой окажется столько же, сколько чистой в стакане с подкрашенной водой.

Ответ: Количество инородной жидкости в каждом стакане одно и тоже.

2. *Решение.*

ОДЗ: $a\in[\frac{3\sqrt{7}}{2},+\infty)$. Признак ГП:

$$\sqrt{x-7}=\sqrt{\tfrac{1}{2}x}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2-63}\Leftrightarrow x^3-71x+56=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\{8,-(4+\sqrt{23}),-4+\sqrt{23}\}.$$

С учётом ОДЗ запишем Ответ: $\{8\}$

3. *Решение.*

Преобразуем дополнительное условие и сделаем замену неизвестных

$$(x-\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{7}{4}y^2=1,\ \xi=x-\tfrac{y}{2},\ \eta=\tfrac{\sqrt{7}}{2}y$$

$$\xi=\sin t,\ \eta=\cos t,\ 0\le t<2\pi;$$

$$x=\sin t+\tfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot\cos t,\ y=\tfrac{2}{\sqrt{7}}\cdot\cos t.$$

Представим целевую функцию в виде:

$$f(t)=x^2(t)+2y^2(t)=\tfrac{8}{7}+(\tfrac{1}{7}\cos 2t+\tfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot\cos 2t),$$

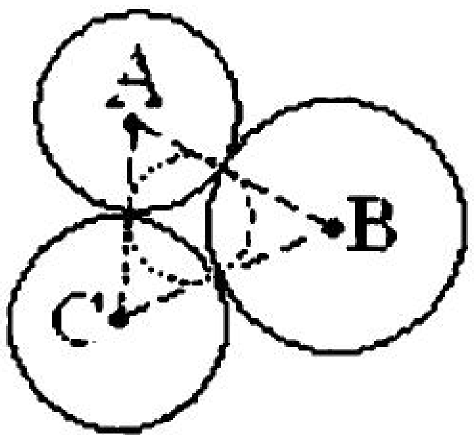
или $f(t)=\frac{8}{7}+\frac{2\sqrt{2}}{7}\cdot\sin(2t+\theta)$, откуда $\frac{8-2\sqrt{2}}{7}\le f(t)\le\frac{8+2\sqrt{2}}{7}$.

Ответ: $\frac{8-2\sqrt{2}}{7}$ и $\frac{8+2\sqrt{2}}{7}$.

4. Теорема. Если три окружности с центрами в точках A, B, C попарно касаются друг друга, то окружность, вписанная в ΔABC касается сторон ΔABC в точках их касания.

Решение.

Искомая окружность вписана в треугольник с вершинами в центрах данных окружностей, а её радиус



$$r = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{0,5 \cdot 3 \cdot 4}{0,5 \cdot (3+4+5)} = 1,\ S = \pi.$$

Ответ: $r = 1,\ S = \pi$.

5. *Решение.*

Применим формулу двойного аргумента и данное уравнение преобразуем к виду: $2(1-\cos 6x) - 2\cos^2 x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$,

$\Leftrightarrow 2(1-\cos 6x) - (1+\cos 2x) + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 6x = 1$,

имеющему корни: $\pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3},\ k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $\{\pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3},\ k \in \mathbf{Z}\}$.

6. *Решение.*

Второе уравнение системы равносильно уравнению $y = \frac{1}{2}(3-x)$; при этом точка $C(x, y) \in [AB]$, где $A(1;1)$, $B(3;0)$ (рис.2).

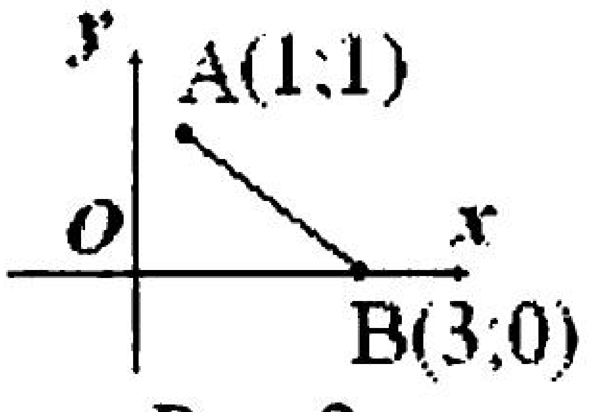


Рис. 2

Первое уравнение преобразуем к виду $3ax = 3a + 10$, имеющему решение: $a = 0 \to \varnothing,\ a \neq 0 \to (\frac{3a+10}{3a}, \frac{3a-5}{3a})$. В виду ограничения: $1 \le x \le 3$, или $0 \le y \le 1$ – находим, что при

$a < {}^5/_3 \to \varnothing,\ \ a \ge {}^5/_3 \to (\frac{3a+10}{3a}, \frac{3a-5}{3a})$.

Ответ: $a < {}^5/_3 \to \varnothing,\ a \ge {}^5/_3 \to (\frac{3a+10}{3a}, \frac{3a-5}{3a})$.

7. *Решение.*

Расстояние между точками касания шаров с радиусами r и R вычисляется по формуле $2\sqrt{rR}$. Поэтому длины сторон треугольника будут 3, 4, 5, а его площадь равна 6. Ответ: $\{6\}$

8. *Решение.*

Дискриминант данного квадратного уравнения равен $\frac{1}{4}D = 4(t+3)^2 - 5(4-t^2) = (3t+4)^2$, и его корни равны: $x_1 = t+2$, $x_2 = \frac{2-t}{5}$. На рис. 3 график функции $x = t+2$ соответствует линии 1, а график функции $x = \frac{2-t}{5}$ – линии 2; точка их пересечения $A(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. При

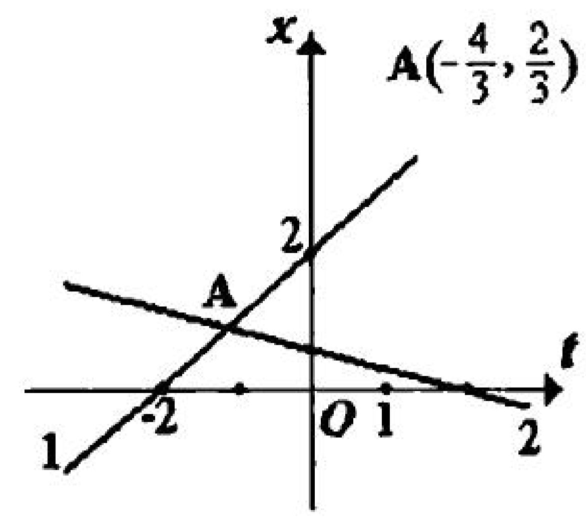


Рис. 3

$t < -\frac{4}{3}$ корень $x_2 = \max(x_1, x_2)$, а при $t > -\frac{4}{3}$ корень $x_1 = \max(x_1, x_2)$. Следовательно, ограничения на корни имеют вид совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < -\frac{4}{3}, \\ 10^3 < \frac{2-t}{5} < 10^4, \\ -10^4 < t+2 < -10^3; \end{cases} \\ \begin{cases} t > -\frac{4}{3}, \\ 10^3 < t+2 < 10^4, \\ -10^4 < \frac{2-t}{5} < -10^3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < -\frac{4}{3}. \\ 2-5\cdot 10^4 < t < 2-5\cdot 10^3, \\ -2-10^4 < t < -2-10^3; \end{cases} \\ \begin{cases} t > -\frac{4}{3}, \\ -2+10^3 < t < -2+10^4, \\ 2+5\cdot 10^3 < t < 2+5\cdot 10^4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2-10^4 < t < 2-5\cdot 10^3, \\ 2+5\cdot 10^3 < t < 10^4-2, \end{array}\right. \Leftrightarrow t \in (-2-10^4, 2-5\cdot 10^3) \cup (2+5\cdot 10^3, 10^4-2).$$

Ответ: $(-2-10^4, 2-5\cdot 10^3) \cup (2+5\cdot 10^3, 10^4-2)$.

4.5. 8 класс вариант 2006г

1. (10 баллов) Мальчик сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Сколько ступенек насчитает он, если побежит по этому же эскалатору вверх, если при спуске по неподвижному эскалатору он насчитал 50 ступеней?

2. (15 баллов) Вычислить: $\frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 15} + \ldots + \frac{1}{91\cdot 95} + \frac{1}{95\cdot 99}$

3. (10 баллов) Делится ли на 9 сумма цифр числа $a=2^{54}+3^{19}$?

4. (10 баллов) Решить уравнение при всех допустимых значениях параметра $\boldsymbol{b}$:

$$\sqrt{x^2+14x+49} = \left(\frac{\sqrt{b-1}}{\sqrt{b+1}+\sqrt{b-1}} + \frac{b-1}{\sqrt{b^2-1}-b+1}\right) : \sqrt{b^2-1}$$

5. (10 баллов) Участнику игры «Поле чудес» выносят две шкатулки, в одной из которых находится приз, и дают право задать ведущему только один вопрос, на который тот сможет ответить «да» или «нет». Известно, что ведущий один день говорит правду, а другой врёт (и так через день). Какой вопрос должен задать игрок ведущему, чтобы верно выбрать шкатулку с призом?

6. (15 баллов) В прямоугольной системе координат построить множество точек, удовлетворяющих условию: $y(x-2)-y^2=\dfrac{x^2-8x+15}{x-5}$

7. (15 баллов) Диагонали трапеции ***ABCD*** с основаниями ***AD*** и ***BC*** пересекаются в точке ***O***. Найти площадь трапеции, если $S_{\Delta BOC}=S_1$, $S_{\Delta AOD}=S_2$.

8 .(15 баллов) Разрезать прямоугольный неравнобедренный треугольник на три треугольника так, чтобы из них можно было составить ромб с диагоналями, которые равны катетам данного треугольника.

4.6. Решение варианта 2006г

$$1.\ \begin{cases}30t_1=(50-30)t_2\\ xt_1=(x-50)t_2\end{cases},\quad \begin{matrix}30(x-50)=x\cdot 20\\ 10x=50\cdot 30\\ x=150cm\end{matrix},$$

t_1- время, которое тратит мальчик на проход 1-ой ступени.

t_2 – эскалатор. x – число ступеней.

$$2.\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{91}-\frac{1}{95}+\frac{1}{95}-\frac{1}{99}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{99}\right)=\frac{96\cdot 32}{4\cdot 3\cdot 99}=\frac{8}{99}$$

3. $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n^3+6n=3n(n^2+2)$

Докажем, что $n(n^2+2)\,\vdots\,3$. Рассмотрим три случая:

$$\left.\begin{matrix}1).n=3K\Rightarrow n\,\vdots\,3.\\ 2.n=3K+1\Rightarrow n^2+2=9K^2+6K+3\Rightarrow(n^2+2)\,\vdots\,3.\\ 3).n=3K+2\Rightarrow n^2+2=9K^2+6K+6\Rightarrow(n^2+2)\,\vdots\,3.\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(3n(n^2+2)\right)\vdots\,9$$

4.

$$\left(\frac{\sqrt{b-1}}{\sqrt{b+1}+\sqrt{b-1}}+\frac{\sqrt{b-1}\cdot\sqrt{b-1}}{\sqrt{b-1}\left(\sqrt{b+1}-\sqrt{b-1}\right)}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{(b-1)(b+1)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{b^2-1}-(b-1)+\sqrt{b^2-1}+(b-1)}{\left((b+1)-(b-1)\right)\sqrt{b^2-1}}=\frac{2}{b+1-b+1}=1.$$

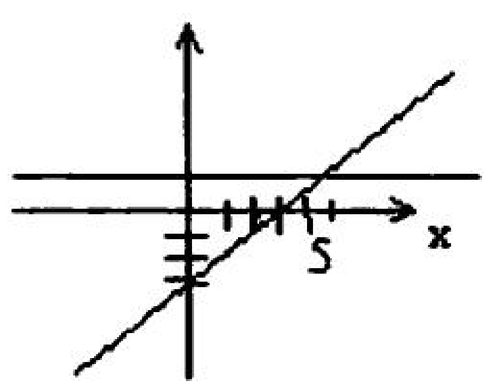
$$|x+7|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+7=1 \\ x+7=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=-8 \end{array}\right. \quad \frac{b-1>0}{b+1>0} \quad \frac{b>1}{b>-1}$$

Ответ: $\{-6;-8\}$при b>1

5. Что бы Вы ответили вчера, если бы я Вас спросил: «Приз находится в правой шкатулке?»

Пусть приз в правой шкатулке, тогда ответ будет «нет».

$$6.\ y(x-2)-y^2=\frac{(x-5)(x-3)}{(x-5)} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x-2)-(x-3)-y^2=0 \\ x\neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(y-1)-(y^2-1)=0 \\ x\neq 5 \end{cases}$$

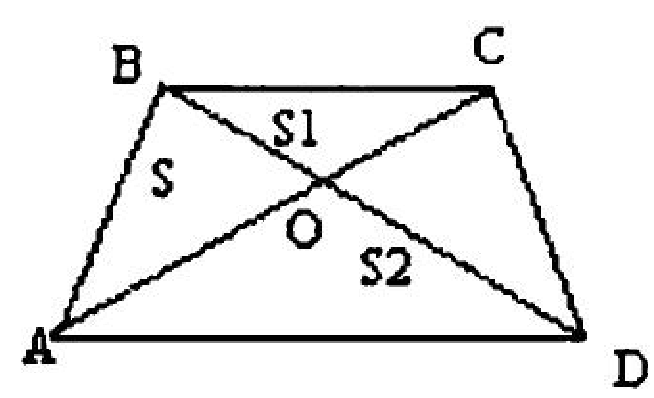


$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)\left((x-2)-(y+1)\right)=0 \\ x\neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=x-3 \end{array}\right. \\ x\neq 5 \end{cases}$$

7. Найдем S:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{S_2}{S}\Rightarrow S^2=S_1\cdot S_2\Rightarrow S=\sqrt{S_1\cdot S_2}$$

$$S_{mp}=S_1+2\sqrt{S_1S_2}+S_2=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$$



4.7. Вариант 2010г

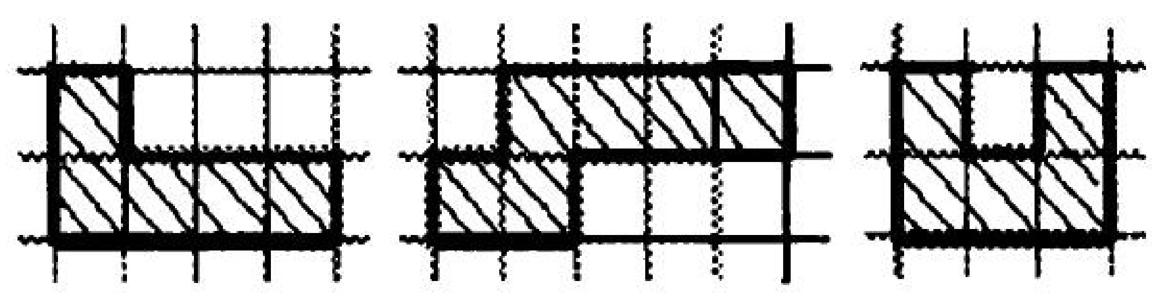
1. (5 баллов) Сколькими способами можно разменять 2010 рублей 5- и 10-рублевыми монетами?

2. (5 баллов) Температуру можно измерять в градусах Цельсия (°C) и Фаренгейта (°F). Зависимость линейная. Вода замерзает при 0°C или при 32°F, а кипит при 100°C или

при 212°F. Термометр показывает температуру +5°C. Сколько это градусов по Фаренгейту?

3. (10 баллов) Имеются два сосуда, объемы которых равны V_1 и V_2 соответственно. Каждый сосуд заполнен (т.е. раствор занимает весь объем сосуда) водным раствором одной и той же соли, но концентрация этой соли в растворах различна для сосудов V_1 и V_2. Также есть пара стаканов одинакового объема. В первый стакан налили раствор из первого сосуда, во второй - раствор из второго. Затем раствор из второго стакана перелили в первый сосуд, а из первого стакана - во второй сосуд. После выполнения этих действий концентрации солей в растворах в первом и втором сосуде стали равны между собой. Каков объем стакана?

4. (10 баллов) Из трех данных фигур сложите 2 разные, одна из которых имеет ось симметрии, а другая центр симметрии.



Каждую фигуру нужно использовать ровно один раз, прикладывая их без наложений. Изобразите ось (центр) симметрии.

5. (15 баллов) Определите сумму всех натуральных чисел n, для которых числа 3920 и 4320 делятся без остатка на n и n+7 соответственно.

6. (15 баллов) Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O и радиусом R. Угол ABC равен α. AM и CN-высоты треугольника ABC. Сторона AC равна a. Найдите площадь четырехугольника BMON.

7. (15 баллов) Найдите значение выражения **<u>без</u>** помощи калькулятора. Если точное значение найти невозможно, округлите значение до сотых.

$$\left(\frac{-14+\sqrt{317-68\sqrt{7}}}{\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{7}}}+\sqrt{2\sqrt{7}}\right)\times\left(\sqrt{21+12\sqrt{3}}-\sqrt{57+12\sqrt{12}}\right)\times\left(\sqrt{73-28\sqrt{6}}+2\sqrt{6}\right).$$

8. (25 баллов) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+9x+10}, x<-5\\ \dfrac{3x^4-9|x^3|+6x^2}{3(x^2-|2x|)(|x|-1)}, x\in[-5;5];\\ \dfrac{2x^2-15x+25}{x^2-9x+20}, x>5;\end{cases}$ Постройте график функции f(x). Найдите область определения и область значений. Найдите количество корней уравнения $f(x) = a$ в зависимости от значений параметра a.

4.8. Решения варианта 2010г

1.В числе 2010-201 десяток. Следовательно, способов размена 202. Первый - только из пятерок, а каждый следующий способ-с заменой двух пятерок на десятку. А так как их 201,следовательно, кроме первого способа можно воспользоваться еще 201.

Т.е. кол-во способов = 201+1=202.

2. Нужно установить зависимость градусов Цельсия и Фаренгейта: Если (x)-температура в Цельсиях, то (1,8x+32)-температура в Фаренгейтах. Т.е. если x=5, то температура в Фаренгейтах = $1,8 \times 5+32=9+32=41$.

Ответ:41.

3. Пусть концентрация соли в 1-ом растворе равна (x) моль/л., а во 2-ом – (y) моль/л. А объем стакана примем за (z) л., тогда z л. из первого сосуда будут содержать (zx) молей соли, а из второго- zy моль.

А оставшийся в первом сосуде раствор (после того, как забрали z л.) будет содержать $(V_1-z)x$ моль, а второй-$(V_2-z)y$ моль. Концентрация после доливания в 1-ый сосуд стакана с раствором из второго будет равна $((V_1-z)x+zy):V_1$,

во втором – $((V_2-z)y+zx):V_2$. По условию эти концентрации равны, поэтому составим уравнение:

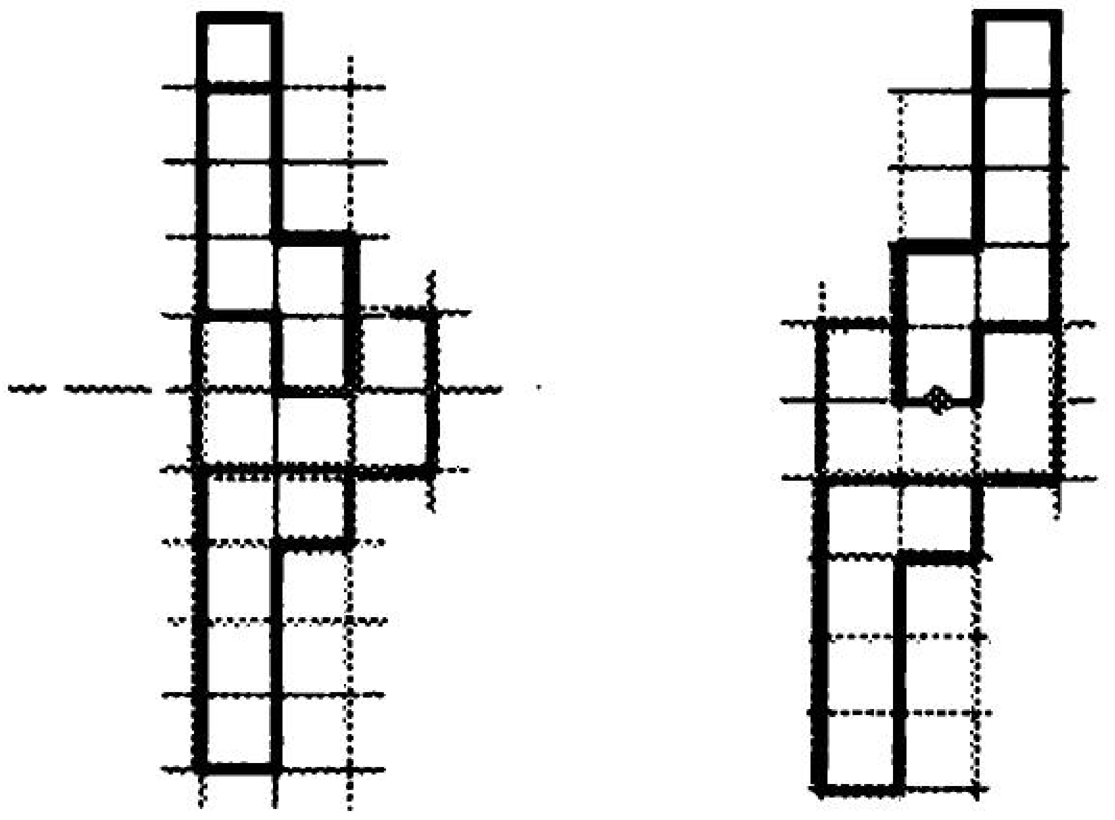
$$((V_1-z)x+zy):V_1=((V_2-z)y+zx):V_2 \Rightarrow V_1V_2x-V_2zx+V_2zy=V_1V_2y-V_1zy+V_1zx \Rightarrow$$

$$V_1V_2x-V_1V_2y=V_1zx+V_2zx-V_1zy-V_2zy \Rightarrow zV_1(x-y)+zV_2(x-y)=V_1V_2(x-y) \Rightarrow$$

$$z=V_1V_2/(V_1+V_2).$$

Ответ: объем стакана равен $V_1V_2/(V_1+V_2)$.

4.Ось симметрии обозначена красным. У 2-ой фигуры - центральная ось симметрии.



5. По основной теореме алгебры любое число можно представить в виде произведения простых чисел возведенных в определенную степень.

$3920=1\cdot7^2\cdot2^4\cdot5$.

$4320=1\cdot3^3\cdot2^5\cdot5$.

Среди делителей числа 4320 нет кратных 7, поэтому если взять $n \vdots 7$, то и $(n+5) \vdots 7$. Значит, возьмем n= каждому делителю числа 3920, который не кратен 7. 1,2,4,5,8,10,16,20,40,80. При этом n+7=8,9,11,12,15,17,23,27,47,87. Поэтому нам подходят n=1,2,5,8,20. Сумма n=36.

Ответ:36.

6. В данном треугольнике проведем радиусы описанной окружности и введем некоторые обозначения: $\angle 1=\angle OAB=\angle OBA$ (углы при основании равнобедренного треугольника с боковыми сторонами равными радиусу описанной окружности). Соответственно $\angle 2=\angle OBC=\angle OCB$, $\angle 3=\angle OCA=\angle OAC$. Сумма углов треугольника равна $\angle OAB+\angle OBA+\angle OBC+\angle OCB+\angle OCA+\angle OAC=2(\angle 1+\angle 2+\angle 3)=180^0$. Треугольники BMN и ABC подобны с коэффициентом подобия $k=\cos\alpha$.Следовательно, угол BMN равен углу BAC,который в свою очередь равен $\angle 1+\angle 3$. $BO \cap MN=K$. В треугольнике BKM $\angle KBM=\angle 2$, $\angle BMK=\angle 1+\angle 3$. Т.е. сумма этих двух углов равна 90^0, откуда делаем вывод, что $BO \perp MN$. Площадь четырехугольника $BNOM$ равна сумме площадей треугольников BNO и BOM=1/2(NM) $\times BO$=1/2(a cosα)R=0,5Ra cosα

Ответ: Искомая площадь равна 1/2Ra cosα.

7.

1) $\dfrac{-14+\sqrt{317-68\sqrt{7}}}{\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{7}}}+\sqrt{2\sqrt{7}} \quad = \dfrac{3-2\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{7}}}+\sqrt{2\sqrt{7}}=\sqrt{3}$

2) $=3+2\sqrt{3}-3-4\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

3) $=7-2\sqrt{6}+2\sqrt{6}=7$

4) $\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3})\times 7=-42$

Ответ:-42.

8. 1) Строим график функции $y_1=\dfrac{3x^4-9|x^3|+6x^2}{3(x^2-|2x|)(|x|-1)}, x\in[0;5]$;

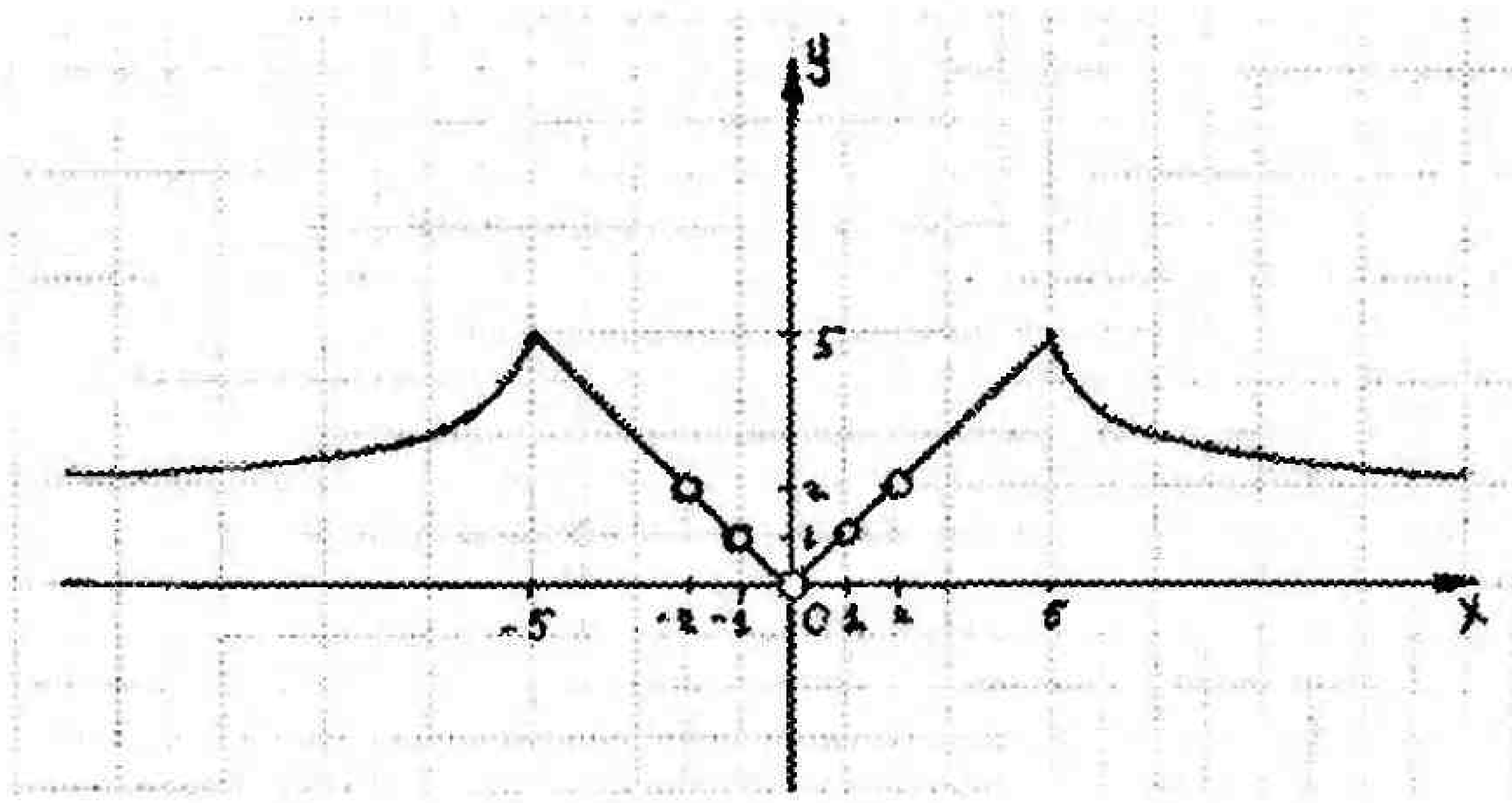
После упрощения =>Строим график y_1=x. $D(y_1)=(0;5]\backslash\{1;2\}$;

2) Строим график функции $y_3=\dfrac{2x^2-15x+25}{x^2-9x+20}, x\in(5;+\infty)$;

После упрощения =>Строим график $y_3=\dfrac{3}{x-4}+2$. $D(y_3)=(5;+\infty)$;

График этой функции представляет собой гиперболу с асимптотами: x=4 и =2 (т.е. для построения смещаем график функции $y=\dfrac{3}{x}$ на 4 единицы вправо и 2 вверх).

3) После выполнения пунктов 1-2 отображаем график функции относительно оси OY.



4) $D(y)=R\backslash\{-2;-1;0;1;2\}$. $E(y)=(0;5]\backslash\{1;2\}$.

5) $-\infty<a\leq 0$ => нет корней, $0<a<1$ => 2 корня, $a=1$ => нет корней, $1<a<2$ => 2 корня,

$a=2$ => нет корней, $2<a<5$ => 4 корня, $a=5$ => 2 корня, $a>5$ => нет корней.

Ответ: $D_f=[-4;4]\backslash\{\pm 3; \pm 1; \pm 1/2; 0\}$ $E_f=(0;6]\backslash\{3/2;3\}$

$a\in(-\infty;0]\cup\{3/2;3\}\cup(6;+\infty)$ – нет решений, $a\in(0;3/2)\cup(3/2;2)\cup(3;6]$ – два решения

$a=2$ – четыре решения, $a\in(2;3)$ – шесть решений

4.9. Варианты для самостоятельного решения

Вариант 2008г

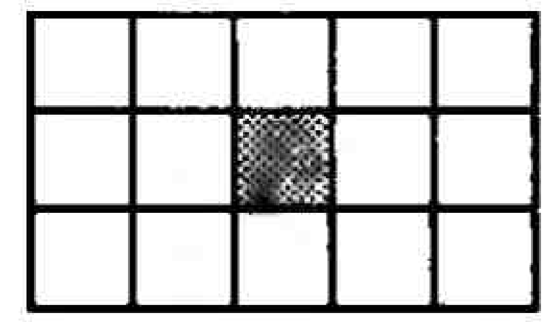
1. (6 баллов) Разложить на множители: x^4+1.

2. (8 баллов) Сравнить: $\sqrt{2008}+\sqrt{2005}$ и $\sqrt{2006}+\sqrt{2007}$

3. (10 баллов) Эстафета длинной 2008 км состоит из нескольких этапов одинаковой длины, выраженной целым числом километров. Участники команды города Энск преодолевали её несколько дней, проходя каждый этап ровно за 1 час. Сколько времени длилась эстафета, если известно, что они прошли её менее чем за 2 недели?

4. (12 баллов) Даны отрезки $\underline{\quad a \quad}$, $\underline{\quad b \quad}$. Построить с помощью циркуля и линейки отрезок c, такой что $c=\sqrt{2b^2+2ab+a^2}$. Сколько решений имеет задача? Всегда ли возможно построение?

5. (8 баллов) В прямоугольнике, разбитом на квадраты, вырезан центральный квадрат. Укажите различные способы разрезания данной фигуры на 2 равные части, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток. (Способы считаются различными, если части, получаемые при одном способе разрезания, не равны частям, полученным при другом способе).



6. (10 баллов) В квадрате, состоящем из 9 клеток, расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы суммы чисел, стоящих в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду, а также на любой диагонали были равны.

7. (8 баллов) На плоскости xOy построить множество точек, таких что: $\frac{y+1}{x+y}=2$.

8. (12 баллов) В лесу 99% сосен и 1% берёз. Вырубили часть сосен так, что сосны теперь составляют 98% всего леса. Какую часть леса вырубили?

9. (12 баллов) График функции $y = ax^2 + bx + c$ при всех значениях x расположен ниже прямой $y = 2$. Определить знак выражения: $a - b + c - 3$.

10. (14 баллов) В параллелограмме ABCD точки M и K – середины сторон CD и AD соответственно, P – точка пересечения отрезков AM и BK. Найти отношение площади треугольника APK к площади параллелограмма.

9 класс вариант 2010г

1. Докажите, что при всех действительных значениях переменных x и y выполняется неравенство: $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3 \geq 0$.

2. Решите неравенство:

$$(x+5)x^2+10(5x+4)+10x^2 \geq 7(5x+4)\sqrt{x+5}-(x+5)(5x+4)+7x^2\cdot\sqrt{x+5}.$$

3. Функция $y=f(x)$ – чётная, её областью определения является множество действительных чисел. Известно, что уравнение $2f(x)-5=0$ имеет 2011 различных корней. Найдите $f(0)$. Ответ обоснуйте.

4. При каких значчениях параметра a уравнение

$(a+2)(x^2+8x+16)^2-2(a-1)(x^2+8x+16)-a-2=0$ имеет ровно два различных решения?

5. Три пловца должны проплыть из A в B и обратно. Сначала стартует первый, через 5 секунд – второй, ещё через 5 секунд – третий. Некоторую точку C, находящуюся между

пунктами А и В, все пловцы миновали одновременно (до этого ни один из них в В не побывал). Третий пловец, доплыв до В и повернув назад, встречает второго в 9 метрах от В, а первого – в 15 метрах от В. Найдите скорость третьего пловца, если расстояние АВ равно 55 метров.

6. Правильный десятиугольник со стороной равной 2 см вписан в окружность. Не пользуясь калькулятором и таблицами, найдите точное значение выражения $(\sqrt{5}-1)R$, где R – радиус описанной вокруг десятиугольника окружности.

7. На прямой, проходящей через центр О окружности радиуса 12 см, взяты точки А и В так, что ОА=15 см, АВ=5 см (точки А и В лежат с одной стороны от точки О). Из точек А и В проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой АВ. Найдите площадь треугольника АВС, если С – точка пересечения этих касательных.

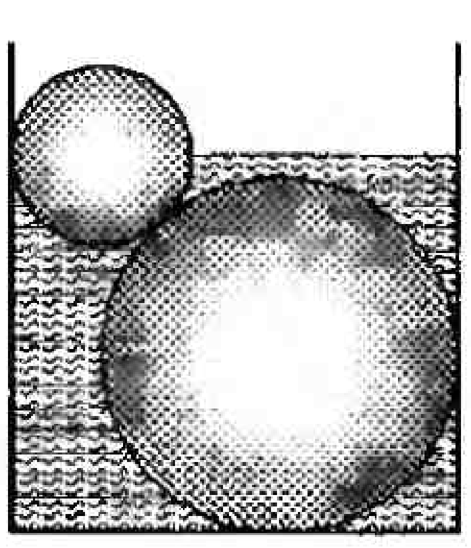
4.10. Физика

10 класс вариант 2009г

1. Траектория. Камень бросили с поверхности земли под некоторым углом к горизонту. Выберем начало координат в точке броска, ось x направим горизонтально вдоль поверхности земли, а ось y – вертикально. Тогда уравнение траектории камня описывается функцией $y(x) = -kx^2 + x$, где $k = 0{,}2$ м$^{-1}$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, посчитайте время движения камня.

2. Полет самолета. Самолет летит по прямой горизонтально со скоростью V_0 = 720 км/ч. Чтобы сделать разворот в горизонтальной плоскости, ему необходимо увеличить скорость. Какой будет эта скорость V, и под каким углом α к вертикали, самолет должен наклонить плоскость крыльев, чтобы разворот произошел по окружности радиуса R = 8 км? Подъемная сила направлена перпендикулярно плоскости крыльев и пропорциональна квадрату скорости самолета (коэффициент пропорциональности в обоих случаях, в прямолинейном и наклонном полете, считайте одинаковым).

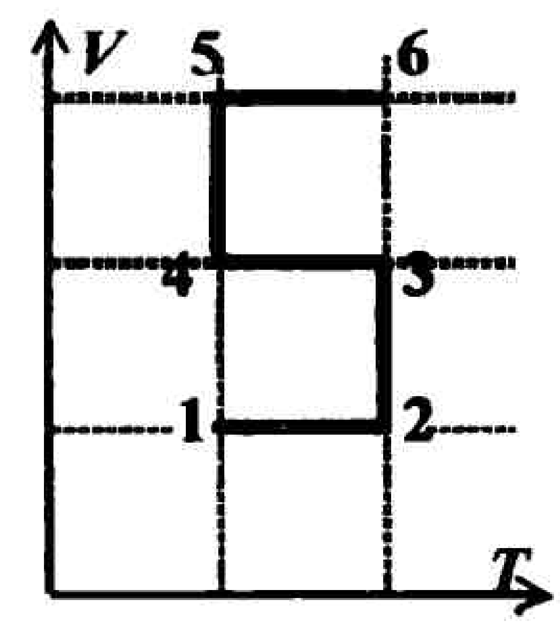
3. Давление шариков. Два шарика из одинакового материала радиусами r и $2r$ поместили в цилиндрический сосуд диаметром $4{,}5r$, как показано на рисунке. В сосуд наливают жидкость плотности ρ. Когда жидкость доходит до середины верхнего шарика, нижний шарик перестает давить на дно. С какой силой в этот момент верхний шарик давит на



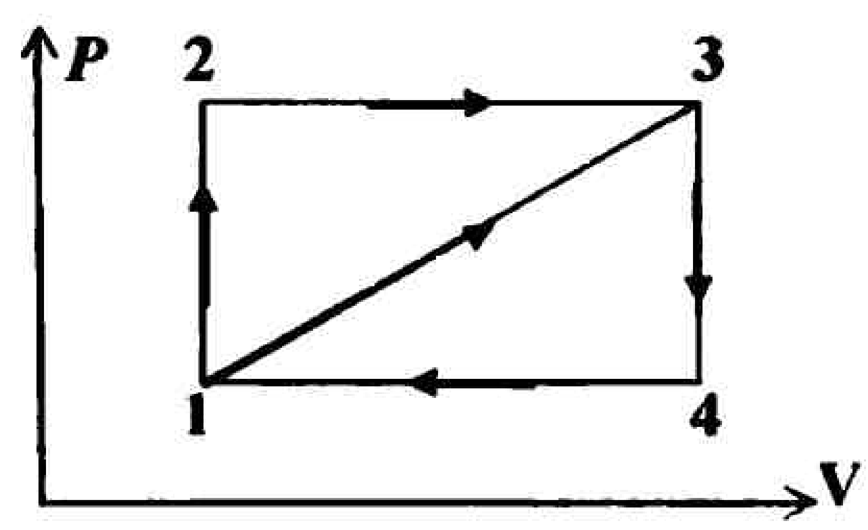
нижний? Чему равна плотность материала шариков?

Примечание. Объём шара радиуса r вычисляется по формуле: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

4. Пятерка превращается.... На рисунке изображен график изменения объема V идеального газа от его абсолютной температуры T в процессе 1–2–3–4–5–6. Считая массу газа постоянной, изобразите, соблюдая правильный масштаб, как будет выглядеть зависимость давления P от абсолютной температуры T для этого процесса.



5. КПД. Коэффициент полезного действия цикла 1–2–3–4–1, представленного на рисунке, равен η. Определите КПД цикла 1–3–4–1.



4.11. Решение варианта 2009г

Задача 1. Уравнение траектории $y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot x$.

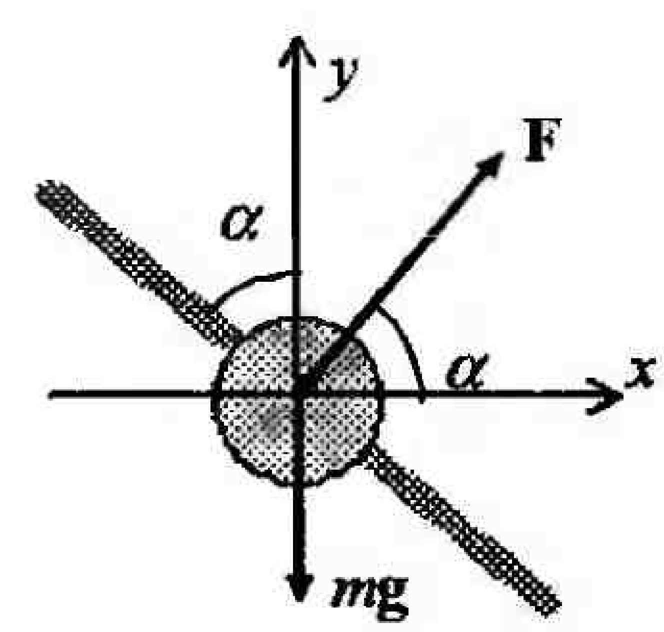
По условию $y(x) = -kx^2 + x$. $\Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = 1, \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

$$\Rightarrow \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} = k, \Rightarrow V_0 = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2k}} = \cancel{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{9,8}{\cancel{2}\cdot 0,2}} = \sqrt{49} = 7 \text{ м/с}.$$

Время движения камня $t = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} = \frac{\cancel{2}\cdot 7\cdot\sqrt{2}}{9,8\cdot\cancel{2}} \simeq 1$ с. Ответ: $t \simeq 1$ с.

Задача 2. При движении по прямой: $mg = kV_0^2$.

При движении по окружности:

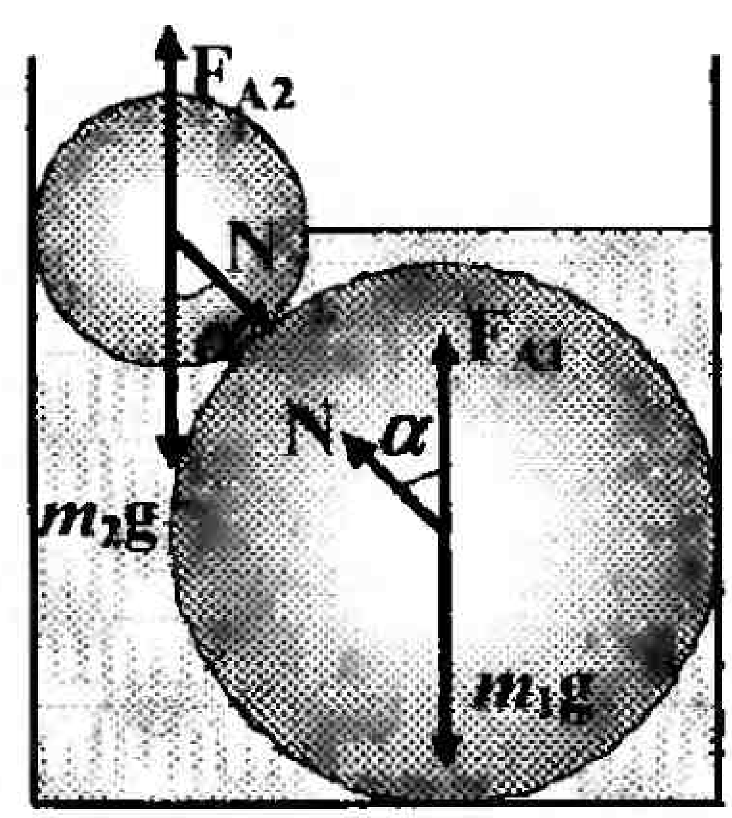


$$\begin{cases} x: F\cos\alpha = \dfrac{mV^2}{R}, \\ y: F\sin\alpha = mg, \\ F = kV^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{mg}{V_0^2}, \\ k\cancel{V^2}\cos\alpha = \dfrac{m\cancel{V^2}}{R}, \\ kV^2\sin\alpha = mg. \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{V_0^2}{gR} = \frac{200^2}{9{,}8\cdot 8\cdot 10^3} \approx 0{,}5, \Rightarrow \alpha \approx 60^\circ$$

$V = \dfrac{V_0}{\sqrt{\sin\alpha}} \approx$ 215 м/с ≈774 км/ч.

Ответ. $\alpha = \arccos\left(\dfrac{V_0^2}{gR}\right) \approx 60^\circ$, $V = \dfrac{V_0}{\sqrt{\sin\alpha}} \approx$ 215 м/с ≈774 км/ч.

Задача 3



$$\begin{cases} F_{A1} - N\cos\alpha - m_1 g = 0, \\ F_{A2} + N\cos\alpha - m_2 g = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \rho\dfrac{4}{3}\pi(2r)^3 g - N\cos\alpha - \rho_ш\dfrac{4}{3}\pi(2r)^3 g = 0, \\ \rho\dfrac{2}{3}\pi r^3 g + N\cos\alpha - \rho_ш\dfrac{4}{3}\pi r^3 g = 0. \end{cases} +$$

$$\rho\frac{34}{3}\pi r^3 g - \rho_ш\frac{36}{3}\pi r^3 g = 0, \Rightarrow \rho_ш = \frac{17}{18}\rho.$$

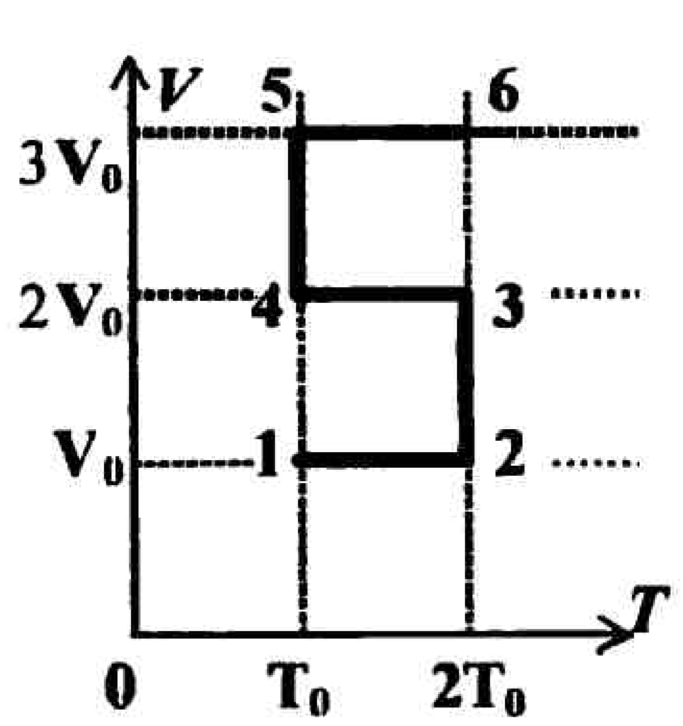
Т.к. диаметр цилиндра $D = r + r\sin\alpha + 2r + 2r\sin\alpha = 3r(1+\sin\alpha) = 4{,}5r$, т

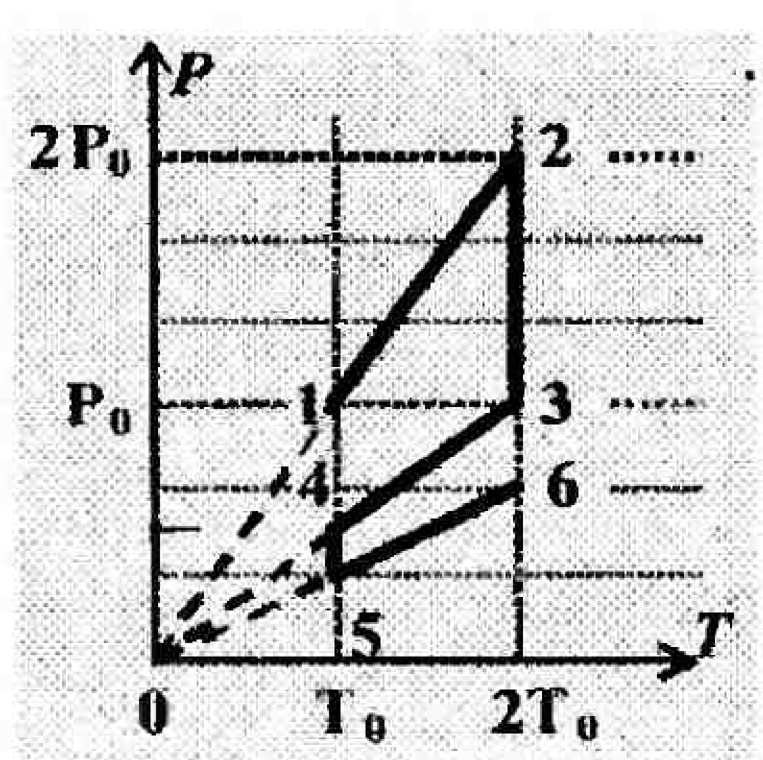
$\sin\alpha = 0{,}5$, $\Rightarrow \alpha = 30^\circ$. Подставляя это значение угла в любое уравнение системы

получим $N = \dfrac{32}{27\sqrt{3}}\pi\rho g r^3$.

Ответ: $N = \dfrac{32}{27\sqrt{3}}\pi\rho g r^3$, $\rho_ш = \dfrac{17}{18}\rho$.

Задача 4.



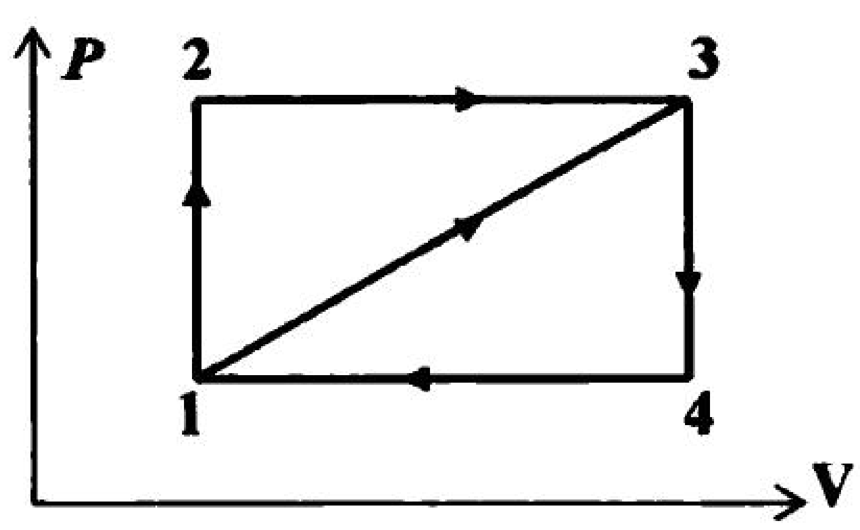


Состояние	Параметры	Вычисления
1	P_0, V_0, T_0	
2	$P_0, V_0, 2T_0$	$\frac{P_2}{2T_0} = \frac{P_0}{T_0} \Rightarrow P_2 = 2P_0$
3	$P_3, 2V_0, 2T_0$	$P_3 \cdot 2V_0 = P_2 \cdot V_0 \Rightarrow P_3 = P_0$
4	$P_4, 2V_0, T_0$	$\frac{P_4}{T_0} = \frac{P_3}{2T_0} \Rightarrow P_4 = \frac{P_0}{2}$
5	$P_5, 3V_0, T_0$	$P_4 \cdot 2V_0 = P_5 \cdot 3V_0 \Rightarrow P_5 = \frac{P_0}{3}$
6	$P_6, 3V_0, 2T_0$	$\frac{P_6}{2T_0} = \frac{P_5}{T_0} \Rightarrow P_6 = \frac{2}{3}P_0$

Задача 5. Обозначим работу за цикл 1-2-3-4-1 A_0. Тогда в цикле 1-2-3-4-1 полученное тепло $Q_{пол} = Q_{12} + Q_{23}$, а отданное $Q_{отд} = |Q_{34}| + |Q_{41}|$. Тогда $A_0 = Q_{пол} - Q_{отд}$.

В цикле 1-3-4-1 работа за цикл равна $A_0/2$, $Q'_{пол} = Q_{13}$, $Q'_{отд} = |Q_{34}| + |Q_{41}| = Q_{отд}$, $A_0/2 = Q'_{пол} - Q'_{отд} = Q'_{пол} - Q_{отд}$.

Кпд циклов 1-2-3-4-1 η и 1-3-4-1 η' вычисляются по формулам:



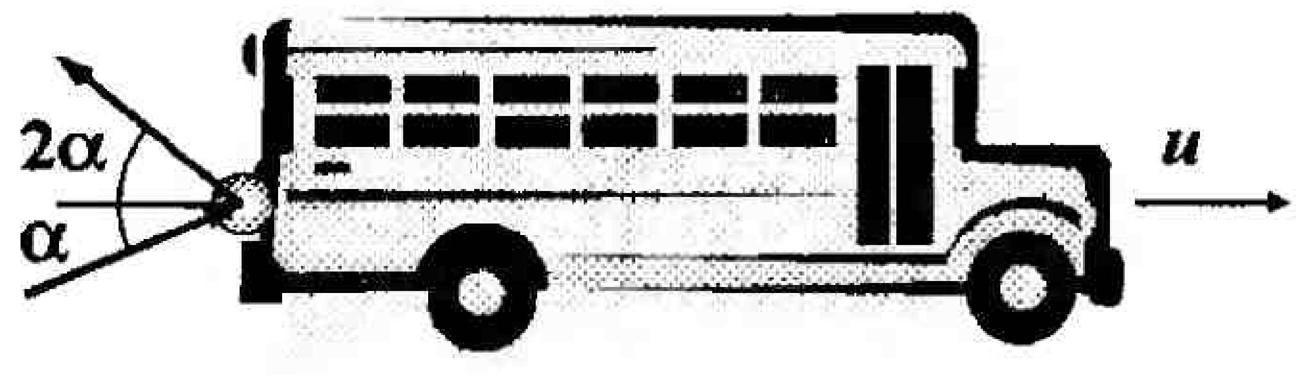
$$\begin{cases} \eta = \dfrac{A_0}{Q_{пол}} = \dfrac{A_0}{A_0 + Q_{отд}}, & \Rightarrow \dfrac{1}{\eta} = 1 + \dfrac{Q_{отд}}{A_0} \Rightarrow \\ \eta' = \dfrac{A_0/2}{Q_{пол}} = \dfrac{A_0/2}{A_0/2 + Q_{отд}}, & \Rightarrow \dfrac{Q_{отд}}{A_0} = \dfrac{1}{\eta} - 1. \end{cases}$$

Тогда кпд цикла 1-3-4-1 выражается через кпд цикла 1-2-3-4-1.

$$\eta' = \frac{A_0/2}{A_0/2 + Q_{отд}} = \frac{1}{1 + \dfrac{2Q_{отд}}{A_0}} = \frac{1}{1 + 2\left(\dfrac{1}{\eta} - 1\right)} = \frac{\eta}{2 - \eta}.$$ Ответ: $\eta' = \dfrac{\eta}{2 - \eta}$.

4.12. Вариант 2010г

1. Мальчик бросил мяч в заднюю вертикальную стенку отъезжающего автобуса. Мяч подлетает к стенке под углом $\alpha < 45°$, а отлетает от нее под углом 2α. Углы отсчитываются от нормали к стенке. Определите скорость мяча в момент удара, если скорость автобуса в этот момент равна u. Время удара считайте очень малым, а сам удар абсолютно упругим.

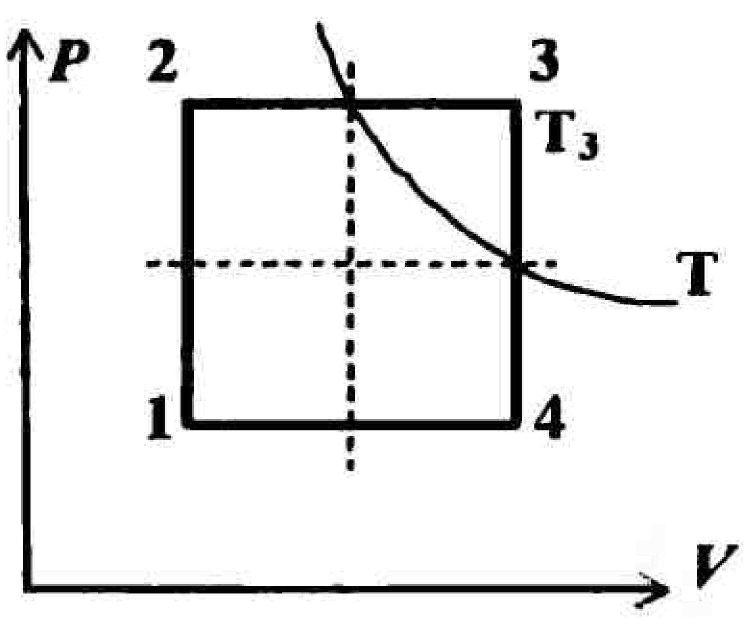


2. Представьте себе, что на полюсе Земли пробурили шахту, направленную к центру Земли. Какую скорость разовьет маленький камушек, упавший в эту шахту, пролетев расстояние равное одной четвертой радиуса Земли. Для сравнения, первая космическая скорость равна $V_1 = 8$ км/с. Силами сопротивления пренебречь.

3. N комочков пластилина достали из холодильника, поэтому все комочки имеют температуру 0°С. Массы комочков равны m, $2m$, $3m$,…, Nm. Их положили на лед в ряд один за другим в произвольном порядке, причем первым оказался самый легкий кусочек пластилина. Этот кусочек толкнули вдоль линии, на которой лежат остальные комочки, сообщив ему кинетическую энергию W. При каждом столкновении комочки слипаются, так что после всех столкновений образуется одно большое тело. Какую максимальную температуру может иметь это тело, если удельная теплоемкость пластилина равна c?

4. Воздушный шар с массой оболочки m имеет внизу отверстие, через которое воздух в шаре нагревается горелкой до температуры $t = 77$°С. Если к оболочке прикрепить груз массой $4m$, то шар сможет подняться в воздух и плавать вблизи поверхности Земли. На какую максимальную высоту способен подняться этот воздушный шар, если с него сбросить половину массы груза? Температура окружающего воздуха на этой высоте равна $t_1 = -23$°С, а вблизи поверхности Земли $t_0 = 27$°С. Как известно, атмосферное давление уменьшается в два раза через каждые пять километров высоты. Оболочку шара считайте нерастяжимой.

5. С некоторым количеством идеального одноатомного газа совершают циклический процесс, состоящий из двух изобар и двух изохор. Середина изобары 2-3 и середина изохоры 3-4 лежат на одной изотерме, соответствующей температуре T.

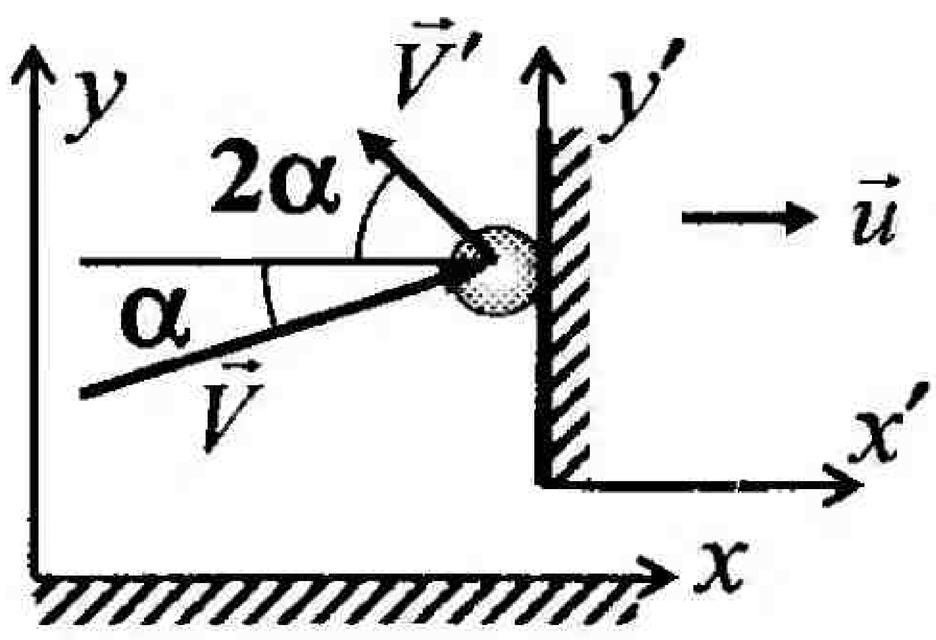


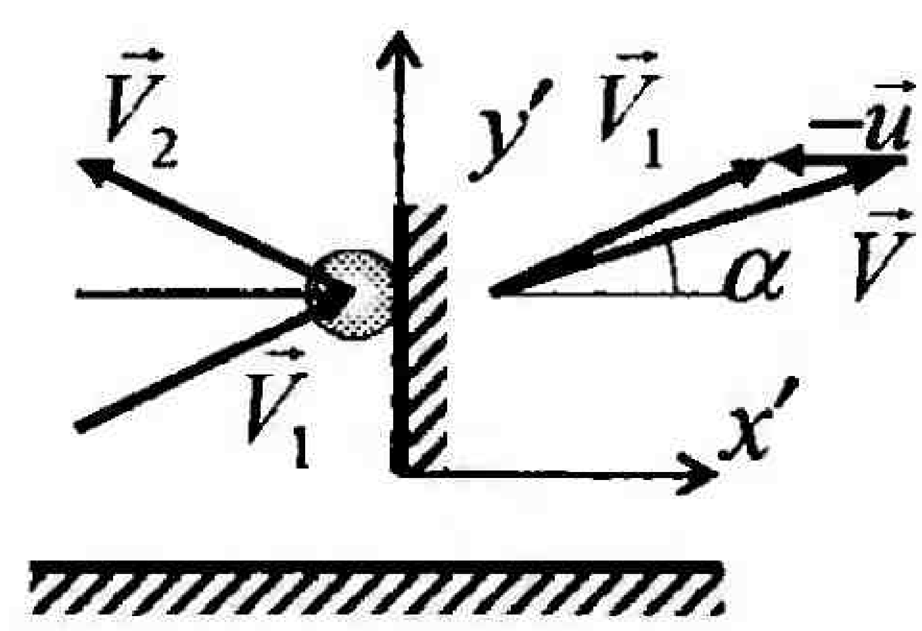
а) Докажите, что точки 2 и 4 цикла также лежат на одной изотерме.

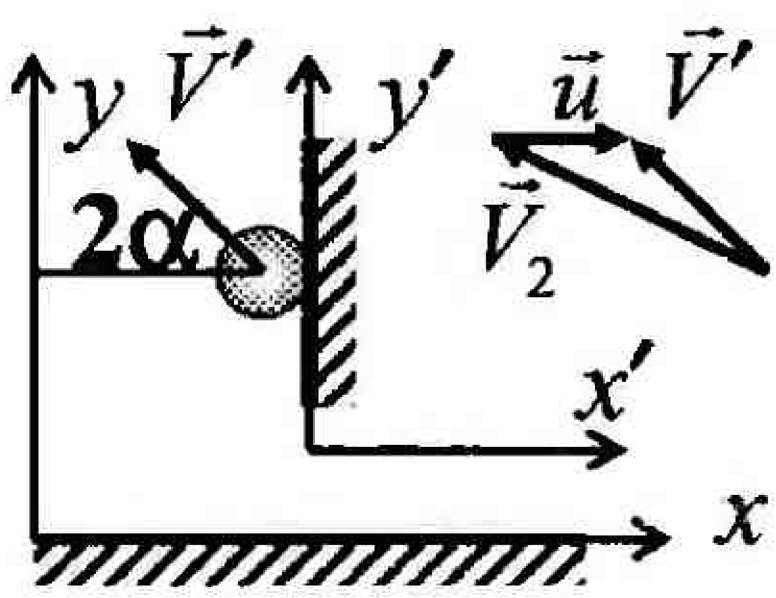
б) Считая известными температуру T и температуру T_3 газа в состоянии 3, найдите коэффициент полезного действия этого цикла.

4.13. Решение варианта 2010г

Задача 1. Для решения задачи рассмотрим движение мяча в двух системах отсчета: в неподвижной системе отсчета xy, связанной с землей, в ней скорость мяча в момент удара обозначим $\vec{V}$, скорость мяча после удара – $\vec{V}'$, скорость автобуса – $\vec{u}$ (рис а) и в движущейся системе отсчета, связанной с автобусом (рис. б).







а) в неподвижной С.О б) в движущейся С.О в) в неподвижной С.О

В движущейся системе отсчета относительная скорость мяча $\vec{V}_1 = \vec{V} - \vec{u}$ (рис. б).

$$\begin{cases} x' : V_{1x} = V\cos\alpha - u, \\ y' : V_{1y} = V\sin\alpha. \end{cases}$$

После упругого отражения от стенки скорость мяча $\vec{V}_2$ сохраняет свой модуль и угол падения равен углу отражения.

$$\begin{cases} x' : V_{2x} = -V_{1x} = -V\cos\alpha + u, \\ y' : V_{2y} = V_{1y} = V\sin\alpha. \end{cases}$$

Перейдем снова в неподвижную систему отсчета (рис в). $\vec{V}' = \vec{V}_2 + \vec{u}$.

$$\begin{cases} x: V'_x = V_{2x} + u = -V\cos\alpha + 2u, \\ y: V'_y = V_{2y} = V\sin\alpha. \end{cases}$$

Т.к. из рисунка к задаче следует, что мяч отлетает влево под углом 2α, то $V'_x < 0$

и

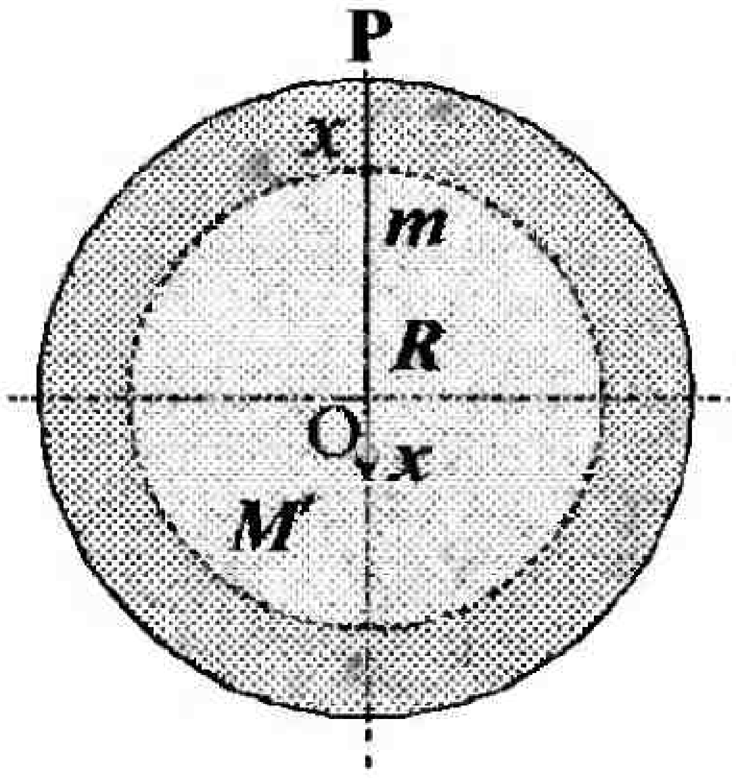
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{|V'_y|}{|V'_x|} = \frac{V\sin\alpha}{|-V\cos\alpha + 2u|} = \frac{V\sin\alpha}{V\cos\alpha - 2u}, \Rightarrow$$

Ответ: $V = \dfrac{2u}{\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha} = 4u\cos\alpha$.

Задача 2. Сила гравитационного взаимодействия однородного шара радиуса R с материальной точкой массы m, находящейся внутри шара на расстоянии $r < R$ от центра шара равна силе, с которой взаимодействует материальная точка с однородным шаром радиуса r и массы M' (см. рис) $F(x) = G\dfrac{mM'}{r^2}$.

Это утверждение можно доказать, пользуясь, например, теоремой Гаусса для гравитационного поля. *Школьники могут использовать его без доказательства.*

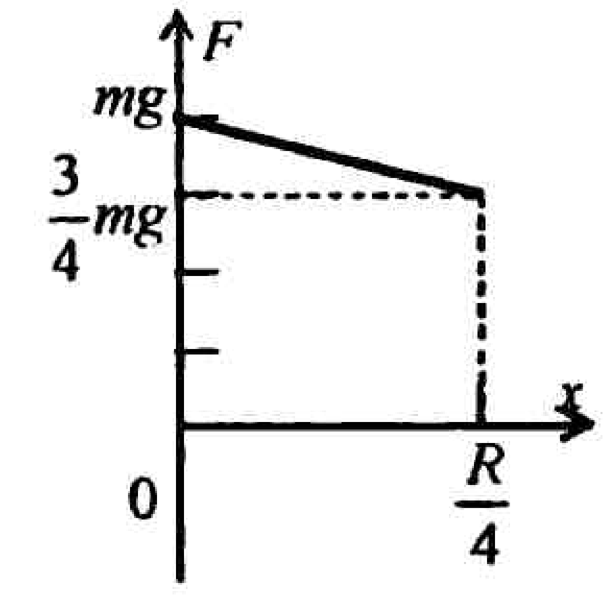
Пусть x – расстояние, отсчитанное от полюса Р, которое пролетел камушек, тогда сила его притяжения к Земле равна



$$F(x) = G\frac{mM'}{(R-x)^2} = G\frac{m}{(R-x)^2}\cdot\rho\frac{4}{3}\pi(R-x)^3 =$$

$G m\rho\dfrac{4}{3}\pi(R-x)$, где ρ – средняя плотность Земли:

$\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, M – масса Земли, R – радиус



Земли. $F(x) = G\dfrac{mM}{R^3}(R-x) = mg\dfrac{R-x}{R}$.

Работа силы тяготения, вычисляемая по графику $F(x)$, равна изменению кинетической энергии камушка.

$$\frac{mV^2}{2} = A_F = \frac{1}{2}\left(mg + \frac{3}{4}mg\right)\frac{R}{4}. \Rightarrow$$

Ответ: $V = \dfrac{\sqrt{7gR}}{4} = \dfrac{\sqrt{7}}{4} V_1 = 5{,}3$ км/с.

Задача 3. Обозначим через V – скорость комочка массой m, тогда $W = \dfrac{mV^2}{2}$,

через u – скорость большого тела массы $M = m + 2m + \ldots + Nm = \dfrac{N(N+1)}{2} m$.

При всех столкновениях сохраняется импульс: $mV = Mu$, $\Rightarrow$ $u = \dfrac{mV}{M}$.

Изменение энергии $\Delta W = \dfrac{mV^2}{2} - \dfrac{Mu^2}{2} = \dfrac{mV^2}{2}\left(1 - \dfrac{m}{M}\right) = W\left(1 - \dfrac{2}{N(N+1)}\right)$.

Пренебрегая потерями энергии, $\Delta W = Q = cM\left(t - 0^\circ\mathrm{C}\right)$. $\Rightarrow$

Ответ: $t = \dfrac{W}{cM}\left(1 - \dfrac{2}{N(N+1)}\right) = \dfrac{2W}{cm} \cdot \dfrac{N^2 + N - 2}{N^2 (N+1)^2} = \dfrac{2W(N-1)(N+2)}{cmN^2 (N+1)^2}$.

Задача 4. Условие плавания вблизи поверхности Земли: $(m + 4m + m_{г.в.})g = \rho_в g V$, где $m_{г.в.}$ – масса горячего воздуха в шаре, V – объем шара, $\rho_в$ – плотность воздуха снаружи шара.

Обозначим P_0 – давление вблизи поверхности Земли, тогда

$$P_0 V = \frac{m_{г.в.}}{\mu} RT, \Rightarrow m_{г.в.} = \frac{P_0 V \mu}{RT},$$

$$P_0 = \frac{\rho}{\mu} RT_0, \Rightarrow \rho = \frac{P_0 \mu}{RT_0}.$$

$$5m + \frac{P_0 V \mu}{RT} = \frac{P_0 V \mu}{RT_0}, \Rightarrow P_0 = \frac{5mRT_0 T}{V\mu(T - T_0)}.$$

Найдем теперь давление P на высоте, куда поднялся шар с грузом $2m$.

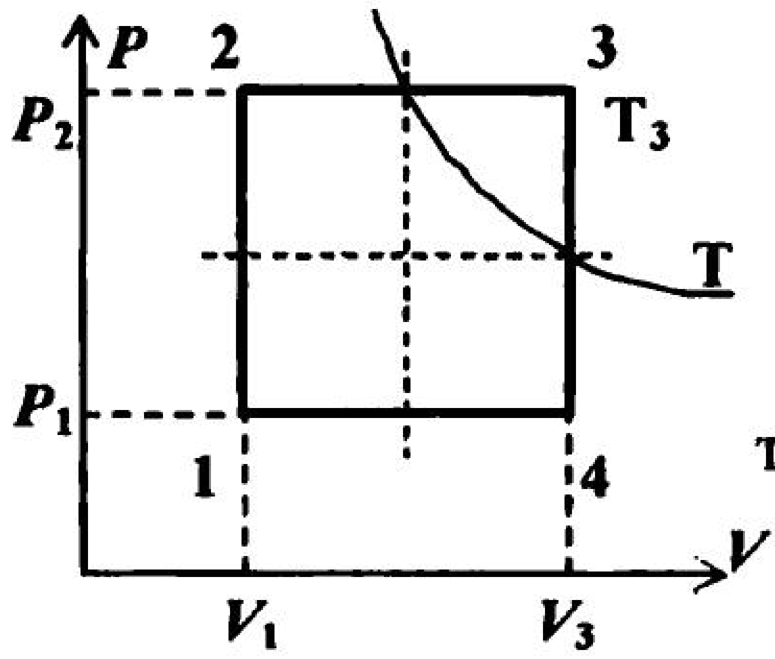
Условие плавания на этой высоте: $(m + 2m + m'_{г.в.})g = \rho'_в g V$,

где $m'_{г.в.} = \dfrac{PV\mu}{RT}$, $\rho' = \dfrac{P\mu}{RT_1}$. $\Rightarrow$ $3m + \dfrac{PV\mu}{RT} = \dfrac{PV\mu}{RT_1}$, $\Rightarrow$ $P = \dfrac{3mRT_1 T}{V\mu(T - T_1)}$.

Отношение давлений равно $\dfrac{P_0}{P} = \dfrac{5T_0(T - T_1)}{3T_0(T - T_0)} = \dfrac{5 \cdot 300 \cdot 100}{3 \cdot 250 \cdot 50} = 4$,

Ответ: $H = 10$ км.

Задача 5.



а) $P_2\dfrac{(V_1+V_3)}{2}=\dfrac{(P_1+P_2)}{2}V_3=\nu RT$, (*)

$\Rightarrow\ P_2V_1=P_1V_3$, $\Rightarrow\ T_2=T_4$, точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

б) Из (*) $\Rightarrow \nu RT_2+\nu RT_3=2\nu RT$, $\boxed{T_2=T_4=2T-T_3}$.

Температуру T_1 можно найти, записав уравнения изохорных процессов 1-2 и 3-4.

$$\begin{cases}\dfrac{P_2}{T_2}=\dfrac{P_1}{T_1},\\[2mm] \dfrac{P_2}{T_3}=\dfrac{P_1}{T_4},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{P_2}{P_1}=\dfrac{T_2}{T_1},\\[2mm] \dfrac{P_2}{P_1}=\dfrac{T_3}{T_2},\end{cases}\Rightarrow\dfrac{T_2}{T_1}=\dfrac{T_3}{T_2},\Rightarrow\boxed{T_1=\dfrac{T_2^2}{T_3}=\dfrac{(2T-T_3)^2}{T_3}}.$$

Работа за цикл равна площади цикла 1-2-3-4-1.

$$A=(P_2-P_2)(V_3-V_1)=\nu R(T_3-T_4-T_2+T_1)=\nu R\frac{4(T_3-T)^2}{T_3}.$$

Газ получает тепло на участках 1-2 и 2-3: $Q_{пол.}=Q_{12}+Q_{23}$.

$$Q_{12}=c_{\mu V}\nu(T_2-T_1)=\frac{3}{2}\nu R\left((2T-T_3)-\frac{(2T-T_3)^2}{T_3}\right)=\frac{3\nu R}{T_3}(2T-T_3)(T_3-T).$$

$$Q_{23}=c_{\mu P}\nu(T_3-T_2)=\frac{5}{2}\nu R\big(T_3-(2T-T_3)\big)=5\nu R(T_3-T).$$

$$Q_{пол.}=\frac{3\nu R}{T_3}(2T-T_3)(T_3-T)+5\nu R(T_3-T)=\frac{2\nu R}{T_3}(T_3-T)(3T+T_3).$$

Ответ: КПД цикла $\eta=\dfrac{2(T_3-T)}{3T+T_3}$.

4.14. Варианты для самостоятельного решения

8 класс вариант 2008г

1. В какой воде и почему легче плавать: морской или речной?

2. Пользуясь системой подвижных и неподвижных блоков, необходимо поднять груз весом 600 Н. Из скольких подвижных и неподвижных блоков должна состоять система,

чтобы этот груз мог поднять один человек, прикладывая силу в 65 Н.

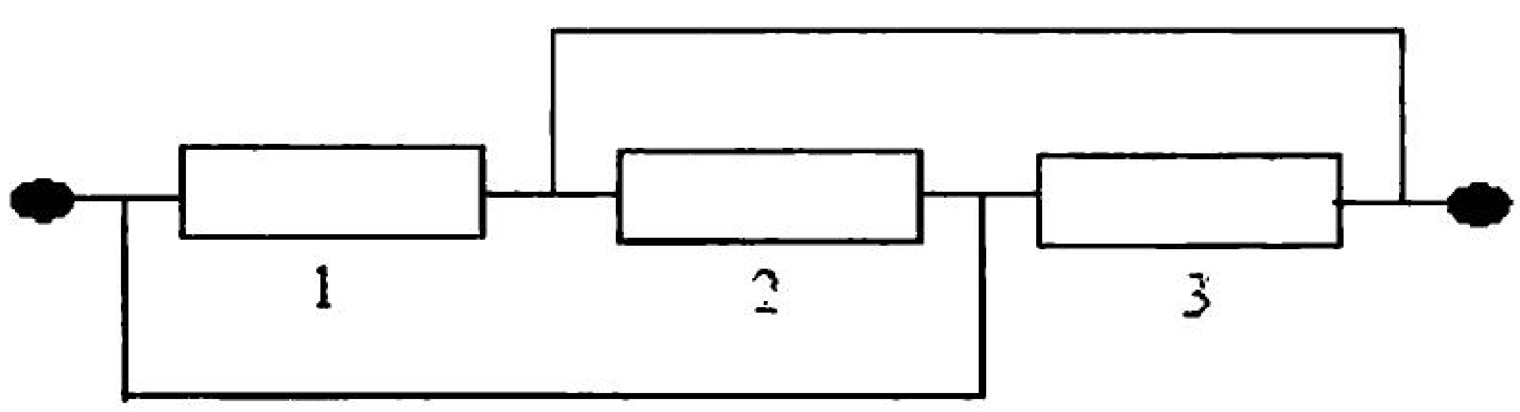
3. Сколько времени мимо мотоциклиста, едущего со скоростью 63 км/ч, будет проезжать встречная колонна автомобилей длиной 300 м, имеющая скорость 45 км/ч?

4. В калориметр, где находиться 1кг льда при температуре 0 °С. В воду помещают кусок льда массой 400 г, температура которого - 30 °С. Какая температура установиться в калориметре? Какой станет масса льда?

5. Алюминиевый кубик ставят на лед, имеющий температуру 0 °С. До какой температуры должен быть нагрет кубик, чтобы он погрузился в лед наполовину? Полностью?

6. Каково сопротивление цепи, если сопротивление каждого из резисторов 1 Ом?

а)



9 класс вариант 2009г

1. (32 балла) Два заряженных шарика массами m и 3m и зарядами q и 2q одного знака были отпущены в одной точке и разлетелись с горизонтальными начальными скоростями. Первый из них упал на расстоянии r = 0,75 м от эпицентра разлета, второй оказался в тот же момент на той же горизонтальной плоскости, что и первый. Найти силу Кулоновского взаимодействия шариков в момент падения на плоскость. q = 1 нКл. ε_0 = $1/4\pi.9.10^9$ Ф/м. Сила Кулона рассчитывается как $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q_1 q_2}{r^2}$

2. (32 балла) Деревянный кубик заглубили с помощью спицы в воду так, что его верхняя грань стала параллельной поверхности воды на глубине, равной одной трети ребра кубика. Найти работу силы Архимеда по перемещению кубика из этого положения в положение равновесия после всплытия. Колебаниями и изменением высоты уровня воды пренебречь. Плотность дерева принять равной 2/3 от плотности воды. Длина ребра 18 см. g = 10 м/с^2 . Увеличится или уменьшится эта величина, если верхний слой воды толщиной 6 см заменить слоем масла с плотностью 0,8 от плотности воды?

3. (12 баллов) Как объяснить образование облачка при открывании охлажденной бутылки с газированной водой?

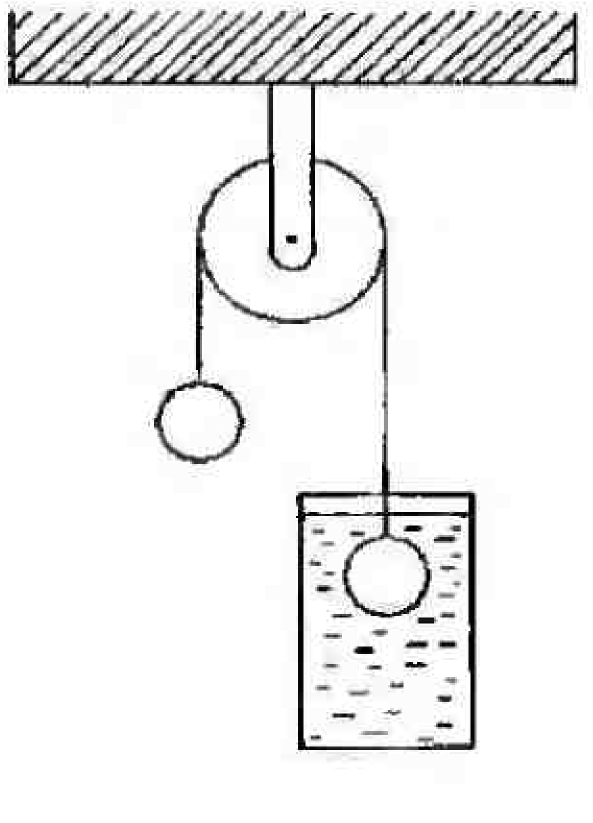
4. (12 баллов) На концах последовательного соединения пяти одинаковых резисторов большого сопротивления напряжение 120 В. Концы второго из цепочки резисторов соединены проводником. Оценить напряжение на первом из них?

5. (12 баллов) Как надо перенастроить оптику микроскопа (телескопа), чтобы можно было фотографировать наблюдаемый объект?

Вариант 2010г

1. Тренируясь, спортсмен взбегает вверх по лестнице эскалатора. Поднимаясь по неподвижному эскалатору, он преодолевает N_0 ступенек, а по движущемуся вверх – в 1,5 раза меньше. Сколько ступенек придётся преодолеть спортсмену, поднимаясь по эскалатору, который движется вниз?

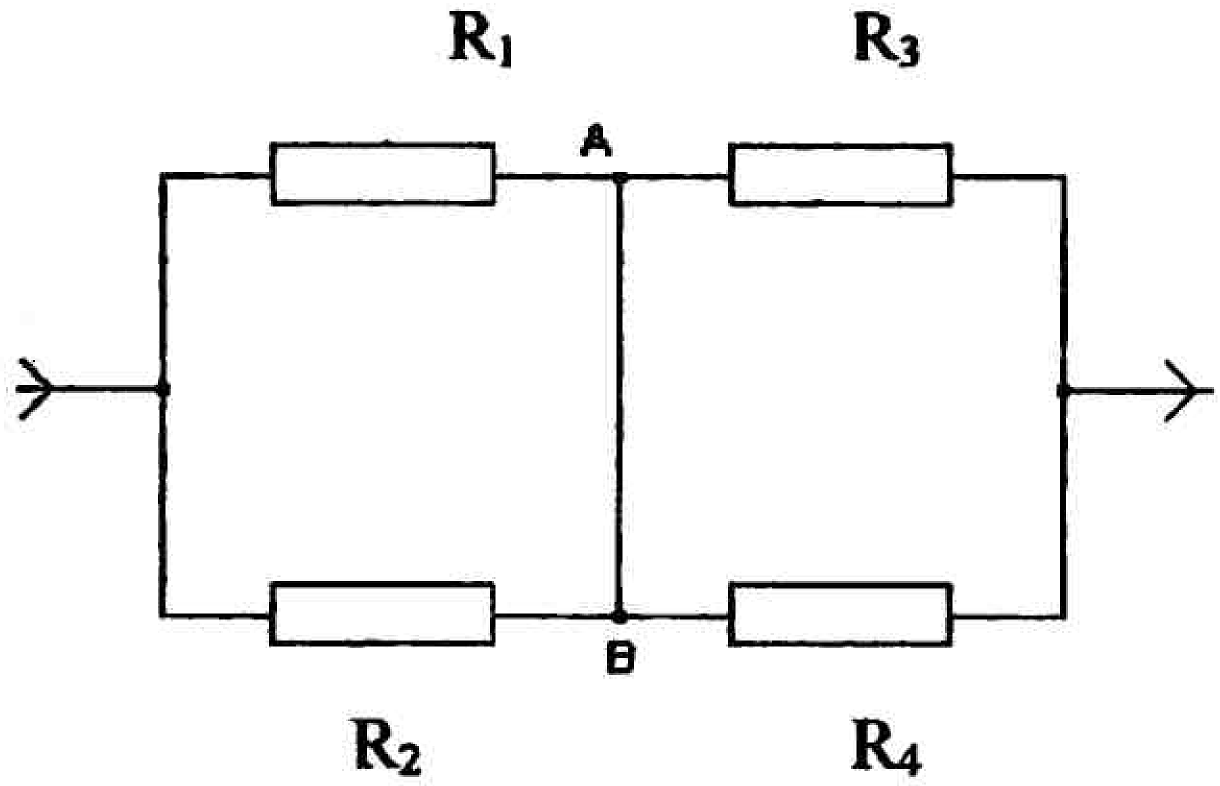
2. Два одинаковых шарика связаны невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок, причем один из шариков погружен в сосуд с жидкостью. С какой установившейся скоростью υ будут двигаться шарики, если известно, что установившаяся скорость падения одиночного шарика в той же жидкости равна υ_0? Сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости. Плотность жидкости равна $\rho_ж$, плотность материала шариков равна ρ.



3. Одновременно из одной точки брошены два тела с одинаковыми по модулю скоростями $\upsilon_0 = 10$ м/с: первое вертикально вверх, второе под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определите модуль скорости первого тела относительно второго υ_{12} в момент времени, когда второе тело достигнет ⅔ своей максимальной высоты подъёма. Сопротивлением воздуха пренебречь.

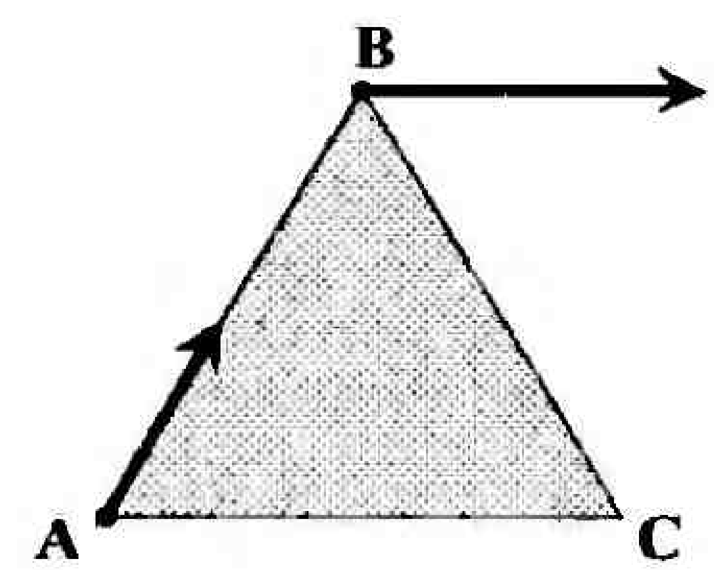
4. Три одинаковых шарика бросают вертикально вверх из одной точки на земле с одинаковыми начальными скоростями, равными $\upsilon_0 = 30$ м/с. Второй шарик бросают, когда первый достигает наибольшей высоты, а третий шарик бросают, когда первый сталкивается со вторым. Сколько времени будут находиться в полете первый и второй шарики? Считать, что при ударах шарики обмениваются скоростями, не отклоняясь от вертикали. Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Сопротивления, из которых собран участок цепи, равны $R_1 = 4$ Ом, $R_2=8$ Ом, $R_3 = 10$ Ом и $R_4 = 2$ Ом, сопротивление перемычки АВ пренебрежимо мало. Найти ток I во внешней цепи, если через перемычку АВ протекает ток $I_п = 3$ А.



10 класс вариант 2008г

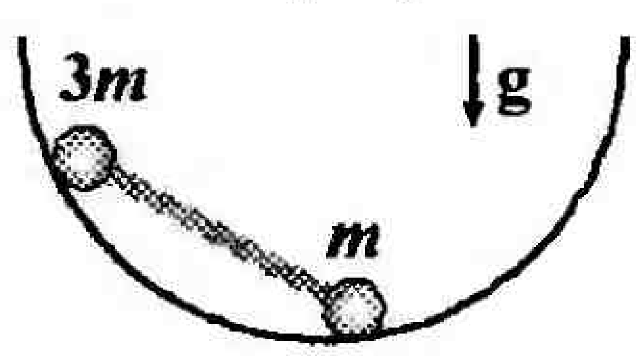
1. Тонкую пластинку, имеющую форму равностороннего треугольника ABC раскрутили и бросили на гладкую горизонтальную плоскость так, что пластинка в момент падения на плоскость была горизонтальной. В некоторый момент времени скорость точки A пластинки оказалась направленной вдоль стороны AB, а скорость точки B – параллельной стороне AC (см. рисунок).



Как направлена в этот момент скорость точки C? Чему при этом равны модули скоростей точек B и C, если скорость точки A равна v?

2. Оцените, как изменилась бы продолжительность земного года, если бы масса Земли сравнялась с массой Солнца, а расстояние между ними осталось бы прежним?

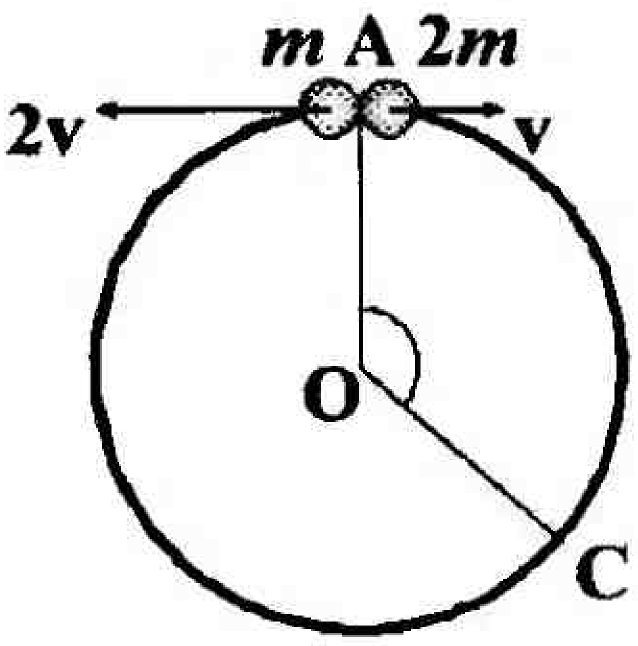
3. Гантель, состоящая из жесткого невесомого стержня с маленькими шариками массами $3m$ и m на концах, находится внутри гладкой полусферической чаши, как показано на рисунке.



Длина стержня равна радиусу чаши. Будучи отпущенной, гантель движется в вертикальной плоскости так, что шарики все время касаются поверхности чаши.

С какой силой шарики действуют на стержень в момент, когда он горизонтален?

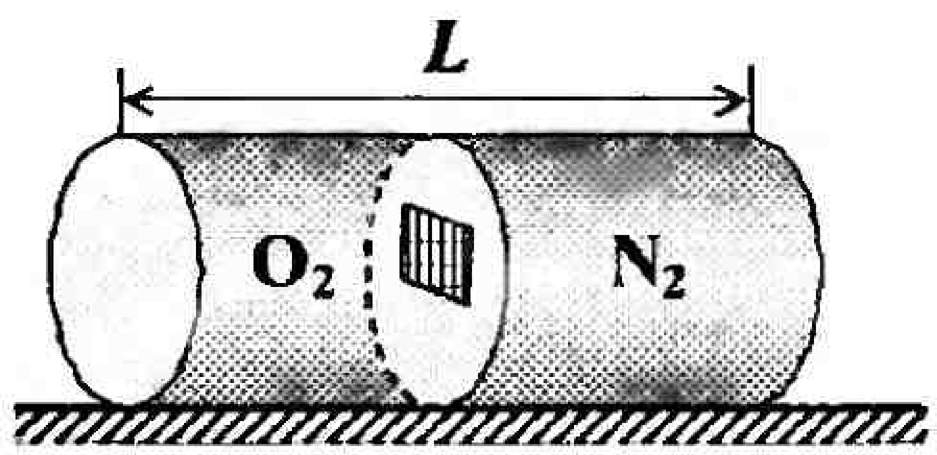
4. По гладкому горизонтальному проволочному кольцу могут скользить без трения две маленькие бусинки массами m и $2m$. Вначале бусинки находились в точке А кольца, как показано на рисунке. Бусинкам сообщают начальные скорости: бусинке массой m –



скорость 2v, а бусинке массой $2m$ – скорость v, направленные в противоположные стороны. В процессе своего движения бусинки многократно сталкиваются друг с другом.

Считая столкновения бусинок абсолютно упругими, определите угол AOC, если C – точка, в которой оказываются бусинки в момент их 101-го столкновения.

5. На гладком горизонтальном столе находится цилиндрический сосуд длиной L, разделённый перегородкой на две равные части (см. рисунок). В одной части сосуда находится кислород, а в другой – азот. Давление кислорода вдвое больше давления азота, а температуры одинаковы. В перегородке открывается шторка, в результате чего газы в сосуде перемешиваются. На какое расстояние при этом сдвинется сосуд? Массой сосуда и перегородки пренебречь. Процесс считать изотермическим.



РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ПОДГОТОВКЕ К ОЛИМПИАДАМ

по математике

1. Конкурсные задачи по математике и физике: Пособие для поступающих в МГТУ им. Н.Э.Баумана / Л.П.Паршев, А.Г. Андреев, Н.А. Гладков и Ю.А. Струков; Под ред С.В. Белова.- М.: Машиностроение, 1993.- 192с.

2. Справочное пособие для абитуриентов. Программы и содержание вступительных экзаменов по физике, математике, русскому языку и литературе литература / Сост.: Белов С.В., Камалова Р.А., Паршев Л.П., Струков Ю.А.; Под ред. С.В. Белова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.-144с.

3. Типовые варианты заданий вступительных испытаний в 2003 г. математика, физика, русский язык и литература / Сост.: Камалова Р.А., Паршев Л.П., Струков Ю.А.; Под ред. Н.Я. Ирьянова / МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М., 2003.-45с.

4. Власова Е.А. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, ISBN 5-7038-2900-3, 2006.-115с.

5. Краткое изложение стандартных и нестандартных методов решения задач по элементарной математике: Учеб. пособие / И.А. Соловьев, Г.В. Арутюнян, Е.В. Марчевская и др. – М.: ГУЗ, 2005.-216с.

6. Ляпин А.А, Родионов Е.М, Синякова С.Л. Математика. Сборник задач. 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Ориентир, 2006. - 392с.

7. Родионов Е.М. Справочник по математике для поступающих в вузы. Решение задач с параметрами. - М.: МЦ "Аспект", 1992. - 144с.

8. Элементарная геометрия. Методы решения задач : учеб. пособие / Г.В. Арутюнян, Е.В. Марчевская, И.К. Марчевский. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010.- 222с.

9. Будак А.Б., Щедрин Б.М. Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. Изд. 3-е, перераб. и доп. — М. Издат. отдел УНЦ ДО, 2001 - 690 с. ISBN 5-88800-132-5

10. Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике.— М: ИЛЕКСА, 2007. — 252 с: ил.

11. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. — К.: РИА "Текст"; МП "ОКО", 1992. -290 с.

12. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы (Избранные вопросы элементарной математики) - Изд. 5-е, перераб., 1976 - 638с.

13. Козко А.И., Чирский В.Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. - М., МЦНМО, 2007. - 296с.

14. Математика. Сборник задач по базовому курсу (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). Учебно-методическое пособие / Золотарёва Н. Д., Попов Ю. А., Семендяева Н. Л., Федотов М. В. - М.: Фойлис, 2010. - 236 с: ил. Под редакцией М. В. Федотова ISBN 978-5-91860-009-2

15. Мельников И.И., Сергеев И.Н. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 304с.

16. Моденов В.П. Математика. Пособие для поступающих в вузы. - М., Новая волна, 2002. - 796 с.

17. Олехник С.Н. , Потапов М.К, Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник. М.: Изд-во Факториал, 1997. - 219с.

18. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ - М.: Интеллект-Центр, 2010. - 80 с. ISBN 978-5-89790-612-3

19. Потапов М. К., Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В. Конкурсные задачи по математике: Справочное пособие.— Изд. 3-е, стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 416 с.

20. Цыпкин А. Г. Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в вузы / А. Г. Цыпкин, А. И. Пинский. — 3-е изд., испр. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2007. — 640 с: ил. ISBN 5-94666-341-0(000 «Издательство«Мир и Образование»)

21. Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. — 7-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2003. — 432 с: ил. — (Домашний репетитор). ISBN 5-8112-0256-3

22. Шарыгин, И. Ф. Математика для поступающих в вузы : учеб. пособие / И. Ф. Шарыгин. — 6-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2006. — 479, [1] с. : ил. ISBN 5-358-01163-3

23. Алгебра. Базовый курс с решениями и указаниями (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). Учебно-методическое пособие / Золотарёва Н. Д., Попов Ю.А., Семендяева Н. Л., Федотов М. В. - М.: Фойлис, 2010. - 568 с: ил. (Под редакцией М. В. Федотова ISBN 978-5-91860-008-5)

24. Геометрия. Базовый курс с решениями и указаниями. (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз).: Учебно-методическое пособие / Золотарёва Н. Д., Семендяева Н. Л., Федотов М. В. - М: Изд-во Фойлис, 2010. - 296 стр. : ил. (Под редакцией М. В. Федотова ISBN 978-5-91860-004-7)

25. Сборник задач по математике для поступающих во втузы (с решениями). В 2-х книгах. Кн. 1. Алгебра. /Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и др. Под ред. М.И. Сканави . - 7-е изд., перераб. и доп. - М., Высш.шк., 1994. _ 528 с.
26. Сборник задач по математике для поступающих во втузы (с решениями). В 2-х книгах. Кн. 2. Геометрия /Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и др. Под ред. М.И. Сканави . - 7-е изд., перераб. и доп. - М., Высш.шк., 1995. _ 368 с.
27. Олимпиада «Ломоносов» по математике (2005—2008). — М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 48 с, илл.
28. Всероссийская олимпиада школьников по математике 1993-2006; Окружной и финальный этапы / Под ред. Н.Х. Агаханова – М.: МЦНМО, 2007. – 472с.

по физике

29. Сборник тем научных работ для участников научно-образовательного сореноваиия «Шаг в будущее, Москва». – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2010. – 104 с.
30. Сборник организационных и методических материалов для профильных школ и поступающих в МГТУ им. Н.Э.Баумана. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2010. – 20 с.
31. Сборник лучших работ Одиннадцатой научной конференции «Шаг в будущее,Москва» – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. – 256 с.
32. Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.В., Мякишев Г.Я. Задачи по физике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
33. Буховцев Б.Б., Кривченко В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Сборник задач по элементарной физике. – М.: Наука, 1987. – 415 с.
34. Бутиков Е.И., Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1979. – 608 с.
35. Дмитриев С.Н., Васюков В.И., Струков Ю.А. Физика: сборник задач для поступающих в вузы. Изд. 5. – М.: Ориентир, 2003. – 208 с.
36. Задачи вступительных экзаменов. / Сост.: А.А.Егоров, В.А.Тихомирова. – М.: Бюро Квантум, 2008. – 176 с.
37. Яворский Б.М., Селезнев Ю.А. Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и самообразования. – М., 1979. – 512 с.

Оглавление

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА

Центр довузовской подготовки

МГТУ им. Н.Э.Баумана

105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5
Главный корпус, 3 этаж, ком. 374
Телефоны: +7(499)263-68-12
E-mail: cdp@bmstu.ru
Сайт: http://cendop.bmstu.ru/

Центр довузовской подготовки подготовка и профессиональное обучение довузовской молодежи в МГТУ им. Н.Э.Баумана

Основная цель деятельности Центра заключается в научно-методическом обеспечении и координации работы Университета, связанной с планированием, подготовкой и проведением мероприятий, направленных на обеспечение и формирование нового набора студентов в Университет.

Довузовская работа строится как непрерывная образовательная система «школа—вуз» и проводится в различных организационных формах.

ПРОФИЛЬНЫЕ УЧЕБНЫЕ ЗАВЕДЕНИЯ

(всего более 200)

Между МГТУ им. Н.Э.Баумана и профильными школами осуществляется тесное учебно-методическое, научно-методическое и организационное взаимодействие; ведется активная профориентационная работа с учащимися, предлагаются контрольно-диагностические работы, участие в олимпиадах и научно-образовательных мероприятиях (начиная с 8 класса), проводимых Университетом.

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ-ЛАБОРАТОРИИ

Организуются в целях расширения профессиональной ориентации школьников, повышения заинтересованности молодежи в получении инженерного образования. В программе школ-лабораторий:

- знакомство с кафедрами;
- мастер-классы ведущих исследователей и ученых;
- экскурсии на предприятия с демонстрацией инновационных технологий и продуктов.

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ И АКАДЕМИЧЕСКИЕ СОРЕВНОВАНИЯ

Управление ежегодно ведет работу по выявлению, привлечению и отбору наиболее способных к дальнейшему обучению в МГТУ им. Н.Э.Баумана школьников, проводит научно-образовательное соревнование «Шаг в будущее, Москва» и академическое соревнование «Профессор Жуковский» (по направлению «техника и технологии»), осуществляет организационную, методическую и научную подготовку к проведению научных и образовательных мероприятий.

ЦЕЛЕВОЙ НАБОР

Целевой набор осуществляется в рамках системы непрерывного профессионального образования «школавузпредприятие» в интересах Оборонно-промышленного комплекса. В осуществлении целевой подготовки в МГТУ им. Н.Э.Баумана участвуют предприятия Государственной корпорации по атомной энергии «Росатом», Федерального космического агентства «Роскосмос» и Министерства промышленности и торговли Российской Федерации.