3000 КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Издание пятое, исправленное

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации

МОСКВА
АЙРИС ПРЕСС
2003

УДК 510.2(076)
ББК 74.262
Т67

Авторы:
Е. Д. Куланин
В. П. Норин
С. Н. Федин
Ю. А. Шевченко

3000 конкурсных задач по математике. — 5-е изд., испр. —
Т67 М.: Айрис-пресс, 2003. — 624 с.: ил.

ISBN 5-8112-0196-6

В сборник вошло более 3500 конкурсных задач по математике предлагавшихся в ста с лишним вузах России и Белоруссии.

Подавляющее большинство задач предлагались на вступительных экзаменах в последние 15 лет. Ко всем задачам приведены ответы, ко многим даны указания, а к наиболее трудным и типичным — решения.

В конце книги приводятся варианты письменных работ по математике, предлагавшихся в различных вузах России в последние годы.

ББК 74.262
УДК 510.2(076)

ISBN 5-8112-0196-6

Оглавление

Предисловие

В предлагаемый вашему вниманию сборник вошло около трех с половиной тысяч конкурсных задач по математике из более чем ста вузов России и некоторых вузов Белоруссии[1]. Авторы, кандидаты физико-математических наук, доценты московских вузов, имеют многолетний опыт работы в приемных комиссиях и преподавательской работы с абитуриентами. Специфика подготовки к приемным экзаменам по математике, а также учтенные авторами достоинства и недостатки уже вышедших сборников задач для поступающих в вузы нашли свое отражение в структуре и особенностях данной книги.

В данном задачнике развиваются на современном уровне идеи, использованные в известных задачниках М. И. Сканави и др. и В. М. Говорова и др.

Задачи сборника разбиты на три уровня сложности: А, Б и В. Уровень А предполагает более или менее успешное усвоение основ школьной программы по математике, умение уверенно применять стандартные навыки в стандартных ситуациях. Задачи повышенной сложности из группы Б требуют хорошей техники и решаются, как правило, «в несколько ходов». Наконец, для решения особо сложных задач группы В потребуется более глубокое понимание школьного курса математики, а также сообразительность.

Для удобства работы с книгой задачи в каждой главе (и на каждом уровне сложности) разбиты на типы, каждый из которых обозначен соответствующим заголовком (например, «однородные тригонометрические уравнения», «рациональные неравенства» и т. д.). Каждая из задач снабжена указателем вуза (иногда их несколько), в котором она в свое время предлагалась на вступительных экзаменах; это позволит абитуриенту обратить внимание на уровень сложности и специфику предлагаемых в выбранном вузе заданий. В конце книги приводится список обозначений и список принятых сокращений в названиях вузов и их расшифровка. Оговоримся, что полные названия вузов даны (в основном) по состоянию на начало 1997 года (некоторые — на середину 2000 года), что может

[1] В настоящее время абитуриенты обоих государств могут поступать в вузы каждого из них.

иногда не соответствовать текущему названию, так как в последние годы многие вузы меняют (а некоторые — неоднократно) свое официальное название и статус (университет–академия–институт).

Ко всем задачам сборника приведены ответы, ко многим даны указания, а к наиболее трудным и типичным — решения. Указания отмечены знаком ●, а начало и конец решения задачи — соответственно знаками □ и ■.

Подавляющее большинство задач в книге предлагалось на вступительных экзаменах за последние 10 лет. В конце сборника приведено свыше 50 вариантов (с ответами) письменных экзаменов по математике, предлагавшихся в 1997–2000 годах в наиболее популярных вузах России. Решение этих вариантов позволит абитуриенту проверить свои силы, правильно оценить степень своей подготовки.

По мнению авторов, книга может быть использована в качестве пособия для подготовительных курсов, а также для занятий с репетитором. Авторы надеются, что она окажет существенную помощь абитуриентам и старшеклассникам при самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам по математике. С другой стороны, большое количество разнообразных задач, поделенных по типам и уровням сложности, позволит учителям использовать данный задачник на уроках математики и в работах математических кружков.

При подготовке пятого издания были учтены пожелания и замечания наших читателей. Всем им авторы и редакция выражают глубокую признательность. Особая благодарность преподавателям математики В. И. Гридасову из Воронежа и Л. И. Пайковой из Днепропетровска, «выловившим» немало опечаток и неточностей.

При работе над задачником труд авторов распределился следующим образом: главы 10, 11 написаны Е. Д. Куланиным, главы 6, 7 — В. П. Нориным, главы 1, 3–5, 9 — С. Н. Фединым, главы 2, 8 — Ю. А. Шевченко.

Авторы будут признательны читателям за любые замечания и пожелания, которые можно присылать по адресу: 141100, Московская обл., г. Щелково-3, а/я 140 или в адрес издательства. Мы будем также благодарны приемным комиссиям, репетиторам и пр. за присланные по указанному адресу варианты вступительных экзаменов в любые вузы.

Авторы

Часть I
Алгебра и начала анализа

1. Задачи на преобразование алгебраических выражений и на вычисление

Основные свойства и формулы

1. *Формулы сокращенного умножения*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Последние две формулы иногда удобнее использовать в следующем виде:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b);$$
$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$$

2. *Разложение на множители*

Если x_0 — корень многочлена n-ой степени $P_n(x)$, то $P_n(x) = (x - x_0) \cdot P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)$ — некоторый многочлен степени $n-1$. В частности, когда $n = 2$, т. е. $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ — квадратный трехчлен, имеем: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 — корни этого квадратного трехчлена.

3. *Арифметические корни и их свойства*

Пусть n — натуральное число. Тогда ***арифметическим корнем*** n-ой степени из данного числа $a \geqslant 0$ называется число $x \geqslant 0$, что $x^n = a$.

Обозначение $x = \sqrt[n]{a}$. В случае $n = 2$ пишут $\sqrt{a}$. Таким образом, например, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[4]{16} = 2$.

При любом x и любом натуральном n справедливы равенства

$$\sqrt[2n+1]{-x} = -\sqrt[2n+1]{x}, \qquad \sqrt[2n]{x^{2n}} = |x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geqslant 0 \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

В частности, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Если m — целое, n — натуральное (в дальнейшем мы будем писать $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ соответственно), то для любого $a > 0$ справедливо $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

Следующие равенства справедливы для любых натуральных m и n и любых $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ (при } b \neq 0);$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}.$$

Наконец, если $0 \leqslant a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

4. *Степени и их свойства*

Выражение a^x (степень числа a с показателем x) определено для любого $a > 0$ (основание степени) и любого действительного x (показатель степени). Для любых действительных x и y и любых $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ справедливы равенства:

$$a^0 = 1; \qquad a^1 = a; \qquad 1^x = 1;$$
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y; \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}; \qquad (ab)^x = a^x \cdot b^x; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$
$$\left(a^x\right)^y = \left(a^y\right)^x = a^{xy}; \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Если x и y — произвольные числа и $x < y$, то

$$a^x < a^y \quad \text{при } a > 1,$$
$$a^x > a^y \quad \text{при } 0 < a < 1.$$

Группа А

1. Задачи на вычисление

Вычислить:

1.1.1. [МЭСИ] $\left(6\frac{5}{9} - 3\frac{1}{4}\right) \cdot 2\frac{2}{17}$.

1.1.2. [МЭСИ] $\dfrac{0{,}64 - \frac{1}{25}}{0{,}8 : \left(\frac{4}{5} \cdot 1{,}25\right)}$.

1.1.3. [МЭСИ] $\frac{20}{99} + 0{,}2 + \frac{0{,}097}{1 - 0{,}01}$.

1.1.4. [МЭСИ] $\left(96\frac{7}{30} - 94\frac{5}{18}\right) \cdot 2{,}25 : 0{,}4$.

1.1.5. [МЭСИ] $\dfrac{\left(0{,}6+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{15}+0{,}125\right)}{\left(\dfrac{1}{3}+0{,}4+\dfrac{4}{15}\right)}\cdot 24.$

1.1.6. [МГАУ] $\dfrac{4^{-0{,}5}+(\sqrt{8})^{\frac{2}{3}}+2\dfrac{1}{3}:1\dfrac{5}{9}}{\left(4{,}8\cdot 6\dfrac{2}{3}-31{,}75\right)^{-0{,}5}}.$

1.1.7. [РГОТУПС] $\dfrac{0{,}174+0{,}05}{18\dfrac{1}{6}-1\dfrac{11}{14}-\dfrac{2}{5}\cdot 2\dfrac{6}{7}}.$

1.1.8. [МГУЛ] $\left(2\frac{1}{3}+3{,}5\right):\left(-4\frac{1}{6}+3{,}25\right)+2\frac{4}{11}.$

1.1.9. [ВГПИ] $\dfrac{3{,}9\cdot 0{,}24:\dfrac{5}{16}}{\left(4{,}06-2\dfrac{1}{2}\right)\cdot 0{,}8\cdot 4\dfrac{4}{5}}.$

1.1.10. [МЭСИ] $417\cdot\left(\frac{2}{10}+\frac{13}{990}\right):\left(\frac{4}{10}+\frac{21}{990}\right).$

1.1.11. [МЭСИ] $\dfrac{0{,}625+\dfrac{1}{8}+2^0-2^{-1}}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}.$

1.1.12. [МЭСИ] $\dfrac{(\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\dfrac{7}{8}-0{,}125+\dfrac{1}{20}}.$

1.1.13. [ГАУ] $2-\dfrac{3\dfrac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\dfrac{1}{2}}{\dfrac{62}{75}-0{,}16}.$

1.1.14. [КПИ] $\dfrac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\dfrac{5}{8}\right)-5:2\dfrac{1}{2}}{\left(1\dfrac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\dfrac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\dfrac{2}{5}}\cdot 90.$

1.1.15. [РГОТУПС] $\dfrac{\left(6\dfrac{3}{5}-3\dfrac{3}{14}\right)\cdot 5\dfrac{5}{6}}{(21-1{,}25):2{,}5}.$

1.1.16. [МГОПУ] $\dfrac{1\dfrac{1}{5}:\left(\dfrac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\cdot 1{,}7}{\dfrac{5}{6}+1\dfrac{1}{3}-1\dfrac{23}{30}}+\dfrac{4{,}75+7\dfrac{1}{2}}{33:4\dfrac{5}{7}}:0{,}25.$

1.1.17. [КПИ] $\left(\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}03}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}-\dfrac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{80}}\right):2\frac{1}{20}.$

1.1.18. [МГУЛ] $\left(26\frac{2}{3}:6{,}4\right)\cdot\left(19{,}2:3\frac{5}{9}\right)-\dfrac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0{,}5:18\frac{2}{3}\cdot 11}-\dfrac{1}{18}.$

1.1.19. [ВГПИ] $\dfrac{(162{,}162:2{,}25+0{,}828):0{,}0125}{5{,}1^2+10{,}2\cdot 3{,}9+3{,}9^2}.$

1.1.20. [РГОТУПС] $\dfrac{\left(13{,}75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\dfrac{\left(6{,}8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\frac{1}{6}.$

1.1.21. [МТУСИ] $\left(1\frac{1}{3}-625^{\frac{1}{4}}\right):\left(\frac{15}{17}\right)^{-1}.$

1.1.22. [МГУЛ] $3^6\cdot 9^{-2}\cdot 5^4-9\cdot 125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}.$

1.1.23. [МГУЛ] $\left(9\cdot 3^{-2}+4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right):\left(10^0+\frac{1}{12}\right).$

1.1.24. [МГУП] $\dfrac{2^{-2}\cdot 5^3\cdot 10^{-4}}{2^{-3}\cdot 5^2\cdot 10^{-5}}.$

1.1.25. [АГАУ] $\left(6-4\cdot\left(\frac{5}{16}\right)^0\right)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-81^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{-1}.$

1.1.26. [МТУСИ] $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}+3\cdot 0{,}0081^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}.$

1.1.27. [МТУСИ] $(0{,}001)^{-\frac{1}{3}}-2^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-8^{-\frac{4}{3}}+(9^0)^2\cdot 5.$

1.1.28. [МТУСИ] $1000^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}-625^{-0{,}75}.$

1.1.29. [МТУСИ] $\dfrac{2\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{3}-3{,}25}{\left[\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{9}{4}}\right]^{\frac{2}{9}}}.$

1.1.30. [КПИ] $\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}.$

1.1.31. [МТУСИ] $\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4}.$

1.1.32. [МВВДИУ] $\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}\right).$

1.1.33. [ГАУ] $\left(\sqrt[4]{32\cdot\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt[12]{2^5}}$.

1.1.34. [УГГА] $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\sin\frac{5\pi}{4}+(\sqrt{2})^{-1}+\log_{\sqrt{2}}2$.

1.1.35. [МГСоцУ] $\dfrac{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{6}\right):5\frac{8}{15}}{\left(4\frac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot3\frac{9}{13}}\cdot34\frac{2}{7}+\dfrac{0{,}3:0{,}01}{70}+\dfrac{2}{7}+729^{\frac{1}{3}+\log_{81}4}$.

1.1.36. [МГСоцУ] $\dfrac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right)\cdot1{,}7}{\left(2\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1{,}75\right)\left(\frac{5}{6}+1\frac{1}{13}-1\frac{23}{30}\right)}:0{,}04+3^{\log_9 49-1}+$
$+\log_8\dfrac{1}{2}$.

1.1.37. [МГСоцУ] $\log_4\dfrac{1}{8}+81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+\dfrac{\left(5\frac{1}{4}-0{,}5\right)\cdot\left(\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{6}\right):5\frac{8}{15}\right)}{\left(\left(4\frac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot3\frac{9}{13}\right):44\frac{4}{19}}$.

2. Упрощение алгебраических выражений

Упростить:

1.2.1. [ЯВВФУ] $\left(\dfrac{x^{1,5}-1}{x^{0,5}-1}+x^{0,5}\right):\dfrac{x-1}{x^{0,5}-1}$.

1.2.2. [ЯВВФУ] $\left(\dfrac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+x^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1}$.

1.2.3. [ЯВВФУ] $\left(\dfrac{a^{2,5}+a^{1,5}}{1+a}+1\right):\dfrac{1-a^3}{1-a^{1,5}}$.

1.2.4. [МГУГиК] $\dfrac{4x^2-5x+1}{4x-1}-\dfrac{x^2-1}{1-x}$.

1.2.5. [ЛГПИ] $a^3+b^3+3ab(a+b)$.

1.2.6. [УГГА] $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a+(ab)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$.

1.2.7. [МГУГиК] $\dfrac{9a^2-4}{2-3a}-\dfrac{6a^2-5a-6}{3-2a}$.

1.2.8. [ВОКУ] $\dfrac{x+1}{x^3+x^2+x}:\dfrac{1}{x^4-x}-x^2$.

1.2.9. [МЭСИ] $\dfrac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2b(3a^2+b^2)}+1$.

1.2.10. [МЭСИ] $\dfrac{(a+2\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(a-b)(\sqrt{a}+1)^2}+2.$

1.2.11. [МПУ] $\dfrac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}:\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}.$

1.2.12. [МГУК] $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{\sqrt{x}-x^2}+x.$

1.2.13. [МПГУ] $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+4\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right).$

1.2.14. [МТУСИ] $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right).$

1.2.15. [РГОТУПС] $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right).$

1.2.16. [МГУЛ] $\left(\dfrac{28x}{x^2-49}+\dfrac{x-7}{x+7}\right)\cdot\dfrac{x}{x+7}-\dfrac{x}{x-7}.$

1.2.17. [МЭСИ] $5\cdot\dfrac{(a^2+5a+6)(a^2-2a+4)}{(a+3)(a^3+8)}.$

1.2.18. [КПИ] $\left(\dfrac{ab}{a-b}+a\right)\cdot\left(\dfrac{ab}{a+b}-a\right):\dfrac{a^2b^2}{b^2-a^2}.$

1.2.19. [МПГУ] $\left(\dfrac{x+5}{(x-9)(x+9)}+\dfrac{x+7}{(x-9)^2}\right)\cdot\left(\dfrac{x-9}{x+3}\right)^2+\dfrac{7+x}{9+x}.$

1.2.20. [КПИ] $\left(\dfrac{1+n}{n^2-mn}-\dfrac{1-m}{m^2-mn}\right)\cdot\left(\dfrac{m+n}{m^2n-n^2m}\right)^{-1}.$

1.2.21. [КПИ] $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$

1.2.22. [ГУЗ] $\left(\dfrac{2}{b-\sqrt{ab}}+\dfrac{2}{b+\sqrt{ab}}\right)\cdot\left(a+\dfrac{b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right).$

1.2.23. [МПГУ] $\left(\dfrac{2+x^{\frac{1}{4}}}{2-x^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{2-x^{\frac{1}{4}}}{2+x^{\frac{1}{4}}}\right):\dfrac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}.$

1.2.24. [МЭСИ] $\dfrac{2p^3}{p^3+q^3}\cdot\dfrac{p+q}{p}-\dfrac{2p^2}{p^2-pq+q^2}.$

1.2.25. [РГОТУПС] $\dfrac{\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{2\sqrt{xy}}{y-x}.$

1.2.26. [РГОТУПС] $a \cdot \left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1} + b\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}$.

1.2.27. [МГАП] $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1} - \dfrac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right) \cdot \dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}$.

1.2.28. [ВЗФЭИ] $2(x^2+\sqrt{x^4-1}) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{-2}$.

1.2.29. [РГОТУПС] $\left[\dfrac{a}{\sqrt{a^2+ab}} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} + \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] : \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}}$.

1.2.30. [МПГУ] $\dfrac{y^2-1}{x^2+x} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}\right) \cdot \dfrac{1+x-x^3-x^4}{1-y^2}$.

1.2.31. [МПУ] $\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^3b^{-3}} - \sqrt{a^{-3}b^3}) : \left(1 + \dfrac{a^2+b^2}{ab}\right) \cdot \dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a-b}}$.

1.2.32. [МПУ] $x^2y^2\left(\dfrac{1}{(x+y)^2} \cdot \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right) + \dfrac{2}{(x+y)^3}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)\right)$.

1.2.33. [МГУГиК] $\left(1 + 2a^{\frac{2}{3}} - \dfrac{a+\sqrt[3]{a^2}}{1+a^{\frac{1}{3}}}\right) : \dfrac{1-a\sqrt[3]{a}}{1-a^{\frac{2}{3}}}$.

1.2.34. [МГОПУ] $\left(\dfrac{1}{2-6a} + \dfrac{1}{27a^3-1} : \dfrac{1+3a}{1+3a+9a^2}\right) \cdot \dfrac{2+6a}{a}$.

1.2.35. [МГОПУ] $\dfrac{8-n^3}{2+n} : \left(2 + \dfrac{n^2}{2+n}\right) - \dfrac{n^2}{n-2} \cdot \dfrac{4-n^2}{n^2+2n}$.

1.2.36. [МГОПУ] $\left(\dfrac{12}{5a^2+a-4} - \dfrac{a+1}{3(5a-4)}\right) \cdot \dfrac{15a-12}{a+7}$.

1.2.37. [РЭА] $\left(\dfrac{9}{m^2-3m+9} + \dfrac{2m}{3+m} - \dfrac{m^3-15m^2}{m^3+27}\right)\left(m+3-\dfrac{9m}{m+3}\right) \times$
$\times \dfrac{1}{m+3}$.

1.2.38. [РЭА] $\left(\dfrac{16}{x^2-4x+16} + \dfrac{2x}{x+4} - \dfrac{x^3-20x^2}{x^3+64}\right)\left(x+4-\dfrac{12x}{x+4}\right) \cdot \dfrac{1}{4+x}$.

1.2.39. [МВВДИУ] $\left(\dfrac{8a^3+b^3}{4a^2-b^2} + \dfrac{1}{b^{-1}}\right) : \dfrac{a^2}{2a-b}$.

1.2.40. [ОКИ] $a^{\frac{1}{2}} - \dfrac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}} + \dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}} + \dfrac{2}{a^{\frac{1}{2}}}$.

1.2.41. [КГАЦМЗ] $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}-1} - \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+1} + \dfrac{1}{1-\sqrt[3]{a}} - \sqrt[3]{a^2}$.

1.2.42. [ГУЗ] $\quad (1-a^2):\left(\left(\frac{1-a^{\frac{3}{2}}}{1-a^{\frac{1}{2}}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1+a^{\frac{3}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-a^{\frac{1}{2}}\right)\right)+1.$

1.2.43. [ГУЗ] $\quad \left(\frac{1}{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^{-2}}-\frac{\sqrt{m^3}+\sqrt{n^3}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right)\cdot\left(\frac{27m^{-3}}{64n^{-6}}\right)^{-\frac{1}{3}}.$

1.2.44. [МГАВТ] $\left[\left[\frac{3a}{a^3-b^3}\cdot\frac{a^2+b^2+ab}{a+b}-\frac{3}{b-a}\right]:\frac{2a+b}{a^2+2ab+b^2}\right]\cdot\frac{3}{a+b}.$

1.2.45. [РЭА] $\quad \frac{\sqrt{a}+1}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}}:\frac{1}{a^2-\sqrt{a}}-a.$

1.2.46. [РЭА] $\quad \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right).$

1.2.47. [РЭА] $\quad \left(1-2\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\right)\cdot\left(\frac{x^{\frac{4}{3}}-8x^{\frac{1}{3}}y}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}+4\sqrt[3]{y^2}}\right)^{-1}\sqrt[3]{\frac{1}{x^{-2}}}.$

1.2.48. [РГОТУПС]

$$\frac{x^3-y^3}{(3x+y)^2-8x^2-5xy}+\frac{(x+y^2)(x^2+y)-xy(xy+1)}{x^2-xy+y^2}.$$

1.2.49. [ОмГАПС] $\quad \frac{(ab^{-1}+ba^{-1}+1)\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}\right)}{ab^{-1}-ba^{-1}+b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}}.$

1.2.50. [КПИ] $\quad \left(\frac{\sqrt{b}+c^2}{c^2}-\frac{\sqrt{b}-c^2}{b^{\frac{1}{2}}}\right):\left(\frac{b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-c^2}-\frac{c^2}{b^{\frac{1}{2}}+c^2}\right).$

1.2.51. [КПИ] $\quad \left(\frac{\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{a+b}}.$

1.2.52. [КПИ] $\quad \frac{m^4-49}{m^2+7}-\frac{m^6-343}{m^4+7m^2+49}.$

1.2.53. [ЛГПИ] $\quad \left(\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):4\sqrt{b}.$

1.2.54. [МЭСИ] $\quad \frac{\left[\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+5b^{\frac{1}{2}}\right)-\left(a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}\right)\right]}{3\sqrt{b}(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})}.$

1.2.55. [КФЭИ]

$$\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{2})^2}{a-b}-\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right):\frac{(4b)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}.$$

1.2.56. [МГАПП] $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(y^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right).$

1.2.57. [ЯВВФУ] $\left(\frac{\left(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{2\sqrt{2{,}5}(a+b)^{-1}}{(10)^{-\frac{1}{2}}}.$

1.2.58. [РГОТУПС] $(a^2\sqrt{b})^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$

1.2.59. [МАСИ] $\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}-\frac{x+1}{x^2-4x+3}.$

1.2.60. [МАСИ] $\left(\frac{1-x^2}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2}{x^2:\sqrt{x}}+\frac{x^{-2}-x}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{-1}.$

1.2.61. [МГАП] $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right)\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}.$

1.2.62. [ВЗФЭИ] $\left(\frac{\sqrt{m-a}}{\sqrt{m+a}+\sqrt{m-a}}+\frac{m-a}{\sqrt{m^2-a^2}-m+a}\right):\sqrt{\frac{m^2}{a^2}-1}$, $a>0$.

1.2.63. [МПГУ] $\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}+\frac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}-\frac{2b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}}\right)\left(b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}\right).$

1.2.64. [РЭА]
$$\left(\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2-\sqrt[4]{16ab}}{a-b}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\left(\frac{a-b}{2\sqrt{b}}\right)^{-1}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

1.2.65. [МТУСИ] $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}$, $a>b>0$.

1.2.66. [МТУСИ] $\frac{x^{-6}-64}{16+4x^{-2}+x^{-4}}\cdot\frac{1}{4-4x^{-1}+x^{-2}}-\frac{4x^2\cdot(2x+1)}{1-2x}.$

1.2.67. [МГАП] $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}-\frac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2(ab^{-1}+1)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-ba^{-1}}{1+ba^{-1}}}.$

1.2.68. [МПГУ] $\left(\frac{\sqrt{x^2-a}-x}{\sqrt{x^2-a}+x}-\frac{\sqrt{x^2-a}+x}{\sqrt{x^2-a}-x}\right):\sqrt{\frac{x^2-a}{x}}.$

1.2.69. [МПГУ]

$$\frac{(2x-1)^{-\frac{1}{2}}+(2x-1)^{\frac{1}{2}}}{(2x+1)^{-\frac{1}{2}}-(2x-1)^{-\frac{1}{2}}}:\frac{(2x-1)^{\frac{1}{2}}}{(2x-1)(2x+1)^{\frac{1}{2}}-(2x+1)(2x-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

1.2.70. [ДВГУ] $\left((1-p^2)^{-\frac{1}{2}}-(1+p^2)^{-\frac{1}{2}}\right)^2+2(1-p^4)^{-\frac{1}{2}}.$

1.2.71. [МЭИ] $\left(\dfrac{x+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{a}}-\dfrac{x-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{a}}+\dfrac{\sqrt[3]{xa^2}-\sqrt[3]{x^4\sqrt{a}}}{x-\sqrt{a}}\right)^3.$

1.2.72. [ДВГУ] $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[6]{a^2b^3}}{\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}-\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}\right):\dfrac{(a-b)^{-1}}{b^{-\frac{1}{2}}}$, $a\geqslant 0$, $b>0$, $a\neq b$.

1.2.73. [ДВГУ] $\left(\dfrac{3a^{\frac{1}{6}}-2b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{3}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}\right):\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{5}{6}}}$, $a\geqslant 0$, $b>0$, $a\neq b$.

1.2.74. [МГОУ] $\dfrac{\sqrt{3}(a-b^2)+\sqrt{3}b\sqrt[3]{8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\dfrac{3}{a}}-\sqrt{\dfrac{3}{c}}}.$

1.2.75. [МГУК] $\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{x-1}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{-0{,}5}}{2(x+1)^{-\frac{1}{2}}}-\sqrt{3-\dfrac{1}{x^2}\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}:$

$$:\frac{\left[\dfrac{1}{9^{-0{,}5}}-\dfrac{x^{-3}}{(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{0{,}5}}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{\sqrt{x}}{2}.$$

1.2.76. [МЭИ]

$$\left(\left(\frac{8x^3}{1-\sqrt{1+4x^2}}+\frac{8x^3}{1+\sqrt{1+4x^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{8x^3-2x}-\frac{1}{8x^3+2x}\right)\right)^{-1}.$$

1.2.77. [МЭИ] $\dfrac{2a+(a^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\left((a-1)^{\frac{1}{2}}+(a+1)^{\frac{1}{2}}\right)\left((a-1)^{\frac{3}{2}}-(a+1)^{\frac{3}{2}}\right)}.$

1.2.78. [МЭИ] $\left(\dfrac{9-x^6}{3-x^3}-\dfrac{27-x^9}{9-x^6}+\dfrac{x^6}{3+x^3}\right)^3.$

1.2.79. [МЭИ] $\left((x^6+2x^2)\cdot\left(\dfrac{1}{4x^4}-\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{4}{x^8-2x^{12}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^2.$

1.2.80. [МЭИ] $\left(\dfrac{\left(2+\sqrt[4]{4a}\right)^2-2\sqrt{a}}{8\sqrt{a}-4}+\dfrac{1}{2\sqrt{a}-\sqrt[4]{4a}}\right)\cdot\dfrac{4a-2\sqrt{a}}{\left(1+\sqrt[4]{4a}\right)^2}$.

1.2.81. [КПИ] $\left(\dfrac{1}{2+2\sqrt{a}}+\dfrac{1}{2-2\sqrt{a}}-\dfrac{a^2+1}{1-a^2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\cdot 3^{\log_3 2}$.

1.2.82. [КПИ] $\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{2}}-\dfrac{a^2+4}{a^3-\sqrt{8}}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{a}+1+\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)\cdot 3^{\log_3 a^2}$.

1.2.83. [МЭИ] $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}\right)^{-1}\cdot(0{,}1)^{\lg(x^{-2}-0{,}5x^{-1})}$.

3. Вычисление конкретных значений алгебраических выражений

Упростить выражения и вычислить при данных значениях параметров:

1.3.1. [МАТИ] $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)$, $x=4\frac{5}{7}$, $y=5\frac{2}{7}$.

1.3.2. [МАДИ] $\dfrac{A^4-B^4}{(A+B)^2-2AB}$, $A=2{,}71$, $B=1{,}29$.

1.3.3. [МАДИ] $\dfrac{11a^4-11b^4}{a^2+2ab+b^2}$, $a=\dfrac{13}{2}$, $b=\dfrac{9}{2}$.

1.3.4. [МАДИ] $\dfrac{6a^3+6b^3}{3a^2-3b^2}$, $a=6{,}5$, $b=2{,}5$.

1.3.5. [МГУГиК] $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{(a-b)^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}$, $a=5$, $b=2$.

1.3.6. [МГУЛ] $\dfrac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}+\dfrac{a-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, $a=0{,}64$, $b=2{,}25$.

1.3.7. [РЗИТЛП] $\dfrac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot x^{\frac{1}{4}}+1$, $x=16$.

1.3.8. [ЯВВФУ] $\dfrac{10m^{0,5}}{n-m}+\dfrac{5}{n^{0,5}+m^{0,5}}$, $n=\dfrac{4}{9}$, $m=\dfrac{16}{81}$.

1.3.9. [МГУЛ] $\dfrac{1-x}{1-x^{0,5}}\cdot\left(\dfrac{1+x^{1,5}}{1-\sqrt{x}+x}-x^{0,5}\right)$, $x=\dfrac{1}{4}$.

1.3.10. [МГУЛ] $\dfrac{\dfrac{3m^2}{n}+\dfrac{3}{m}-n}{2m-\dfrac{m}{n}}$, $m=-\dfrac{2}{3}$, $n=-2$.

1.3.11. [ГАНГ] $\left[\dfrac{1}{\sqrt{7}y+a}+\dfrac{2a}{7y^2-a^2}\right]:\dfrac{1}{7y^2-\sqrt{7}ay}-\sqrt{7}y+3$, $a=3{,}5$, $y=1+\sqrt{7}$.

1.3.12. [МГУЛ]
$$\frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)(x^2+1)}-\left(x-\frac{x^3}{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^2\cdot\sqrt{(1+x^2)^{-1}}-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2},\ x=\frac{1}{9}.$$

1.3.13. [МГАПП] $\dfrac{x}{ax-2a^2}-\dfrac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\dfrac{x^2+4x+3}{3+x}$, $a=\dfrac{1}{8}$.

1.3.14. [МТУСИ] $\left[1-\left(\dfrac{x^{-\frac{3}{4}}+1}{x^{-\frac{1}{4}}+1}+\dfrac{3}{x^{\frac{1}{4}}}\right):\left(x^{-\frac{1}{4}}+1\right)\right]:x^{-\frac{3}{4}}$, $x=0{,}0256$.

4. Доказательство тождеств

Доказать тождества:

1.4.1. [МАИ] $1+\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x\sqrt{x}-1}=x.$

1.4.2. [МАИ]
$$\left[\frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y}}\right]:(2y+1)+\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}-1=\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

1.4.3. [МАИ] $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}}-\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}}=2\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^4-2x^2+1}}.$

1.4.4. [МТУСИ] $\left(\dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{4x+2}{4-x^2}\right):\dfrac{2x+1}{x-2}+\dfrac{2}{x+2}=1.$

1.4.5. [МТУСИ] $\left(\dfrac{\sqrt{a}+b^2}{b^2}-\dfrac{\sqrt{a}-b^2}{\sqrt{a}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b^2}-\dfrac{b^2}{\sqrt{a}+b^2}\right)=\dfrac{a-b^4}{b^2\sqrt{a}}.$

1.4.6. [МТУСИ] $\dfrac{\sqrt[3]{a}c^2-3\sqrt{b}}{(c^2+3)(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})}+\dfrac{3\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}\cdot c^2}{(c^2-3)(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{c^4+9}{c^4-9}.$

1.4.7. [БСА] $\dfrac{2a^{-2}-\dfrac{a^{-3}}{2}}{a^{-2{,}5}-\dfrac{1}{2}a^{-3}}+\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-a^{-2}}{a^{-1}+a^{-1{,}5}+a^{-2}}=3\sqrt{a}$, $a>0$, $a\neq\dfrac{1}{4}$.

5. Задачи на вычисление неизвестной величины x

Найти x, если:

1.5.1. [МАДИ] $49^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{2{,}5}=7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{-\frac{2}{3}}\cdot 49\cdot x^{0{,}5}.$

1.5.2. [МАДИ] $16\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{\frac{1}{40}}\cdot x=4^3\cdot 2^{\frac{6}{5}}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2.$

1.5.3. [МАДИ] $3^{0,5} \cdot 3^{\frac{5}{6}} \cdot 9^{0,5} \cdot x^{-0,5} = 9^{\frac{1}{6}} \cdot 27^{\frac{1}{3}}$.

1.5.4. [МСХА] $\dfrac{8^{\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt[3]{2})^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot x} = 2^7 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^6$.

1.5.5. [МАДИ] $Ax + B = \frac{5}{9} + 0{,}9 + \frac{38}{45}$, $A = 10$, $B = -0{,}2$.

1.5.6. [МАДИ] $2{,}7 - 4x = \frac{2}{3} + \frac{7}{12} + \frac{9}{20}$.

1.5.7. [КПИ] $\dfrac{\left(4 - 3{,}5 \cdot \left(2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{5}\right)\right) : 0{,}16}{x} = \dfrac{3\frac{2}{7} - \frac{3}{14} : \frac{1}{6}}{41\frac{23}{84} - 40\frac{49}{60}}$.

6. Сокращение дробей

Сократить дроби:

1.6.1. [ГУЗ] $\dfrac{7x - 2x^2 - 3}{2x^2 - x}$.

1.6.2. [ГУЗ] $\dfrac{2 + x - 3x^2}{9x^2 - 4}$.

1.6.3. [СТАНКИН] $\dfrac{2 + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x} - 2}$.

1.6.4. [ВАХЗ] $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 9x - 36}{x^2 + x - 12}$.

7. Прочие

Доказать справедливость равенств (1.7.1–1.7.2):

1.7.1. [РГАЗУ] $\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}} = \sqrt{3} + 1$.

1.7.2. [МТУСИ] $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3} - 1} + \dfrac{3}{\sqrt{3} - 2} + \dfrac{15}{3 - \sqrt{3}}\right) \cdot (\sqrt{3} + 5)^{-1} = \dfrac{1}{2}$.

Какое из двух чисел больше (1.7.3–1.7.5):

1.7.3. [МГУ, эк. ф-т] $\sqrt{6} - \sqrt[3]{3}$ или 1?

1.7.4. [МГУ, эк. ф-т] $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2}$ или 3?

1.7.5. [МГУ, ВМиК] $\sqrt[5]{\dfrac{1990}{1992}}$ или $\sqrt[5]{\dfrac{1989}{1991}}$?

Записать в виде десятичной дроби число (1.7.6–1.7.7):

1.7.6. [МГАТХТ] $\frac{17}{20}$.

1.7.7. [МГАТХТ] $\frac{7}{8}$.

1.7.8. [МГУЛ] Найдите число, 10% которого равны значению выражения $32^{\frac{2}{5}} \cdot 0{,}5 - (\sqrt{25})^0 + \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$.

Группа Б

8. Задачи на вычисление

Вычислить:

1.8.1. [МГУ, геолог. ф-т] $\dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \dfrac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{\sqrt{6-\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

1.8.2. [РЭА] $\left[\dfrac{3(\sqrt{13}+2)}{\sqrt{19}-4} - \dfrac{4(\sqrt{19}-2)}{\sqrt{13}-3} - 2 + \sqrt{19}\right](2-\sqrt{13})$.

1.8.3. [РЭА] $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+1} - \dfrac{5\sqrt{15}-\sqrt{5}-16}{7-2\sqrt{15}}$.

1.8.4. [РЭА] $\left[\dfrac{2(\sqrt{15}-1)}{\sqrt{15}+\sqrt{13}} + \dfrac{2(\sqrt{13}+2)}{\sqrt{15}-\sqrt{13}} - \sqrt{15} + \sqrt{13}\right](7-\sqrt{13})$.

1.8.5. [РУДН] $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1} + \dfrac{4}{\sqrt{6}-2} - \dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right) \cdot (\sqrt{6}+11)$.

1.8.6. [МЭСИ]
$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

1.8.7. [МТУСИ] $(4\sqrt{6}+\sqrt{39}+2\sqrt{26}+6)(4\sqrt{6}+\sqrt{39}-2\sqrt{26}-6)$.

1.8.8. [МТУСИ] $(\sqrt{28}-\sqrt{12}) \cdot \sqrt{10+\sqrt{84}}$.

1.8.9. [МТУСИ] $\dfrac{\left(8^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(4^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{2}\right)}{32^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{16}}$.

1.8.10. [МТУСИ] $\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{11}) \cdot (\sqrt{33}+\sqrt{15}-\sqrt{22}-\sqrt{10})}{\sqrt{75}-\sqrt{50}}$.

1.8.11. [МГУП] $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4}$.

1.8.12. [МГУП] $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{5})^3}\right)^2 + 2^{-\frac{3}{2}} \cdot \cos\frac{3\pi}{4}$.

9. Упрощение алгебраических выражений

Упростить:

1.9.1. [ДВГУ] $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-4\sqrt{a^{-1}}}-\dfrac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{64a}}\right)^{-2}-\sqrt{a^2+8a+16}.$

1.9.2. [ДВГУ] $\sqrt{\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4x^{-1}}-2}+\sqrt{\dfrac{1}{4x^{-1}}+\dfrac{2^{-2}}{x}+\dfrac{1}{2}}.$

1.9.3. [МЭИ]

$$\left(\frac{1}{1-2\sqrt{2x}+2x}-\frac{1}{\left(1-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)(1-\sqrt{2x})}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{\frac{x}{2}}+\sqrt[4]{2x^3}\right)^2-4x}{1+\sqrt{\frac{x}{2}}}.$$

1.9.4. [МЭИ] $\left(\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+b+1}-\dfrac{\sqrt{b}(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{b})^2}{(a^2+1)^2-b^2}\right)^{-1}-10^{\log_{100}(a^2+1)}.$

1.9.5. [МЭИ]

$$\frac{(a+\sqrt{4a}+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(\sqrt{a^3}+\sqrt{8b^3})}{\left((\sqrt[4]{2b}-\sqrt[4]{a})^2+(\sqrt[4]{2b}+\sqrt[4]{a})^2\right)(a-\sqrt{2ab}+2b)}-0{,}5\cdot 10^{\log_{100}a}.$$

1.9.6. [МЭИ] $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}+\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}}{2-x}\right)(\sqrt{x}-5^{\log_{25}2}).$

1.9.7. [МАСИ] $\dfrac{1+2a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{2}}}{1-a+4a^{\frac{3}{4}}-4a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-2}{\left(a^{\frac{1}{4}}-1\right)^2}.$

1.9.8. [МЭСИ] $\left[\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right]:(3a^2+3b\sqrt{ab})+\dfrac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$

1.9.9. [МТУСИ] $\dfrac{6(a^3+27)|a+4|}{(a^2-3a+9)(a^2+7a+12)}.$

1.9.10. [МТУСИ] $\dfrac{|x-1|(x^2+x+2)(x+1)\cdot x}{x^3-1-|x-1|}.$

1.9.11. [МТУСИ] $\dfrac{|x+1|\cdot(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^4+x^3+|x+1|}.$

1.9.12. [МТУСИ] $\dfrac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}.$

1.9.13. [МАСИ] $\dfrac{m^5+m^4\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4m^9}}{|m^3-1|-1}.$

1.9.14. [МГОПУ] $$\frac{\dfrac{\sqrt{b^2-2b+1}}{b}+b\sqrt{b^2-2b+1}+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}},\ 0<b<1.$$

1.9.15. [МЭСИ] $\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^{-2}-1}-\dfrac{1}{x}\right)$, $0<x<1$.

10. Прочие

В задачах 1.10.1, 1.10.2 упростить выражение и вычислить при данных значениях параметров:

1.10.1. [ГАНГ] $\left[\dfrac{2\sqrt[4]{2}xy}{x^2y^2-\sqrt{2}}+\dfrac{xy-\sqrt[4]{2}}{2xy+2\sqrt[4]{2}}\right]\cdot\dfrac{2xy}{xy+\sqrt[4]{2}}-\dfrac{xy}{xy-\sqrt[4]{2}}+4{,}1$, $x=23$, $y=1{,}32$.

1.10.2. [МГОУ]
$$\sqrt[n]{a^kx^{n-k}}+\sqrt[n]{a^{n-k}\cdot x^k}-2\sqrt{bx}+b^2,\ x=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{2k}{n-2k}}}.$$

1.10.3. [МАИ] Доказать, что если $x=4(a-1)$ и $1<a<2$, то $(a+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}+(a-\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{2-a}$.

1.10.4. [ГАУ] Упростив левую часть, найти x:
$$\frac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3}{a+b+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}}+\frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^3}{a-b-\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}}=\frac{2x-3}{3x+1}.$$

1.10.5. [МАИ] Упростить выражение $\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$, где $x=\dfrac{2a}{b+\dfrac{1}{b}}$ и $|b|<1$.

1.10.6. [МГУ, геолог. ф-т] Какое из чисел больше $2\sqrt{10}$ или $6{,}(32)$?

1.10.7. [МЭИ] Доказать, что если $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$, то $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

В задачах 1.10.8–1.10.10, упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если:

1.10.8. [МЭИ]
$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{0{,}2x}\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{x}\right)-2\sqrt[3]{x}}{\left(\sqrt[3]{0{,}2x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5}\right)}+\left(\sqrt[3]{0{,}2x}+1\right)^{-1}\right)^{-1}\cdot 7^{\log_{343}5}.$$

1.10.9. [МЭИ] $f(x)=\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}-\frac{\sqrt[4]{16x}+\sqrt[4]{x^5}}{2+x}\right)^{-2}\cdot 25^{2\log_{0,04}2+\log_{0,04}\sqrt{x}}$.

1.10.10. [МЭИ] $\left(\frac{\sqrt[3]{2x^2}+x\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[6]{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{x}}-1\right)^{-1}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{2}}-2^{-2\log_{0,5}x}$.

1.10.11. [МГГУ] Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Группа В

11. Разные задачи

Вычислить (задачи 1.11.1–1.11.5):

1.11.1. [МЭСИ] $\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}\right)\cdot 9$.

1.11.2. [МЭСИ] $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$.

1.11.3. [МЭСИ] $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}-\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

1.11.4. [МЭСИ] $\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}+1}$.

1.11.5. [МЭСИ] $(\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16}+\sqrt{\sqrt{5}+1})\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}$.

1.11.6. [МТУСИ] Проверить, что число $x=\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$ является корнем уравнения $x^3+12x-8=0$.

В задачах 1.11.7, 1.11.8 доказать, что данное число является составным:

1.11.7. [МТУСИ] $2^{12}+5^9$.

1.11.8. [МТУСИ] $2^{10}+5^{12}$.

В задачах 1.11.9, 1.11.10 доказать, что данное число при натуральных n является составным:

1.11.9. [МТУСИ] $8n^3-12n^2+6n+63$.

1.11.10. [МТУСИ] $n^3-6n^2+12n+117$.

Разложить на множители (задачи 1.11.11, 1.11.12):

1.11.11. [РЭА] $1+n^4+n^8$.

1.11.12. [РЭА] $1+x^5$.

1.11.13. [МГУ, филолог. ф-т] Представить число 1991 в виде произведения простых чисел.

1.11.14. [МГУ, мех.-мат.] Разность $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{|40\sqrt{2}+57|}$ является целым числом. Найти это целое число.

2. Алгебраические уравнения

Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения называется множество всех значений переменных, при которых все функции, входящие в уравнение, имеют смысл.

Решениями уравнения называются такие значения переменных, которые при их подстановке в уравнение обращают его в тождество.

Уравнения называются равносильными, если множества их решений совпадают.

При решении уравнений рекомендуется делать преобразования, приводящие к равносильным уравнениям; если же это затруднительно, и в процессе преобразований могут появиться лишние корни, то необходимо делать проверку. Полезно, а иногда и необходимо, найти ОДЗ.

Если у квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ (при $a\neq 0$) неотрицателен дискриминант $D=b^2-4ac$, то уравнение имеет решения $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, и выполняется равенство: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. При этом $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$, $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ (теорема Виета). График квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ — парабола с вершиной в точке $\left(x_{\text{в}}=\dfrac{-b}{2a};\ ax_{\text{в}}^2+bx+c\right)$.

Если b — четное число, то есть $b=2k$, то решения квадратного уравнения удобно находить в виде $x_{1,2}=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$.

Модулем $|f(x)|$ называется выражение, равное $f(x)$ при $f(x)\geqslant 0$, и равное $-f(x)$ при $f(x)<0$, так что уравнение $|f(x)|=g(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0,\\ f(x)=g(x); \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x)<0,\\ -f(x)=g(x). \end{cases}$$

Иррациональное уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x)=g^2(x),\\ g(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

При решении иррациональных уравнений иногда используется равенство $\sqrt{(f(x))^2}=|f(x)|$.

Группа А

1. Квадратные уравнения

2.1.1. [РГПУ] Найти значение коэффициента k, при котором уравнение $3x^2 - 2kx - k + 6 = 0$ не имеет корней.

2.1.2. [РГПУ] Найти значение коэффициента p, при котором уравнение $3x^2 - 2px - p + 6 = 0$ имеет 2 корня.

2.1.3. [МГУ, геогр. ф-т] Найти 3 числа a, b, c, если известно, что их сумма равна 1, а квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственное решение $x = -1$.

2.1.4. [МГУЛ] При каком целом a уравнение $(a-3)x^2 + 2x + 3a - 11 = 0$ имеет равные корни?

2.1.5. [МИЭТ] Найти a, при котором один из корней уравнения $2x^2 + ax + 3a = 0$ равен 3.

2.1.6. [МГАПП] При каком значении k у квадратного уравнения $kx^2 + 12x - 3 = 0$ есть корень, равный $\frac{1}{5}$?

2.1.7. [ГФА] При каком наибольшем значении a квадратное уравнение $x^2 - (a+3)x + a^2 = 0$ имеет корень $x = 3$?

2.1.8. [ГФА] Вычислить $\dfrac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2}$, где x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$.

2.1.9. [РГПУ] Не решая уравнения $2x^2 - 4x + 1 = 0$, вычислить сумму чисел, обратных его корням.

2.1.10. [РГПУ] Не решая уравнения $2x^2 - 4x + 1 = 0$, вычислить сумму квадратов его корней.

2.1.11. [ГФА] Найти коэффициент q в уравнении $x^2 - 2x + q = 0$, если корни уравнения x_1 и x_2 связаны соотношением $2x_1 + x_2 = 3$.

2.1.12. [МТУСИ] При каких значениях коэффициента p отношение корней уравнения $x^2 + px + 1 = 0$ равно 4?

2.1.13. [МГУГиК] Дано: x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Составить уравнение, корни которого $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$.

2.1.14. [МПУ] Найти наибольшее отрицательное значение k, при котором уравнение $5x^2 + 2kx + 5 = 0$ имеет 2 положительных корня.

2. Рациональные уравнения и уравнения высших порядков

2.2.1. [МГУЛ] Решить уравнение $\dfrac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 5x + 6} = 0$.

2.2.2. [МГАТХТ] Найти положительные решения уравнения $\dfrac{2}{x-3} = \dfrac{x}{x+3}$.

2.2.3. [МГУЛ] Решить уравнение $\dfrac{x-2}{x+1} + \dfrac{4(x+1)}{x-2} = 5$.

2.2.4. [СПбГЭУ] Решить уравнение:

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3x+2}}} = \frac{3x^2+11x+10}{36x^2-25} - \frac{3-2x}{6x-5}.$$

2.2.5. [МГУ, биолог. ф-т] $\dfrac{1-x}{(2-x)(x-3)} + 1 = \dfrac{1}{2-x}$.

2.2.6. [МИСиС] Решить уравнение $\dfrac{2}{x^2-4} + \dfrac{x-4}{x^2+2x} = \dfrac{1}{x^2-2x}$.

2.2.7. [МГАХМ] Найти меньший корень уравнения $\dfrac{30}{x^2-1} - \dfrac{13}{x^2+x+1} = \dfrac{18x+7}{x^3-1}$.

2.2.8. [МТУСИ] $\dfrac{x^3+64}{16+4x} = 11 - \dfrac{x}{4}$.

2.2.9. [ГАУ] Решить уравнение $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} = 2{,}9$.

2.2.10. [МАДИ] Решить уравнение $\dfrac{2x+1}{x} + \dfrac{4x}{2x+1} = 5$.

2.2.11. [РЭА] При каких значениях b корень уравнения $(2-b)(b+x) = 15 - 7b$ больше или равен 3? В ответе указать наибольшее из этих значений.

2.2.12. [РЭА] При каких значениях a корень уравнения $(x-1)(a^2-1) = 5-4a$ меньше или равен 0? В ответе указать наибольшее из этих чисел.

3. Иррациональные уравнения

Решить уравнение:

2.3.1. [МГУ, мех.-мат.] $(x^2-4)\sqrt{x+1} = 0$.

2.3.2. [МГАП] $(x-4)\sqrt{3+2x-x^2}=0.$

2.3.3. [МИЭТ] $(x^2+5x)\sqrt{x-3}=0.$

2.3.4. [ЛГПИ] $\sqrt{7-x^2}\sqrt{10-3x-x^2}=0.$

2.3.5. [МТУСИ] $(x^2-x-6)\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2x}}=0.$

2.3.6. [МАИ] $\sqrt{x^2+8}=2x+1.$

2.3.7. [ГАНГ] $\sqrt{0{,}5(x^2-9x+22)}=x-5.$

2.3.8. [МИЭТ; МГУ, физ. ф-т] $\sqrt{4-6x-x^2}=x+4.$

2.3.9. [МАТИ] $\sqrt{2x-1}=x-2.$

2.3.10. [ДВГУ] $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4.$

2.3.11. [МГУ, геогр. ф-т] $x+\sqrt{2x^2-7x+5}=1.$

2.3.12. [МИЭТ] $\sqrt{37-x^2}+5=x.$

2.3.13. [МГУ, геогр. ф-т] $\sqrt{2x^2+8x+7}-x=2.$

2.3.14. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{x-1}+x-3=0.$

2.3.15. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{x+4}+x-2=0.$

2.3.16. [МГТУ] $x-\sqrt{x+2}=4.$

2.3.17. [МГУ, геолог. ф-т] $x\sqrt{36x+1261}=18x^2-17x.$

2.3.18. [МГУ, геолог. ф-т] $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6.$

2.3.19. [МГУ, физ. ф-т] $\sqrt{x^4-2x-5}=1-x.$

2.3.20. [МГУ, ИСАА] $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1.$

2.3.21. [МГУГиК] $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$

2.3.22. [СПбГЭУ] $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1.$

2.3.23. [МИЭМ] $\sqrt{3x+3}+2\sqrt{2x-3}=5.$

2.3.24. [ГАУ] $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7.$

2.3.25. [МГУ, геолог. ф-т] $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}.$

2.3.26. [МТУСИ] $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$

2.3.27. [МАДИ] $2(x+8)^{\frac{1}{2}}=9(x+8)^{\frac{1}{4}}+18.$

2.3.28. [МАДИ] $2x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{6}}=18.$

2.3.29. [МТУСИ] $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3.$

2.3.30. [МГУ, эк. ф-т] $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$.

2.3.31. [ГАУ] $\sqrt{x^2 + 20} + x^2 = 22$.

2.3.32. [МГУ, геолог. ф-т] $z + 42 - 11\sqrt{z^2 - z - 42} - z^2 = 0$.

2.3.33. [МИЭТ] $x^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12 - 2x$.

2.3.34. [МЭСИ] $x^2 + 5x + 4 - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 0$. Найти наибольший корень.

2.3.35. [ГАУ] $\sqrt{\dfrac{2x}{1 + 2x}} + \sqrt{\dfrac{1 + 2x}{2x}} = \dfrac{5}{2}$.

2.3.36. [МАДИ] $1 + \dfrac{15}{(2x + 1)^{\frac{1}{4}}} - 2(2x + 1)^{\frac{1}{4}} = 0$.

2.3.37. [МЭСИ] $\sqrt[3]{\dfrac{x + 3}{5x + 2}} + \sqrt[3]{\dfrac{5x + 2}{x + 3}} = \dfrac{13}{6}$. Найти наибольший корень.

2.3.38. [МТУСИ] $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = 2$.

2.3.39. [РЭА] $\dfrac{3}{3 + \sqrt{x}} - \dfrac{5}{3\sqrt{x} + x} = \dfrac{1}{4}$. Найти меньший корень.

2.3.40. [МАДИ] $49^{\frac{1}{6}} \cdot 7^{2,5} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{-\frac{2}{3}} \cdot 49x^{0,5}$.

2.3.41. [МГУ, мех.-мат.] $3\sqrt{x + 4} = 5 - 2|x + 2|$.

4. Уравнения, содержащие знак модуля

Решить уравнение:

2.4.1. [МИЭТ] $|2x - 3| = 11$.

2.4.2. [РГПУ] $\left|\dfrac{x - 1}{x + 3}\right| = 1$.

2.4.3. [КПИ] $|x + 2| = 5$. Решить аналитически и графически.

2.4.4. [ГАНГ] $0,6 \cdot |x - 0,3| = x^2 + 0,27$.

2.4.5. [МЭСИ] $|x^2 - 5x + 4| = 4$. Найти наибольший корень.

2.4.6. [МГУ, геолог. ф-т] $x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0$.

2.4.7. [МГУ, геолог. ф-т] $(x - 2)\left(|x| + \sqrt{3} - 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$.

2.4.8. [МАТИ] $|2 - x| = 5 - 4x$.

2.4.9. [МГУЛ] $|4x - 3| = 4x - 3$. Найти наименьший корень.

2.4.10. [ГАНГ] $|-x^2 - 16| = 8x$.

2.4.11. [МИРЭА] $x^2 - 4|x| + 3 = 0$.

2.4.12. [МГУ, ВМиК] $\left(3|x+1|+\frac{1}{3}\right)^2 = 6(x+1)^2 + \frac{10}{9}$.

2.4.13. [МТУСИ] $\frac{2x^2-6}{|x|-1} = |x|+3$.

2.4.14. [РЭА] $|3x^2+5x-9| = |6x+15|$. Указать наименьший из корней.

2.4.15. [КПИ] $|x+2|+|x-3| = 5$.

2.4.16. [МГУ, мех.-мат.] $|2x+5| = |x|+2$.

2.4.17. [МЭСИ] $|x-3|+2|x+1| = 4$. Найти наименьший целый корень.

2.4.18. [МГУ, геолог. ф-т] $\frac{|x-3|}{|x-2|-1} = 1$.

2.4.19. [ГФА] $|x-1|-2|x-2|+3|x-3| = 4$.

2.4.20. [МГУ, эк. ф-т] $\Big||3-x|-x+1\Big|+x = 6$.

5. Системы уравнений

Решить систему уравнений:

2.5.1. [МЭСИ] $\begin{cases} 2x+y-1=0, \\ x-2y+5=0. \end{cases}$ В ответе указать $x+y$.

2.5.2. [МВВДИУ] $\begin{cases} x+2y=15, \\ 2x-y=0. \end{cases}$

2.5.3. [МЭСИ] $\begin{cases} 2x+3y=165, \\ 5x+2y=330. \end{cases}$ В ответе указать $x+y$.

2.5.4. [МГУЛ] $\begin{cases} 2x-y=3, \\ x+5y=7. \end{cases}$ В ответе указать xy.

2.5.5. [МИЭТ] $\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ 3x+y+2z=7, \\ 2x+3y+z=9. \end{cases}$

2.5.6. [МАДИ] $\begin{cases} 4x+5y-2z=1, \\ 2x+7y-3z=-2, \\ 3x+y+2z=0. \end{cases}$ Найти сумму и произведение чисел x, y, z.

2.5.7. [МГАТХТ] $\begin{cases} 3x + y - z = -5, \\ x + 2y - 3z = -1, \\ 2x - y + z = -5. \end{cases}$ В ответе указать $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2.5.8. [МГУ, филолог. ф-т] $\begin{cases} y - x = 5, \\ zx = (z-4)y + 30, \\ 2zx = (2z-4)y. \end{cases}$

2.5.9. [МТУСИ] Докажите, что при любом $a \neq -4$ система уравнений не имеет решений: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 6, \\ -2x + y + 4z = 5, \\ 5x - 11z = a. \end{cases}$

2.5.10. [МТУСИ] При каких a система уравнений имеет решение?

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 5, \\ 3x - y - 7z = 5, \\ 2x - y + 5z = 5, \\ 4x + 5y + 3z = a. \end{cases}$$

2.5.11. [МГСУ] $\begin{cases} x + 4y = 18, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

2.5.12. [МИРЭА] $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0, \\ x + y + 8 = 0. \end{cases}$

2.5.13. [МГУ, биолог. ф-т] $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$

2.5.14. [МГСУ] $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

2.5.15. [ВОКУ] $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 4x^2 + y^2 = 40. \end{cases}$ Вычислить xy.

2.5.16. [МГУ, эк. ф-т] $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0, \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$

2.5.17. [МПУ] $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y^2 - x = 5. \end{cases}$

2.5.18. [МГАУ] $\begin{cases} (x+4)(y+90)=360, \\ (x+5)(y+45)=225. \end{cases}$ Найти ненулевое решение.

2.5.19. [МТУСИ] $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0, \\ x^2-xy-2x-3y=6. \end{cases}$

2.5.20. [МГУ, филолог. ф-т] $\begin{cases} x^2-4xy+y^2=3, \\ y^2-3xy=2. \end{cases}$

2.5.21. [МТУСИ] $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=74, \\ 2x^2+2xy+y^2=73. \end{cases}$

2.5.22. [РГАЗУ] $\begin{cases} x^3-y^3=7, \\ x-y=1. \end{cases}$

2.5.23. [МГУ, ф-т почвовед.] $\begin{cases} x-y=6, \\ x^3-y^3=126. \end{cases}$

2.5.24. [ДВГУ] $\begin{cases} x^3+y^3=2, \\ xy(x+y)=2. \end{cases}$

2.5.25. [ДВГУ] $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^3-y^3=37. \end{cases}$

2.5.26. [МГУ, ф-т почвовед.] $\begin{cases} x+y=7, \\ (x^2-y^2)(x-y)=175. \end{cases}$

2.5.27. [МАДИ] $\dfrac{1}{(x+M)}+\dfrac{A}{(y+N)}=B$; $\dfrac{1}{(x+P)}=\dfrac{C}{(y+Q)}$, где $A=3$, $B=2$, $M=2$, $N=1$, $C=2$, $P=3$, $Q=2$. Найти сумму $x+y$.

2.5.28. [МАДИ] $\begin{cases} x+y^2=A, \\ xy^2=B, \end{cases}$ где $A=3$, $B=-4$. Найти сумму $x+y$.

2.5.29. [РГПУ] $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{y+1}=1\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{y+1}=1\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

2.5.30. [МГУ, физ. ф-т] $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+x=-1, \\ \dfrac{x}{x+y}=-2. \end{cases}$

2.5.31. [МГУ, физ. ф-т] $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y}+y=-5, \\ \dfrac{y}{2x-y}=6. \end{cases}$

2.5.32. [МИЭТ] $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

2.5.33. [МТУСИ] $\begin{cases} \dfrac{x}{y+1}=\dfrac{y}{x+1}, \\ x^2+2y+1=0. \end{cases}$

2.5.34. [МТУСИ] $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+2}=\dfrac{y+1}{x+2}, \\ 2x^2-3xy-2y=0. \end{cases}$

2.5.35. [МЭСИ] $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$ Найти наибольшее значение x.

2.5.36. [ЛГПИ] $\begin{cases} (x+1)(y+1)=10, \\ (x+y)(xy+1)=25. \end{cases}$

2.5.37. [МЭСИ] $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2), \\ x+y=6. \end{cases}$ Найти наибольшее значение x.

2.5.38. [ГАУ] $\begin{cases} xy+x-y=7, \\ x^2y-xy^2=6. \end{cases}$

2.5.39. [МЭСИ] $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{5}{2}xy, \\ x-y=\frac{1}{4}xy. \end{cases}$ Найти наибольшее значение x.

2.5.40. [МЭСИ] $\begin{cases} x^2y+y^2x=20, \\ x^3+y^3=65. \end{cases}$ Найти xy.

2.5.41. [МГУ, псих. ф-т] $\begin{cases} 2u+v=7, \\ |u-v|=2. \end{cases}$

2.5.42. [МГУ, филолог. ф-т] $\begin{cases} 3|x+1|+2|y-2|=20, \\ x+2y=4. \end{cases}$

2.5.43. [МГУ, физ. ф-т] $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|. \end{cases}$

2.5.44. [МГУ, псих. ф-т] $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

2.5.45. [МГУ, псих. ф-т] $\begin{cases} x\sqrt[3]{x - y} = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy. \end{cases}$

2.5.46. [МГУ, ВМиК] $\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = (\sqrt{x} + 1)y. \end{cases}$

2.5.47. [МПГУ] $\begin{cases} \sqrt{2x + 3y} + \sqrt{2x - 3y} = 10, \\ \sqrt{4x^2 - 9y^2} = 16. \end{cases}$

2.5.48. [МФТИ] $\begin{cases} \sqrt{7x + y} + \sqrt{x + y} = 6, \\ \sqrt{x + y} - y + x = 2. \end{cases}$

Группа Б

6. Квадратные уравнения

2.6.1. [МГУ, геогр. ф-т] Найти три числа a, b, c, если известно, что их сумма равна 2, а квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственное решение: $x = 2$.

2.6.2. [МГУ, физ. ф-т] Уравнение $ax^2 + bx + 2 = 0$, где $a < 0$, имеет одним из корней число $x = 3$. Найти действительные корни уравнения $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$.

2.6.3. [МГУ, геогр. ф-т] Найдите три числа a, b, c, если известно, что их сумма равна 1, а квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственное решение: $x = -1$.

2.6.4. [МЭСИ] При каком наименьшем целом положительном значении a корни уравнения $(a + 1)x^2 - 4ax + a - 5 = 0$ строго положительны?

2.6.5. [МТУСИ] При каких значениях a уравнение имеет 2 действительных корня одного знака: $2x^2 - 4a^2x - a^2 + 1 = 0$?

2.6.6. [МГАПБ] Найти наименьшее значение a, при котором корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + ax + 6 = 0$ удовлетворяют условию $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

2.6.7. [МГУ, ИСАА] При каких значениях a сумма S квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?

2.6.8. [МГУ, ИСАА] При каких значениях a сумма S квадратов корней уравнения $x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8 = 0$ является наименьшей? Чему равна эта сумма?

2.6.9. [МЭСИ] Найти наименьшее целое a, при котором корни уравнения действительны, и сумма их кубов меньше, чем $5a - 2$:

$$x^2 + (a + 2)x + 3a + 1 = 0.$$

2.6.10. [МИФИ] Найдите сумму действительных корней уравнения $x^2 + 2(a^2 + 4a)x + 8a^3 + 18a^2 + 63 = 0$ и укажите, при каких действительных значениях a эта сумма принимает наибольшее значение.

2.6.11. [МГУ, физ. ф-т] При каких значениях a все корни уравнения удовлетворяют условию $|x| < 1$: $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$?

2.6.12. [МЭСИ] Найти наибольшее значение k, при котором корни уравнения положительны: $(k - 3)x^2 - 2kx + 6k = 0$.

2.6.13. [МПГУ] При каких значениях a оба корня уравнения $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ больше 3-х?

2.6.14. [ВГУ] Найти все значения параметра b, при которых оба корня уравнения $x^2 - 2bx - 1 = 0$ действительны и не превосходят по модулю 2.

2.6.15. [МЭСИ] При каком наибольшем целом m оба корня уравнения заключены строго между -2 и 4: $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$?

7. Рациональные уравнения и уравнения высших порядков

2.7.1. [МТУСИ] $(x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7) = 297$.

2.7.2. [МВМИ] Решить уравнение $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24$.

2.7.3. [РГГУ] При каких значениях параметра a уравнение имеет решение, удовлетворяющее условию $x > 2$: $\dfrac{a(x + 2) + 1}{x - 3} = 5$?

2.7.4. [МАДИ] Найти наибольшее целое отрицательное значение параметра k, при котором уравнение $\dfrac{2}{2x - k} + \dfrac{1}{kx - 2} = 0$ имеет положительное решение.

2.7.5. [МИЭМ] $\dfrac{x + 2}{3x - a} + \dfrac{3 - x}{3x^2 + 2ax - a^2} = \dfrac{3x + 2}{x + a}$. Решить уравнение при всех значениях a.

2.7.6. [МИЭМ] Решить уравнение $\dfrac{x^2 + 1}{n^2x - 2n} - \dfrac{1}{2 - nx} = \dfrac{x}{n}$.

2.7.7. [МТУСИ] Проверить, что число $x = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4}$ является корнем уравнения $x^3 + 12x - 8 = 0$.

2.7.8. [ДВГУ; МАИ] $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right)$.

2.7.9. [МТУСИ] $(x-2)^4+(x+1)^4=17$.

2.7.10. [МГУ, геолог. ф-т] Найти все пары действительных чисел a и b, при которых уравнение $(3x-a^2+ab-b^2)^2+(2x^2-a^2-ab)^2+x^2+9=6x$ имеет хотя бы одно решение x.

2.7.11. [МГУ, геолог. ф-т] Найти все пары действительных чисел m и n, при которых уравнение имеет хотя бы одно решение x:

$$(3x^2-2m^2+mn)^2+(3m^2-mn+2n^2-12x)^2+4=4x-x^2.$$

2.7.12. [МАТИ] Найти все значения параметра k, при которых уравнение $x^4-2kx^2+k+6=0$ имеет решение.

8. Иррациональные уравнения

2.8.1. [ГАУ] $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$.

2.8.2. [МТУСИ] $5x^2+35x+32=\sqrt{x^2+7x+10}$.

2.8.3. [МГУ, ВМиК] $8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$.

2.8.4. [МАИ] $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=2$.

2.8.5. [МЭСИ] $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.

2.8.6. [МИИТ] $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$.

2.8.7. [МЭСИ] $\sqrt{2x^2-9x+4}+3\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x^2+21x-11}$. Найти наибольший корень.

2.8.8. [МЭСИ] $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$. Найти меньший корень.

2.8.9. [МЭСИ] $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$. Найти сумму действительных корней.

2.8.10. [МТУСИ] $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$.

2.8.11. [МПГУ] $x^4+4x^3+6x^2+4x+\sqrt{x^2+2x+10}=2$.

2.8.12. [МАТИ] $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-1}=3$. Решить уравнение. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет решение.

Решить уравнения для всех действительных значений параметра:

2.8.13. [МПГУ] $\sqrt{x+6}-m=\sqrt{x-3}$.

2.8.14. [ДВГУ] $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=a$.

9. Уравнения, содержащие знак модуля

2.9.1. [МГУ, эк. ф-т] $5\sqrt{1+|x^2-1|} = 3+|5x+3|$.

2.9.2. [МГУ, эк. ф-т] $\sqrt{25+|16x^2-25|} = 4+4|x+1|$.

Найти все значения параметра, при которых уравнение:

2.9.3. [МГУК] $|3x-3|+2 = ax$ имеет ровно два решения.

2.9.4. [МГУ, физ. ф-т] $2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$ имеет четыре различных решения.

2.9.5. [РГАЗУ] $x^2-4|x|+2=p$ имеет ровно три решения.

2.9.6. [МГУЛ] $|x^2-6x|=m$ имеет ровно три решения.

2.9.7. [МГСУ] $|x^2+2ax|=1$ имеет три различных решения.

2.9.8. [МГСУ] $|x^2+2x+a|=2$ имеет четыре различных решения.

2.9.9. [МГУ, физ. ф-т] $2|x-a|+a-4+x=0$ имеет решения, и все они принадлежат отрезку $[0;4]$.

Для каждого значения параметра решить уравнение:

2.9.10. [МЭИ] $x^2+3x=|a(x+3)|$.

2.9.11. [МГУ, геолог. ф-т] $|x+2|+a|x-4|=6$.

2.9.12. [МГУ, геолог. ф-т] $|x+1|+a|x-2|=3$.

2.9.13. [МГУ, физ. ф-т] $2|x|+|x-1|=a$.

2.9.14. [МГУ, ВМиК] $|x+3|-a|x-1|=4$.

2.9.15. [ВВИА] Найти все значения параметра a, при которых уравнение $ax=2|x+3|-3|x+4|+3|x+5|$ имеет ровно два различных решения.

10. Системы уравнений

Решить систему уравнений:

2.10.1. [ГАУ] $\begin{cases} x^2+y-20=0, \\ y^2+x-20=0. \end{cases}$

2.10.2. [ГАУ] $\begin{cases} x^2+y^4=20, \\ x^4+y^2=20. \end{cases}$

2.10.3. [МТУСИ] $\begin{cases} x+y=x^2, \\ 3y-x=y^2. \end{cases}$

2.10.4. [МТУСИ] $\begin{cases} y^4 + 2x^2 = 3xy^2, \\ y + 2x = 4. \end{cases}$

2.10.5. [СПбГТУ] $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ 3xy^2 + x^3 = 260. \end{cases}$

2.10.6. [МГУ, эк. ф-т] $\begin{cases} xy + 3y^2 - x + 4y - 7 = 0, \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$

2.10.7. [МТУСИ] $\begin{cases} y^2 + 2y(x-3) = 8(x-3)^2, \\ (y - 2x)(y + 4x) = 12. \end{cases}$

2.10.8. [МИЭТ] $\begin{cases} \dfrac{xy}{(x+y)} = \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{yz}{(y+z)} = \dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{zx}{(x+z)} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

2.10.9. [МТУСИ] $\begin{cases} y^2 + \dfrac{y}{x} = \dfrac{6}{x^2}, \\ x^2 + xy + 3x = 0. \end{cases}$

2.10.10. [МГУ, мех.-мат.] $\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1, \\ 5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + 2y = 2. \end{cases}$

2.10.11. [МГУ, хим. ф-т] $\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$

2.10.12. [МТУСИ] $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 61, \\ x + y - \sqrt{xy} = 7. \end{cases}$

2.10.13. [ДВГУ] $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{4}{3}, \\ 7\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 9. \end{cases}$

2.10.14. [МТУСИ] $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$

2.10.15. [МТУСИ] $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 4, \\ 2(xy)^2 - z^4 = 16. \end{cases}$

2.10.16. [МТУСИ] $\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$

2.10.17. [МТУСИ] $\begin{cases} \dfrac{a+b}{x+y} + \dfrac{b+c}{y+z} - \dfrac{c+a}{z+x} = 1, \\ \dfrac{a+b}{x+y} - \dfrac{b+c}{y+z} + \dfrac{c+a}{z+x} = 1, \\ -\dfrac{a+b}{x+y} + \dfrac{b+c}{y+z} + \dfrac{c+a}{z+x} = 1. \end{cases}$ $\quad a,\ b,\ c \neq 0.$

2.10.18. [САА] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a+1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

2.10.19. [МГТУ] Найти все значения a, при которых система имеет одно решение: $\begin{cases} y = \dfrac{2x}{x - |x|}, \\ (x+a)^2 + y + a = 3. \end{cases}$

2.10.20. [МГУЛ] При каких значениях k система уравнений

$$\begin{cases} kx + 5y = 3, \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

не имеет решения?

2.10.21. [МАДИ] Указать значения параметра R, при которых система уравнений не имеет решений: $\begin{cases} x - 4y = 1, \\ Rx + y = 1. \end{cases}$

2.10.22. [МГТУ] Найти все значения a, при которых система уравнений имеет решение: $\begin{cases} 2y = |x| - x, \\ y = a + 1 + \dfrac{(x-a)^2}{2}. \end{cases}$

2.10.23. [МГТУ] Найти все значения a, при которых система уравнений имеет решение: $\begin{cases} x^2 + y = 2x + a, \\ x^2 + y^2 = 2x. \end{cases}$

2.10.24. [ГФА] При каких значениях a система имеет бесконечно много решений:

$$\begin{cases} x - (a+1)y = 3, \\ 2x - (a+3)y = a + 5 \end{cases}$$

2.10.25. [МГУ, филос. ф-т] Найти все пары значений (α, β), при каждой из которых система уравнений имеет бесконечно много решений:

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)x + 26y = 2, \\ 8x + (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)y = 4. \end{cases}$$

2.10.26. [ГФА] При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x - ay = 3, \\ ax - 4y = a + 4 \end{cases}$ не имеет решения?

2.10.27. [МГУ, физ. ф-т] Найти все значения a, при которых система имеет единственное решение: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a. \end{cases}$

2.10.28. [МИЭМ] Найти все значения a, при которых система имеет ровно 2 решения: $\begin{cases} (x+y)^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 2(a+1). \end{cases}$

2.10.29. [МГУ, ИСАА] Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно 2 решения: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a. \end{cases}$

2.10.30. [МГТУ] Найти все значения a, при которых система имеет 2 решения: $\begin{cases} x + \sqrt{y - a - 2} = 0, \\ y^2 - x^2 = a(2x + a). \end{cases}$

2.10.31. [МГТУ] Найти все значения a, при которых система уравнений имеет решение: $\begin{cases} x - a = 2\sqrt{y}, \\ y^2 - x^2 + 2x + 8y + 15 = 0. \end{cases}$

2.10.32. [МГУ, геогр. ф-т] Найти все значения параметра a, при которых система уравнений имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2 + y^2 \leqslant a^2$: $\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x. \end{cases}$

Группа B

11. Квадратные уравнения

2.11.1. [МГУ, псих. ф-т] Уравнение $(a-1)x^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0$ имеет действительные корни x_1 и x_2. а) Найти все значения параметра a, при которых оба корня меньше единицы. б) При $a \neq 1$ найти все значения параметра b, при которых выражение $(x_1 - b)(x_2 - b)$ не зависит от параметра a.

2.11.2. [ГАУ] Найти сумму корней уравнения

$$x^2 + 2(a^2 - 3a)x - (6a^3 - 14a^2 + 4) = 0$$

и найти значения a, при которых она принимает наибольшее значение.

2.11.3. [МГУ, геогр. ф-т] Найти все значения параметра b, при которых уравнение $2(3-b)x^2 + 4(1-b)x + |2b-5| = |2b+7|$ имеет 2 различных корня, и сумма этих корней отрицательна.

2.11.4. [МГУ, геогр. ф-т] Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a+1)x^2 + \big(|a+2| - |a+10|\big)x + a = 5$ имеет 2 различных положительных корня.

2.11.5. [ГФА] Определить, как расположены корни уравнения

$$ax^2 - 3(a+1)x + 2a + 7 = 0$$

относительно отрезка $[-1; 4]$.

12. Рациональные уравнения и уравнения высших порядков

2.12.1. [МИЭТ] При каких значениях параметра a уравнение $x^3 + \dfrac{48}{x} = a$ имеет хотя бы одно решение?

2.12.2. [ДВГУ] $x^2 + \dfrac{x^2}{(x+1)^2} = a$. Решить уравнение при всех значениях a.

2.12.3. [МГУ, биолог. ф-т] Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение $8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$?

2.12.4. [МГУ, биолог. ф-т] Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение $8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$?

2.12.5. [МГУ, псих. ф-т] Найти все значения параметров u, v, при которых существует 2 различных корня уравнения $x(x^2 + x - 8) = u$, являющихся одновременно корнями уравнения $x(x^2 - 6) = v$.

2.12.6. [МГУ, псих. ф-т] При каких значениях параметров a и b можно найти 2 различных вещественных корня уравнения $x^3 - 5x^2 + 7x = a$, которые будут также корнями уравнения $x^3 - 8x + b = 0$?

13. Иррациональные уравнения

Решить уравнения:

2.13.1. [ДВГУ] $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$.

2.13.2. [МГУ, хим. ф-т] $(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0$.

2.13.3. [ДВГУ] $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$.

2.13.4. [ДВГУ] $\sqrt{\dfrac{1-4x\sqrt{1-4x^2}}{2}}=1-8x^2$.

2.13.5. [МЭСИ] $\sqrt{x+1}-1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}=0$. Найти сумму корней.

Найти все значения параметра, при которых уравнение имеет решение:

2.13.6. [МАТИ] $x+2k\sqrt{x+1}-k+3=0$.

2.13.7. [МАТИ] $3\sqrt{x+2}=2x+a$.

2.13.8. [СПбГУ] $\sqrt{2xy+a}=x+y+1$.

2.13.9. [МГУ, ф-т почвовед.] $\sqrt{3a+\sqrt{3a+2x-x^2}}=2x-x^2$.

2.13.10. [МГУ, ИСАА] $a^2x^2+2a(\sqrt{2}-1)x+\sqrt{x-2}=2\sqrt{2}-3$.

Найти все значения параметра, при которых уравнение имеет ровно одно решение:

2.13.11. [МГУ, геогр. ф-т] $a+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{1+2ax-a^2-x^2}$.

2.13.12. [МГУ, геогр. ф-т] $2+\sqrt{4x-x^2-3}=a+\sqrt{1-a^2+2ax-x^2}$.

2.13.13. [МГУ, ВМиК] $(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=(a-1)(a+2)$;
и решить уравнение при каждом значении a.

2.13.14. [МГУ, мех.-мат.] $2x^2+2ax-a^2=\sqrt{4x+2a+3a^2}$. Решить уравнение при всех значениях параметра a.

14. Уравнения, содержащие знак модуля

Найти все значения параметра, при которых уравнение:

2.14.1. [ГФА] $x|x+2a|+1-a=0$ имеет единственное решение.

2.14.2. [ГФА] $x|x-2a|-1-a=0$ имеет единственное решение.

2.14.3. [МГУ, хим. ф-т] $2x-|x-k^2|=11k-3|x+4k|$

а) не имеет решений;

б) имеет конечное непустое множество решений.

2.14.4. [МГУ, хим. ф-т] $5|x-3a|+|x-a^2|+4x=a$

а) имеет бесконечное множество решений;

б) не имеет решений.

2.14.5. [МГУ, геогр. ф-т] $|x^2-2x|+|x^2-3x+2|=x^2-4x+c$ имеет ровно три различных решения.

2.14.6. [МГУ, геогр. ф-т] $|x^2-1|+|x^2-x-2|=x^2+3x+c$ имеет ровно три различных решения.

2.14.7. [ВШЭ] $2|x+3|-2|x-2|+|x-4|=x+2a$ имеет ровно два решения.

2.14.8. [МГУ, эк. ф-т] Найти наименьшее значение выражения $a^2+(b-1)^2$ среди тех a и b, для которых уравнение $\Big||x-4|-2\Big|-ax+4a-b=0$ имеет ровно три различных решения. Указать, при каких a и b достигается это наименьшее значение.

2.14.9. [МАИ] Сколько существует различных пар (x,y) целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению: $|x^2+y^2-5|+|x^2-4|+|y^2-9|=8$?

15. Системы уравнений

Решить систему уравнений:

2.15.1. [МГУ, геогр. ф-т] $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0, \\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{cases}$

2.15.2. [МГУ, биолог. ф-т] Найти только решение системы, удовлетворяющее условию $z\geqslant 0$: $\begin{cases} (2-x)(3x-2z)=3-z, \\ y^3+3y^2=x^2-3x+2, \\ z^2+y^2=6y. \end{cases}$

2.15.3. [МАИ] $\begin{cases} \sqrt{y}-4+x=\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y-9}+2}{\sqrt{y}-x+4}, \\ 9+(y-5)^2=x+y. \end{cases}$

2.15.4. [МАИ] $\begin{cases} y-2x+6=\dfrac{\sqrt{x-y-1}+4\sqrt{x-y}}{y+2x-6}, \\ y+\sqrt{x-y}=5+\sqrt{x-y-1}-(x-3)^2. \end{cases}$

2.15.5. [МТУСИ] $\begin{cases} \dfrac{1}{1+(x-y)^2}=z+4, \\ \sqrt{z+3}+2x=8. \end{cases}$

2.15.6. [МТУСИ] $\begin{cases} 1+\sqrt{y-1}=\dfrac{1}{y^2}-(x+z)^2, \\ x^2+y^2=2y. \end{cases}$

2.15.7. [МТУСИ] $\begin{cases} \sqrt{x-1}+y=2z, \\ \sqrt{2-x-x^2}-2y+3z=5. \end{cases}$

2.15.8. [МТУСИ] $\begin{cases} uv+vw=2a^2, \\ vw+wu=2a^2-a-1, \\ wu+uv=2a^2+a-1. \end{cases}$

2.15.9. [УрГУ] При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (a-1)y^2-2(3a+1)y+9a=0, \\ y=-\sqrt{x-3}+2 \end{cases}$ имеет решение?

2.15.10. [МГУ, физ. ф-т] При каких значениях a система

$$\begin{cases} axy+x-y+\frac{3}{2}=0, \\ x+2y+xy+1=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

2.15.11. [МИЭМ] Решить систему для всех значений параметра a: $\begin{cases} x^2=(x-a)y, \\ y^2-xy=9ax. \end{cases}$

2.15.12. [СПбГТУ] Найти все значения a, при которых эквивалентны системы уравнений

$$\begin{cases} x+2y=2-a, \\ ay-x=a-2a^2, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2-y^4-4x+3=0, \\ 2x^2+y^2+(a^2+2a-11)x+12=6a. \end{cases}$$

2.15.13. [МГТУ] Найти все значения a, при которых система имеет решение. $\begin{cases} x=y^2-2y, \\ y^2+x^2+a^2=2y+2ax. \end{cases}$

2.15.14. [МГУ, ИСАА] Найти все значения a, при которых система имеет ровно 4 решения. $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y+|x|-a=0. \end{cases}$

2.15.15. [МГУ, хим. ф-т] Указать все целые значения m, при которых система имеет решения. Найти эти решения.

$$\begin{cases} x^2-4(2x-2-2m-m^2)=y(8-2x-y), \\ x^2-12x+40+y(y-2x+12)=4m(m+1). \end{cases}$$

2.15.16. [МГУ, хим. ф-т] Найти все значения a, при которых система имеет ровно 4 решения: $\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1. \end{cases}$

2.15.17. [МГУ, биолог. ф-т] Найти все значения a, при которых система имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8, \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105}. \end{cases}$$

2.15.18. [МГУ, мех.-мат.] Найти все пары значений a и b, при которых система уравнений имеет не менее пяти решений (x, y):

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0. \end{cases}$$

2.15.19. [МГУ, филолог. ф-т] Найти все значения a, при каждом из которых существует единственная тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая равенствам: $x + y + z = x^2 + 4y^2$, $x + 2y + 3z = a$.

2.15.20. [МГУ, филолог. ф-т] Найти все значения параметра a, при которых система имеет единственное решение: $\begin{cases} ax^2 + 4ax - y + 7a + 1 = 0, \\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 2 = 0. \end{cases}$

2.15.21. [МГУ, филолог. ф-т] Найти все значения параметра b, при которых система имеет единственное решение: $\begin{cases} bx^2 + 2bx + y + 3b - 3 = 0, \\ by^2 + x - 6by + 11b + 1 = 0. \end{cases}$

2.15.22. [МГУ, мех.-мат.] Найти все такие значения a, что при любом значении b система имеет по крайней мере одно решение (x, y, z):

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z = 4. \end{cases}$$

3. Преобразование тригонометрических выражений

Основные свойства и формулы

1. Функции синус, косинус, тангенс, котангенс, а также секанс и косеканс называются *основными тригонометрическими функциями.* При этом по определению *синусом* (соответственно, *косинусом*) числа α называется ордината (соответственно, абсцисса) точки M на тригонометрическом

круге (см. рис. 1), получающейся поворотом точки $M_0(1;0)$ на угол α радиан вокруг начала координат; кроме того,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{при } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \text{при } \alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

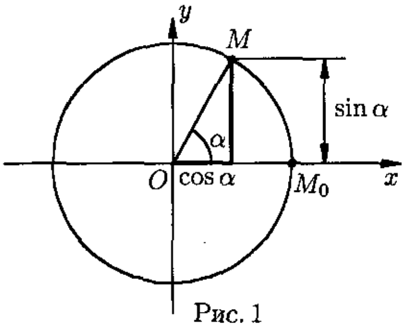


Рис. 1

Сразу из определения вытекает, что $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ при $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Полезно запомнить таблицу значений тригонометрических функций углов в 30° (или $\frac{\pi}{6}$ радиан), 45° ($\frac{\pi}{4}$ рад.) и 60° ($\frac{\pi}{3}$ рад.).

α \ $f(\alpha)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$60^\circ\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1

3. Функции синус, тангенс и котангенс являются нечетными, а функция косинус — четная, т. е. для всех допустимых значений x выполнены равенства

$$\cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x,\ \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x,\ \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}x.$$

Функции синус и косинус — периодические с периодом 2π, а функции тангенс и котангенс — периодические с периодом π. Отсюда следует, что

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi n) = \cos x,$$
$$\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg}x, \quad \operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg}x.$$

для всех допустимых значений x и для всех $n \in \mathbb{Z}$.

4. *Формулы приведения*

Формулы, позволяющие упрощать выражения вида $\sin\left(\frac{\pi n}{2} \pm x\right)$, $\cos\left(\frac{\pi n}{2} \pm x\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm x\right)$ и $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm x\right)$ называются *формулами приведения.* С учетом периодичности основных тригонометрических функций, а также соображений четности (см. пункт 3), достаточно рассмотреть лишь случаи $n = 1, 2, 3$ для синуса и косинуса и $n = 1$ для тангенса и котангенса:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x, \ \ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \ \ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x,$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = -\cos x, \ \ \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x, \ \ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x,$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \ \ \sin(\pi - x) = \sin x, \ \ \cos(\pi \pm x) = -\cos x,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right) = \pm \operatorname{ctg} x, \ \ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right) = \pm \operatorname{tg} x.$$

5. Равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, справедливое для всех значений x, называется *основным тригонометрическим тождеством.* Из этой формулы следуют еще две формулы:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z};$$
$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

6. *Формулы сложения*

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \ \ \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \ \ \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y;$$
$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad \text{при } x, y, x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z};$$
$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad \text{при } x, y, x - y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

7. *Формулы двойного аргумента*

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \ \ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{при } x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \quad \text{и} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

8. *Формулы тройного аргумента*

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin x (3 - 4 \sin^2 x);$$
$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = \cos x (4 \cos^2 x - 3).$$

9. *Формулы понижения степени*

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Полезно также иметь в виду следующие две формулы, непосредственно вытекающие из пункта 8:

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - 3\sin 3x}{4}; \quad \cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}.$$

10. *Формулы преобразования суммы в произведение*

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \ \sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y} \quad \text{при } x,\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y} \quad \text{при } x,\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

11. *Формулы преобразования произведения в сумму*

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\big[\sin(x-y) + \sin(x+y)\big];$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\big[\cos(x-y) + \cos(x+y)\big];$$

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\big[\cos(x-y) - \cos(x+y)\big].$$

12. *Формулы, использующие тангенс половинного аргумента*

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \text{при } x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}; \quad \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \text{ при } x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Группа А

1. Доказательство тождеств

Доказать тождества:

3.1.1. [ЛГПИ] $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

3.1.2. [АТиСО] $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha.$

3.1.3. [МАИ] $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}-1=\dfrac{2\cos 2\alpha}{1+\sin\left(2\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

3.1.4. [МАИ] $\operatorname{tg}\beta\left(1+\dfrac{1}{\cos 2\beta}\right)=\operatorname{tg}2\beta$.

3.1.5. [МАИ] $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha}$.

3.1.6. [РГОТУПС] $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha+\sec 2\alpha$.

3.1.7. [РГОТУПС] $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

3.1.8. [ЯВВФУ] $\dfrac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)-\sqrt{2}\sin\beta}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\beta\right)-\sqrt{3}\cos\beta}=-\sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta$.

3.1.9. [РГОТУПС] $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

3.1.10. [КПИ] $\dfrac{2\sin 2x+\sin 4x}{2(\cos x+\cos 3x)}=\operatorname{tg}2x\cdot\cos x$.

3.1.11. [СамТУ] $\dfrac{\sin 2\alpha-2\sin\alpha}{\sin 2\alpha+2\sin\alpha}=-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

3.1.12. [МТУСИ] $\dfrac{1+\sin\alpha-2\sin^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{4\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2}$.

3.1.13. [МТУСИ] $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

3.1.14. [МТУСИ] $\sin^2(30^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}\sin 2\alpha}{2}$.

3.1.15. [ВГПИ] $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\dfrac{2\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2(-\alpha)-\cos^2\alpha}$.

3.1.16. [ВГПИ] $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\sin\alpha=\cos\alpha$.

3.1.17. [МТУСИ] $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=1$.

3.1.18. [БСА] $\dfrac{\sin\alpha+\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

3.1.19. [БГУ] $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

3.1.20. [УрГУ] $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 4$.

3.1.21. [МАТИ] $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.

3.1.22. [ММИ] $\dfrac{\sin(\pi + x)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)\operatorname{tg}(\pi + x)} = \operatorname{ctg}^2 x$.

2. Упрощение тригонометрических выражений

Упростить:

3.2.1. [ГАУ] $1 + \dfrac{1 - \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

3.2.2. [БГАУ] $(3\sin x + 2\cos x)^2 + (2\sin x - 3\cos x)^2$.

3.2.3. [МГЗИПП; МВВДИУ] $\dfrac{\left(\sin\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{1 + \sin\alpha}$.

3.2.4. [ЯВВФУ] $\cos^2(\pi - \alpha) + \cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

3.2.5. [ЯВВФУ] $\operatorname{tg}^2(270^\circ + \alpha)\cdot\sin^2(180^\circ + \alpha)$.

3.2.6. [МЭСИ] $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} - \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$.

3.2.7. [БСА] $(1 - \sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha) + \sin^2\alpha + 3$.

3.2.8. [МАМИ] $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha}{2\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

3.2.9. [ВЗФЭИ] $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$.

3.2.10. [КПИ] $\dfrac{2(1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha)}{\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)}$.

3.2.11. [ВОКУ] $\dfrac{\sqrt{3}\cos 3\alpha}{10(\cos 9\alpha + \cos 3\alpha)}$ и вычислить при $\alpha = \dfrac{\pi}{36}$.

3.2.12. [МТУСИ] $\dfrac{1 - \sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha}{2\sin^4 2\alpha} + 1$ и вычислить при $\alpha = \dfrac{\pi}{12}$.

3.2.13. [МТУСИ] $\dfrac{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}$ и вычислить при $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

3.2.14. [ММИ] $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

3.2.15. [ММИ] $\dfrac{1 + \operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x}$.

3.2.16. [МГАВТ] $\cos^4 2x + 6\sin^2 2x\cos^2 2x + \sin^4 2x - 2\sin^2 4x$.

3.2.17. [КГТУ] $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\cos(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\beta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right)}$.

3.2.18. [МГУЛ] $\sin^2\alpha + \sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)$.

3.2.19. [МГУЛ] $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\alpha\cos\alpha} - 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

3.2.20. [ГАСБУ] $\dfrac{2(\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha}$.

3.2.21. [МВИПВ] $2\sin\alpha\cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha - \sin(\pi+3\alpha)+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+1}$.

3.2.22. [МГУЛ] $\dfrac{2}{\sin\alpha} - \dfrac{2}{\sin 3\alpha} - \dfrac{4\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha}$.

3.2.23. [БСА] $\dfrac{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)-\sin^2 x}{\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin x\cdot\cos(\pi-2x)}$.

3.2.24. [ГАСБУ] $\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}$.

3.2.25. [МГУЛ] $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(45^\circ-\alpha)}{2\sin(30^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha} + \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.

3. Задачи на вычисление

Вычислить:

3.3.1. [МГАТХТ] $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}8$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

3.3.2. [МИСиС] $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

3.3.3. [МПГУ] $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$.

3.3.4. [РГАЗУ] $\cos(2\alpha - \pi)$, если $\sin\alpha = \sqrt{0{,}2}$.

3.3.5. [МЭСИ] $3\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$.

3.3.6. [МГГУ] $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

3.3.7. [МГАТХТ] $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

3.3.8. [МГУЛ] $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

3.3.9. [МВВДИУ] $\sqrt{2}\sin 22{,}5^\circ \cos 22{,}5^\circ$.

3.3.10. [МГУЛ] $21\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{7}{18}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3.3.11. [ГУЗ] $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

3.3.12. [МВВДИУ] $\sin(-330^\circ)$.

3.3.13. [МПГУ] $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$, $\pi < \alpha, \beta < \frac{3\pi}{2}$.

3.3.14. [МГУЛ] $\sqrt{3}(1 - 2\sin^2 735^\circ)$.

3.3.15. [МТУСИ] $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1 - \operatorname{arctg} 0$.

3.3.16. [МТУСИ] $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} 1$.

3.3.17. [ММИ] $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6}\right)$.

3.3.18. [МТУСИ] $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 130^\circ)$.

3.3.19. [МГТА] $6 - 2\sin\pi - 3\cos\pi + 2\sin\frac{\pi}{2}\cos 2\pi$.

3.3.20. [МЭСИ; МГУК] $96\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}$.

3.3.21. [РЭА] $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\sin\beta = \frac{15}{17}$, $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

3.3.22. [МАИ] $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = a$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

3.3.23. [МИЭТ] $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

3.3.24. [МИЭТ] $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}$.

3.3.25. [МТУСИ] $5\sqrt{17}\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -4$, $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$.

3.3.26. [МГСУ] $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{2}$.

3.3.27. [МГАХМ] $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = -3$.

3.3.28. [МГАЛП] $\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ $\left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos\beta = \frac{24}{25}$ $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. Ответ записать в виде десятичной дроби с двумя знаками после запятой, используя правила округления.

3.3.29. [МГАПП] $8(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sin 52^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$.

3.3.30. [МИСиС] $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos 2\alpha = -0{,}28$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

3.3.31. [МАИ] $\dfrac{\sin\alpha - 3\cos\alpha}{0{,}5\sin\alpha}$, *если* $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 2$.

3.3.32. [МГАПБ] $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$.

3.3.33. [МВВДИУ] $\operatorname{ctg} 45^\circ - 3\operatorname{tg} 360^\circ - \dfrac{3}{\sin 30^\circ} - \cos 180^\circ$.

3.3.34. [ГАНГ] $\dfrac{3\cos 50^\circ - 4\sin 140^\circ}{\cos 130^\circ}$.

3.3.35. [МГГА] $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

3.3.36. [МТУСИ] $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 3$.

3.3.37. [МАИ] $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = a$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

3.3.38. [МГАПБ] $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$.

3.3.39. [МАИ] $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha = a$ и $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

3.3.40. [МАИ] $\sin 2\alpha$, $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = a$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

3.3.41. [МАИ] $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, если $\sin(\pi - x) = a$ и $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

3.3.42. [МАИ] $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, если $\operatorname{tg}(x + \pi) = a$ и $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

3.3.43. [МПГУ] $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

3.3.44. [ЛГПИ] $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\operatorname{tg} 4\alpha$, если $\sin 2\alpha = -0{,}6$ и $135^\circ < \alpha < 180^\circ$.

3.3.45. [СПбГТУ] $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin(\alpha - 90^\circ) = \frac{5}{13}$ и $\sin\alpha < 0$.

3.3.46. [МГАПБ] $\dfrac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}3$.

3.3.47. [МГАПБ] $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

3.3.48. [МИЭТ] $A = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 5$.

3.3.49. [МГУЛ] $\operatorname{tg}\beta$, если $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -1$ и $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

3.3.50. [МГУЛ] $\operatorname{tg}^{-2}\left(\frac{7\pi}{2} + 2\alpha\right)$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3.3.51. [РЭА] $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{8\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos^2\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)}$.

3.3.52. [МГУ, псих. ф-т] $\operatorname{tg}^2 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{11}}$.

3.3.53. [ГАНГ] $\dfrac{2\sin^2 70^\circ - 1}{2\operatorname{ctg} 115^\circ \cdot \cos^2 155^\circ}$.

3.3.54. [МАДИ] $a = \operatorname{ctg}^2(630^\circ + 2x)$, если $\cos x = 0{,}5$.

3.3.55. [МАИ] $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = a$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2} : 2\pi\right)$.

3.3.56. [СГАПС] $\dfrac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$, если $\alpha = 15^\circ$.

3.3.57. [МГАПБ] $\dfrac{4\sin(30^\circ + \alpha)\sin(30^\circ - \alpha)}{\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}1$.

3.3.58. [ЧГУ] $\cos 45^\circ \cdot \sin 3105^\circ + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}(-315^\circ) - \cos 270^\circ$.

3.3.59. [ЛГПИ] $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\alpha = 112^\circ 30'$.

3.3.60. [МГАПБ] $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$, если $\cos\alpha = 0{,}7$.

3.3.61. [РЭА] $y = \dfrac{\sin 4x \cdot \cos 2x}{(1 + \cos 2x)(1 + \cos 4x)}$, если $\operatorname{ctg} x = -\dfrac{4}{5}$.

3.3.62. [РЭА] $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

3.3.63. [МСХА] $A = \operatorname{tg}^{-2}\left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right)$, если $\sin 2\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

3.3.64. [МАДИ] $A = \dfrac{\sin^2(4x - 540^\circ)}{\cos^2(4x - 540^\circ)}$, если $\sin 2x = 3^{-\frac{1}{2}}$.

3.3.65. [МИСиС] $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$, если $\dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \dfrac{1}{3}$.

3.3.66. [РЭА] $\dfrac{\sin\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

3.3.67. [РЭА] $y = \operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

3.3.68. [РЭА] $\sin 2\alpha$, если $4\sin^2\alpha + 3\sin 2\alpha = 4\cos^2\alpha$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

3.3.69. [МГАПБ] $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$.

3.3.70. [РЭА] $3 \cdot \dfrac{\sin 2x - \sin 3x + \sin 5x}{1 + \cos x - 2\sin^2 2x}$, если $\sin x = \dfrac{1}{3}$.

3.3.71. [ВАХЗ] $\dfrac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$.

3.3.72. [ГУЗ] $\sin 16^\circ + \cos 16^\circ \cdot \operatorname{tg} 37^\circ$.

3.3.73. [РХТУ] $\cos 67^\circ 30'$ и $\cos 75^\circ$.

3.3.74. [МГУГиК] $\dfrac{\operatorname{ctg} 15^\circ + 1}{2\operatorname{ctg} 15^\circ}$.

3.3.75. [МАРХИ] $\dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$.

3.3.76. [ЧГУ] $\dfrac{\cos\dfrac{4\pi}{9}}{\sin\dfrac{19\pi}{18}} + 2\cos\pi$.

3.3.77. [МТУСИ] $\dfrac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\sin 77^\circ}$.

3.3.78. [МТУСИ] $\left(\dfrac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}\right)^2$.

3.3.79. [МТУСИ] $\dfrac{16\sin 251^\circ - 10\cos 161^\circ}{\cos 19^\circ}$.

3.3.80. [МИСиС] $\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{16} + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{8}$.

3.3.81. [РЭА] $\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\right]\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$.

3.3.82. [МГУЛ] $\operatorname{tg} 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 288^\circ + \sin 32^\circ \cdot \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \cdot \sin 122^\circ$.

3.3.83. [МИЭТ] $2\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$.

3.3.84. [НГПУ] Значение выражения $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{36}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{31\pi}{36}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9}\right)}$ равно: а) 1; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{36}\right)$; в) -1; г) нет ответа. Найдите ответ из а) – г).

4. Прочие

3.4.1. [МАИ] Найти величины α и β смежных углов параллелограмма, если $\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\alpha + \sin\beta) = \sin(\alpha - \beta)$.

3.4.2. [МГУЛ] Найти значение A, при котором верно равенство
$\dfrac{\sin(\alpha + \pi)}{\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)} + \dfrac{\cos(3\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 1} = \dfrac{A}{\cos\alpha}$.

3.4.3. [МГУЛ] Найти значение В, при котором верно равенство $\frac{1+\cos x}{\sin x} = B\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

3.4.4. [МГУЛ] Найти значение k, при котором верно равенство $\sin^4\alpha + \frac{1}{4}\sin^2(2\alpha+\pi) = (\sin\alpha)^k$.

3.4.5. [МТУСИ] Найти значение числа k, при котором равенство $2\sin 4x(\cos^4 2x - \sin^4 2x) = \sin kx$ верно при любом значении x.

3.4.6. [ГАСБУ] Проверить равенство $\cos 20^\circ + 2\sin^2 55^\circ = 1 + \sqrt{2}\sin 65^\circ$.

В задачах 3.4.7–3.4.10 построить график функции:

3.4.7. [УГГА] $y = \cos 2x$.

3.4.8. [МАИ] $y = \sin 2x - 1$.

3.4.9. [ЛГПИ] $y = 2^{\log_2 \cos x}$.

3.4.10. [МАИ] $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

3.4.11. [МТУСИ] Доказать, что выражение не зависит от x: $\cos^2 x + \cos^2(\alpha + x) - 2\cos\alpha\cdot\cos x\cdot\cos(\alpha+x)$.

3.4.12. [МТУСИ] Является ли функция $y = \sin^2 x$ периодической? Если да, то найти ее период.

3.4.13. [МТУСИ] Является ли функция $y = \cos\sqrt{x}$ периодической? Если да, то найти ее период.

3.4.14. [МТУСИ] Доказать, что функция $f(x) = \sin^2 2x + 0{,}5\cos 4x + 2\sin^2 x + \cos 2x$ принимает одно и то же значение при любом значении x и найти это значение.

3.4.15. [НГПУ] Повторяющиеся углы в формулах $\alpha = 90^\circ\cdot k$ и $\beta = 60^\circ\cdot k + 30^\circ$, $k\in\mathbb{Z}$ имеют вид: а) $\pm 30^\circ + 180^\circ\cdot p$; б) $90^\circ + 180^\circ\cdot p$; в) $180^\circ\cdot p$; г) $90^\circ + 360^\circ\cdot p$; д) 90°, $p\in\mathbb{Z}$. Выбрать ответ из а) – д).

Группа Б

5. Доказательство тождеств

Доказать тождества:

3.5.1. [МГГА] $\sin 5\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) + \sin(\pi - 4\alpha)\cdot\sin 3\alpha + \sin 2\alpha\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = 2\cos\alpha\sin 3\alpha\sin 5\alpha$.

3.5.2. [МАИ] $\frac{-4\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

3.5.3. [ВятГПИ] $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\sin\alpha=\cos\alpha.$

3.5.4. [ВГАВТ] $\dfrac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}=\operatorname{ctg}\alpha.$

В задачах 3.5.5–3.5.12 доказать формулы и указать область допустимых значений:

3.5.5. [МТУСИ] $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}.$

3.5.6. [МТУСИ] $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}.$

3.5.7. [МТУСИ] $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ \operatorname{tg}(\arccos x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$

3.5.8. [МТУСИ] $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}.$

3.5.9. [МТУСИ] $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}.$

3.5.10. [МТУСИ] $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\dfrac{1}{x},\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)=\dfrac{1}{x}.$

3.5.11. [МТУСИ] $\cos(\operatorname{arctg} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \sin(\operatorname{arcctg} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

3.5.12. [МТУСИ] $\sin(\operatorname{arctg} x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

3.5.13. [ГАСБУ] $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0.$

3.5.14. [МИЭТ] $\dfrac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\ \pi<\alpha<2\pi.$

3.5.15. [БрПИ] $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)}-2\cos(135^\circ+\alpha)\cos(315^\circ-\alpha)=$
$=2\cos 2\alpha.$

6. Упрощение тригонометрических выражений

Упростить:

3.6.1. [МАРХИ] $\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha).$

3.6.2. [МГАПБ] $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

3.6.3. [МГАПБ; МИЭТ] $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha).$

3.6.4. [МИЭТ] $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}.$

3.6.5. [СамТУ] $\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha)(\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}{(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha)}.$

7. Задачи на вычисление

Вычислить:

3.7.1. [МГУГиК] $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{12}{13}\right)$.

3.7.2. [МИСиС] $\sin(2{,}5\pi + \operatorname{arctg}(0{,}75))$.

3.7.3. [МАТИ] $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5} + \frac{3\pi}{2}\right)$.

3.7.4. [МИЭТ] $\sin\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right) + \cos(\operatorname{arctg}2\sqrt{2})$.

3.7.5. [МАИ] $\cos\alpha$, если $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ и $\cos 2\alpha = \sin\alpha$.

3.7.6. [МАИ] $\sin 2x$, если $\cos^2\frac{x}{2} = a^2$ и $x \in \left[\pi; \frac{5\pi}{4}\right]$.

3.7.7. [МГАПБ] $(\cos^6\alpha - \sin^6\alpha)$, если $\cos 2\alpha = 0{,}4$.

3.7.8. [МГАПБ] $(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.7.9. [МГАПБ] $\sin^2 2\alpha$, если $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 8$.

3.7.10. [РГАЗУ] $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = a$.

3.7.11. [МИФИ; ВА им. Дзержинского] $\operatorname{tg}9^\circ - \operatorname{tg}63^\circ + \operatorname{tg}81^\circ - \operatorname{tg}27^\circ$.

3.7.12. [НижГУ] $\sin 70^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 10^\circ$.

3.7.13. [МИЭТ; ГАСБУ] $\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$.

3.7.14. [РГПУ] $\frac{1 - 4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}$.

3.7.15. [МИЭТ; МТУСИ] $4\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ$.

3.7.16. [МЭСИ] $128\sin^2 20^\circ \cdot \sin^2 40^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \sin^2 80^\circ$.

3.7.17. [МГГУ] $\operatorname{tg}20^\circ \cdot \operatorname{tg}40^\circ \cdot \operatorname{tg}80^\circ$.

3.7.18. [МГАЛП] $\frac{174}{3 + 4\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}^2\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha - 10 = 0$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

3.7.19. [БГИНХ] $\sqrt{\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$.

3.7.20. [МАИ] $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$, если $\operatorname{tg}\beta = a$ и $2\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha$.

3.7.21. [МАИ] $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, если $\operatorname{tg}\beta = b$ и $1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 4\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$.

3.7.22. [МЭСИ] $\frac{96\sin 80^\circ \cdot \sin 65^\circ \sin 35^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 110^\circ}$.

3.7.23. [МТУСИ] $\dfrac{\sin 50^\circ \cdot \cos 12^\circ - \sin 40^\circ \cos 78^\circ}{\cos 68^\circ - \sqrt{3}\sin 68^\circ}$.

3.7.24. [СПбААП] $\sqrt{3}\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

3.7.25. [СПбААП] $\cos^2(2\,\mathrm{arctg}(-2))$.

8. Графики тригонометрических функций

В задачах 3.8.1–3.8.6 построить график функции:

3.8.1. [КПИ] $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

3.8.2. [ЛГПИ] $y = \dfrac{\sin|x|}{\sin x} - x$.

3.8.3. [ЛГПИ] $y = \dfrac{\sin x}{\sin x} \cdot x^2$.

3.8.4. [ЛГПИ] $y = \dfrac{\sin x - \dfrac{1}{2}}{\sin x - 0{,}5}$.

3.8.5. [ВАХЗ] $y = \arcsin(\sin x)$.

3.8.6. [ЛГПИ] $y = \lg(-\cos x)$.

3.8.7. [МГОПУ] Решить графически $\sin x = \frac{1}{4}x$.

9. Прочие

3.9.1. [ГАНГ] Из двух числовых значений аргумента x: 313, -313 указать то, при котором функция $f(x) = \sin x$ положительна.

3.9.2. [ЛГПИ] Доказать, что $x_0 = \sin 75^\circ$ есть одно из решений уравнения $4x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$.

3.9.3. [ЛГПИ] Исследовать на четность и нечетность функцию $f(x) = \lg\left(\sqrt{9\,\mathrm{tg}^2\,x + 1} - 3\,\mathrm{tg}\,x\right)$.

3.9.4. [ЛГПИ] При каких значениях α имеет место равенство $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$?

3.9.5. [ГАСБУ] Проверить равенство $\cos\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$.

В задачах 3.9.6–3.9.7 преобразовать в произведение выражение:

3.9.6. [МЭИ] $\sin\frac{5}{2}\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \sin 3\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}$.

3.9.7. [МЭИ] $\sec\alpha - \cos\alpha + \sec 60^\circ \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \sin 5\alpha$.

3.9.8. [МГУ, мех.-мат.] Число x удовлетворяет условиям $\operatorname{tg} 2x = -\frac{3}{4}$ и $\sin 2x > 0$. Обязательно ли при этих условиях определено выражение $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x$ и чему оно тогда равно?

Группа В

10. Разные задачи

3.10.1. [МГУ, эк. ф-т] Вычислить $\log_{\frac{14}{25}} |\cos\delta| + \log_{\frac{14}{25}} |\cos 3\delta|$, если известно, что $\sin\left(\delta + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\delta + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{4}{5}}$.

3.10.2. [ГАНГ] Вычислить $\arccos(\sin 5{,}3) - \frac{5\pi}{2}$.

Упростить (задачи 3.10.3–3.10.6):

3.10.3. [МЭСИ] $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{(a^2-3)a}$, если $\sin x + \cos x = a$.

3.10.4. [МЭСИ] $\dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$ $(0 < \alpha < 90^\circ)$.

3.10.5. [МЭСИ]
$\sin 5\alpha \cdot \sin 4\alpha + \sin 4\alpha \cdot \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha - 2\sin 3\alpha \cdot \sin 5\alpha \cdot \cos\alpha$.

3.10.6. [МЭСИ] $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\operatorname{tg}\alpha + 1$.

Вычислить (задачи 3.10.7–3.10.9):

3.10.7. [МЭСИ] $(\sqrt{5}+1)\sin 18^\circ$.

3.10.8. [МЭСИ] $3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}4$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

3.10.9. [МЭСИ] $\sqrt{5}\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right]$.

3.10.10. [МТУСИ] Исключить α и φ из уравнений: $x\sin^2\alpha + y\cos^2\alpha = 1$, $x\cos^2\varphi + y\sin^2\varphi = 1$, $x\operatorname{tg}\alpha = y\operatorname{tg}\varphi$ $(x \neq y)$.

4. Тригонометрические уравнения

Основные свойства и формулы

Основные формулы, связывающие различные тригонометрические функции, приводятся в начале главы 3.

1. Уравнение вида $\sin x = a$ и $\cos x = a$ (где $-1 \leqslant a \leqslant 1$), а также $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ (где $-\infty < a < \infty$) называются *простейшими тригонометрическими уравнениями.*

2. Решения простейших тригонометрических уравнений находятся по формулам:

$$\sin x = a \iff x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = a \iff x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} x = a \iff x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = a \iff x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

3. В важнейших частных случаях, когда $a = 0$, $a = \pm 1$, получаем формулы:

$$\sin x = 0 \iff x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = 1 \iff x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -1 \iff x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \iff x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

4. Уравнения $\sin^2 x = a^2$ и $\cos^2 x = a^2$ (где $0 \leqslant a \leqslant 1$) решаются по формулам:

$$\sin^2 x = a^2 \iff x = \pm \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos^2 x = a^2 \iff x = \pm \arccos a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

5. Уравнения вида $\sin x = \sin y$ и $\cos x = \cos y$ можно решать, сводя их соответственно к уравнениям $\sin x - \sin y = 0$ и $\cos x - \cos y = 0$ и далее применяя формулы для разности синусов и косинусов. Но зачастую удобнее заменить каждое из этих уравнений совокупностью двух элементарных уравнений (справедливость следующих двух формул легко устанавливается с помощью тригонометрического круга):

$$\sin x = \sin y \iff y = x + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad y = \pi - x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = \cos y \iff y = x + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad y = -x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично,

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \iff y = x + \pi n,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y \iff y = x + \pi n,\ x \neq \pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$$

6. Уравнения вида $a\sin^2 \alpha x + b\sin\alpha x\cos\alpha x + c\cos^2\alpha x = 0$, где хотя бы один из коэффициентов отличен от 0, называются *однородными уравнениями 2-ого порядка.* При $a \neq 0$ такое уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2\alpha x \neq 0$ (при этом потери корней не происходит, так как подставив $\cos\alpha x = 0$ в исходное уравнение, получим, что и $\sin\alpha x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству). Таким образом, получаем квадратное относительно $\operatorname{tg}\alpha x$ уравнение $a\operatorname{tg}^2\alpha x + b\operatorname{tg}\alpha x + c = 0$. Заметим, что похожее уравнение $a\sin^2\alpha x + b\sin\alpha x\cos\alpha x + c\cos^2\alpha x = d$ приводится к однородному после замены $d = d\sin^2\alpha x + d\cos^2\alpha x$.

Аналогично решаются *однородные уравнения 1-ого порядка* $a\sin\alpha x + b\cos\alpha x = 0$ (здесь обе части уравнения делим на $\cos\alpha x \neq 0$), а также однородные уравнения 3-ого порядка

$$a\sin^3\alpha x + b\sin^2\alpha x\cos\alpha x + c\sin\alpha x\cos^2\alpha x + d\cos^3\alpha x = 0$$

(обе части уравнения при решении делим на $\cos^3\alpha x \neq 0$).

Группа А

Решить уравнения:

1. Простейшие уравнения вида $\sin(ax+b) = c$, $\cos^2(ax+b) = c$, $\operatorname{tg}(ax+b) = c$ и т. д.

4.1.1. [МЭСИ] $\sin(35° + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $-80° < x < 0°$.[1]

4.1.2. [МГУЛ] $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$. Наименьший положительный корень (в градусах)[2].

4.1.3. [МПГУ] $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

[1] Ограничение $-80° < x < 0°$ в этом примере означает, что нужно найти все решения уравнения, удовлетворяющие этому условию и ответ указать в градусах. То же относится и к другим подобным примерам (если ограничение дано в радианах, то ответ надо дать в радианах).

[2] Это условие означает, что в ответе надо указать только одно число – наименьший положительный корень уравнения (в градусах). То же относится и к другим подобным примерам.

4.1.4. [КПИ] $\operatorname{tg} 2x - \sin^2 7x = \cos^2 7x$.

4.1.5. [МЭСИ] $\sin^2 2x = \frac{3}{4}$, $0° < x < 45°$.

4.1.6. [МГУ, биолог. ф-т] $1 - 4\sin^2\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

4.1.7. [ЧГУ] $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}x\right) - 1 = 0$.

4.1.8. [МГУ, биолог. ф-т] $3\operatorname{tg}^2\left(\pi x - \frac{\pi}{8}\right) = 1$, $\frac{3}{2} < x < 3$.

4.1.9. [МГУ, биолог. ф-т] $\operatorname{ctg}^2\left(\pi x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{3}$, $\frac{5}{2} < x < \frac{9}{2}$.

4.1.10. [МПГУ] $\cos 6x + 6\cos^2 3x = 1$.

2. Уравнения, сводящиеся к квадратным

4.2.1. [РЭА] $\cos 2x + \sqrt{2}\sin x = 1$. Число корней на $[-3, 2]$.

4.2.2. [ВГУ] $6\cos^2 x - 5\sin x + 5 = 0$.

4.2.3. [ГАУ] $\cos^2 x - 2\sin x = -\frac{1}{4}$.

4.2.4. [МГТУ] $3 + \cos 2x + 3\sqrt{2}\cos x = 0$.

4.2.5. [МГУП] $5\sin x - 2\cos^2 x - 1 = 0$.

4.2.6. [МИИ] $\sin^2(180° + x) - \sin x - 2 = 0$, $-180° \leqslant x \leqslant 0°$.

4.2.7. [МИИТ] $4(\cos^2 x + \cos 2x) + 3\sin(270° + x) = 2$.

4.2.8. [МГУ, ИСАА] $3\sin^2 x - 3\cos 2x - 12\sin x + 7 = 0$.

4.2.9. [МГСоцУ] $1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos(21\pi - x)$.

4.2.10. [РЭА] $2\cos^2 x + 5\sin x = 5$. Число корней на $[0, 16]$.

4.2.11. [МИФИ] $2\sin(2x + 1{,}5\pi) - 11\sin x - 1 = 0$.

4.2.12. [МГУП] $2\sin\left(\frac{13}{3}\pi\right)\sin 5x + 1 = \cos 10x$.

4.2.13. [МАДИ] $\sin^2 3x - \cos(180° - x) + \cos^2 3x + \sin\left(90° + \frac{x}{2}\right) = 0$. Число корней на $[0°, 270°]$.

4.2.14. [МПГУ] $2\sin^2 3x + \cos^2 3x + \sin 3x = 1$.

4.2.15. [МТУСИ] $\dfrac{2 - 3\sin x + \cos(2x + \pi)}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0$.

4.2.16. [ВАХЗ] $\cos 2x + 20\cos^2\frac{x}{2} + 3\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 3.$

4.2.17. [МГУ, геогр. ф-т] $\cos^2 6x + 2\sin^2 3x - 3 = 0.$

4.2.18. [МЭСИ] $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\frac{x}{2}, \quad 0° < x < 180°.$

4.2.19. [ГФА] $\cos 12x - 2\sin^2 3x - 1 = 0.$

4.2.20. [ГФА] $3\cos 16x + 8\sin^2 2x\cos^2 2x - 5 = 0.$

4.2.21. [ГАУ] $8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1.$

4.2.22. [МГАПБ] $8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7, \quad 270° < x < 360°.$

4.2.23. [ЛГПИ] $\sin^3 x = 2\sin 2x.$

4.2.24. [ГАСБУ] $\sin^2 x(24\cos x - 5) + 24\cos^3 x = 0.$

4.2.25. [МПГУ] $\cos 2x + \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}} = 0.$

4.2.26. [МАДИ] $7 + 4\sin x\cos x + \dfrac{3}{\cos(90° - 2x)} = 0.$ Число корней на $[0°, 360°]$.

4.2.27. [АТиСО] $(\cos 2x - 1)\operatorname{ctg}^2 x = -3\sin x.$

4.2.28. [МЭИ] $\operatorname{tg} x - 5\operatorname{tg}\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = 6\sin\frac{13\pi}{2}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$

4.2.29. [МЭСИ] $\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3} + 1)\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0.$ Наименьшее решение на $(0°, 90°)$.

4.2.30. [ГАУ] $2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3.$

4.2.31. [МГУП] $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4.$

4.2.32. [МЭИ] $\dfrac{1}{\cos^2 x} - 4\operatorname{tg} x = -2, \quad 4^{2x} - 2^{\pi} \geqslant 0.$[1]

3. Уравнения вида $\sin\alpha x \pm \sin\beta x = 0$, $\sin\alpha x \pm \cos\beta x = 0$, $\operatorname{tg}\alpha x \pm \operatorname{tg}\beta x = 0$ и т. д.

4.3.1. [БГПИ] $\sin 3x = \sin x.$

4.3.2. [АГАУ] $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x.$ Число корней на $[-\pi, \frac{7\pi}{6}]$.

4.3.3. [МГАПБ] $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin 2x = 0, \quad 160° < x < 200°.$

4.3.4. [МЭСИ] $\sin 3x = \sin(90° - 2x), \quad 0° < x < 20°.$

[1] Данное условие означает, что требуется найти все решения уравнения, удовлетворяющие неравенству $4^{2x} - 2^{\pi} \geqslant 0$. То же относится к другим подобным примерам.

4.3.5. [МГУ, геолог. ф-т] $\cos 2x = \cos 2$.

4.3.6. [МГУ, физ. ф-т] $\cos 5x = \cos(5 + x)$.

4.3.7. [МВМИ] $\cos 4x = \sin 2x$.

4.3.8. [ГУЗ] $\cos(x + 60°) = \sin(x - 30°)$, $180° < x < 270°$.

4.3.9. [МТУСИ] $\sin x + \cos 2x = 0$. Число корней на $[0, \pi]$.

4.3.10. [ГАУ] $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

4.3.11. [НГПУ] $\cos 2x = \sin(x - \pi)$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Выбрать ответ из а–д: а) $-\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{11\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{\pi}{6}$.

4.3.12. [МГУ, геогр. ф-т] $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

4.3.13. [МГТУ] $\sin x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 0$.

4.3.14. [КПИ] $1 - 2\sin^2 8x = \sin 4x$.

4.3.15. [МГУ, эк. ф-т] $\dfrac{\sin 3x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = -1$.

4.3.16. [МГУ, эк. ф-т] $\dfrac{\cos 3x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = -1$.

4.3.17. [МГАП] $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x = 0$.

4.3.18. [МЭСИ] $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(90° - 2x)$, $0° < x < 20°$.

4. Уравнения, содержащие выражения вида $\sin\alpha x \pm \cos\alpha x$, $\sqrt{3}\sin\alpha x \pm \cos\alpha x$, $\sin\alpha x \pm \sqrt{3}\cos\alpha x$

4.4.1. [РЭА; МПГУ] $\cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2}$, $\frac{7\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{4}$ (в град.).

4.4.2. [МГСоцУ] $\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{4} = 1$.

4.4.3. [МТУСИ] $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. Число корней на $[-\pi, \pi]$.

4.4.4. [МПУ] $1 + \cos 2x + \sin 2x = 0$.

4.4.5. [МИСиС] $\sin x - \cos x = 1$. Число корней на $[-3\pi, 4\pi]$.

4.4.6. [МГСоцУ] $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 5x$.

4.4.7. [ЛГПИ] $\sin x + \cos x = \sin 2x + \cos 2x$.

4.4.8. [ГАУ] $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - 2 = 0$.

4.4.9. [МГУК] $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$.

4.4.10. [МПГУ] $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$.

4.4.11. [ГАУ] $\sqrt{3}\cos x + \sin x + \sqrt{2} = 0$.

4.4.12. [МЭСИ] $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$, $0° < x < 30°$. Наибольшее целое решение.

4.4.13. [МИСиС] $\sqrt{3}(\cos x - \sin 3x) = \cos 3x - \sin x$, $0° \leqslant x \leqslant 20°$.

4.4.14. [БГАРФ] $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.

4.4.15. [ГФА] $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

5. Уравнения на применение формул для $\sin(\alpha\pm\beta)$, $\cos(\alpha\pm\beta)$

4.5.1. [ГАНГ] $\cos\frac{\pi}{3}\sin 5x + \sin\frac{\pi}{3}\cos 5x = -\frac{1}{2}$. Наибольший отрицательный корень (в град.).

4.5.2. [МГУЛ] $\cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x = 1$. Число корней на $[0, 5]$, удовлетворяющих условию $\sin 2x > 0$.

4.5.3. [ПИИРС] $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2x = \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

4.5.4. [МГУ, геолог. ф-т] $\sin 7x\cos x = \sin 6x$.

4.5.5. [МЭСИ] $\cos x\cos 2x = \cos 3x$, $0° < x < 180°$.

4.5.6. [МГУ, физ. ф-т] $\sin x\sin 5x = \cos 4x$.

4.5.7. [СПбГУ] $\frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \sin x = 0$.

4.5.8. [МФТИ] $\frac{\sin 6x}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos 6x}{\cos x - \sin x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

4.5.9. [МЭИ] $\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 0{,}5(1 + 2\sin^2 x)$. Найти все корни, удовлетворяющие неравенству $x^2 - 2\pi x \leqslant 0$.

6. Уравнения на применение формул преобразования суммы в произведение

4.6.1. [ГФА] $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

4.6.2. [МГУП] $\sin 3x + \sin 7x = 2\sin 5x$.

4.6.3. [МИРЭА] $\sin x + \sin 3x = \sin 2x$.

4.6.4. [РЗИТЛП] $\sin 3x = \cos x - \sin x$.

4.6.5. [МПУ] $\sin x - \sin 3x = \sin 4x - \sin 2x$.

4.6.6. [РЭА] $\sin x - \sin 3x - \sin 5x + \sin 7x = 0$. Число корней на отрезке $[0°, 360°]$.

4.6.7. [МГТУ] $\cos x - \sin\left(5x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos(3x + \pi)$.

4.6.8. [МГТУ] $\cos 5x - \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\cos(4x + 3\pi)$.

4.6.9. [МИРЭА] $\sin 3x - \sin 7x = \sqrt{3}\sin 2x$.

4.6.10. [РЭА] $\cos 8x - 4\sin 6x - \cos 4x = 0$. Сумма корней в градусах на $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

4.6.11. [МИСиС] $\sin x + \cos x + \sin 3x + \cos 3x = 0$. Наибольший отрицательный корень (в град.).

4.6.12. [МИКХС; МПГУ] $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

4.6.13. [КПИ] $\cos 2x + \cos 4x + \cos x = 0$.

4.6.14. [МГУ, биолог. ф-т] $\sin 2x + \sin 3x + \cos 5x = 1$.

4.6.15. [МПГУ] $\sin(x + 30°) + \cos(x + 60°) = 1 + \cos 2x$.

4.6.16. [МГАПИ] $\cos 5x - \cos 3x + \sin 2x = 0$.

4.6.17. [ГАУ] $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

4.6.18. [АГА] $\sin 3x = \sin 2x + \sin x$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

4.6.19. [МГСоцУ] $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$.

4.6.20. [РЭА] $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x = \cos 9x$. Число корней на $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

4.6.21. [МГУ, биолог. ф-т] $\sin 3x - \sin 4x - \cos 7x = 1$.

4.6.22. [МГУ, эк. ф-т] $\sin(3\pi 2^x) = \cos(\pi 2^x) - \sin(\pi 2^x)$.

4.6.23. [МГСоцУ] $\cos 6x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)$.

4.6.24. [ЛГПИ] $\sin 9x = 2\sin 3x$.

4.6.25. [МИЭМ] $\dfrac{\cos x - \sin 2x}{\cos 3x} = 1$.

7. Уравнения, содержащие квадраты синусов и косинусов

4.7.1. [МПГУ] $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$.

4.7.2. [МГСоцУ] $\sin^2 3x + \sin^2(81\pi - x) = \frac{3}{2} - \sin^2 2x.$

4.7.3. [МЭСИ; МГАП] $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1.$

4.7.4. [МТУСИ] $\cos^2 4x + \sin^2 3x = 1.$

4.7.5. [МТУСИ] $\cos^2 2x + \cos^2 6x = 1$. Число корней на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4.7.6. [НГПУ] $6\sin^2(x+\pi) = \sin^2 2x + \cos^2 x$, $-20° < x < 250°$. Сумма корней равна: а) 180°; б) 420°; в) 360°; г) 390°; д) ответ не указан.

4.7.7. [КПИ] $\sin^2 2x = 3\cos^2 x - \sin^2(x+\pi)$, $-\pi < x < \pi$.

4.7.8. [МГУ, ИСАА] $\cos^2(45° + x) = \cos^2(45° - x) + \sqrt{5}\cos x.$

4.7.9. [МГУ, ИСАА] $\sin^2(45° + x) = \sin^2(45° - x) + \sqrt{7}\cos x.$

4.7.10. [МГАПБ] $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = \sin x + \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)$, $-135° < x < -45°$.

4.7.11. [МАДИ] $\sin 3x + \sin 5x = 2(\cos^2 2x - \sin^2 3x)$. Число корней на $[0°, 180°]$.

8. Уравнения на применение формул преобразования произведения в сумму

4.8.1. [МАМИ] $\sin 3x \cos x = \sin 5x \cos 3x.$

4.8.2. [МТУСИ] $\sin 2x \cos 5x - \sin 3x \cos 4x = 0.$

4.8.3. [МГУЛ] $\cos \pi x \sin 7\pi x = \cos 3\pi x \sin 5\pi x$. Число корней на $[1, 2]$.

4.8.4. [МГАПБ] $2\sin 3x \sin 2x - \cos x + 1 = 0$, $-250° < x < -200°$.

4.8.5. [МГАП] $2\sin 2x \cos 3x + \sin x + \cos 2x = 0.$

4.8.6. [МГАПБ] $\sin 5x - 1 = 2\sin x \cos 4x$, $-100° < x < -10°$.

4.8.7. [МГАПП] $2\cos 5x \cos 8x - \cos 13x = 0$. Наименьший положительный корень (в град.).

4.8.8. [МГГУ] $2\sin x \sin 8x = \cos 7x$, $150° < x < 180°$.

4.8.9. [МИФИ] $4\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos x = -\sqrt{3}$, $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

4.8.10. [РЭА] $\cos(x + 70°)\cos(x + 10°) = \sin 30°$. Число корней на $[-10°, 170°]$.

4.8.11. [МГТУ] $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$

4.8.12. [МГТУ] $2\sin x \cos 2x = \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

4.8.13. [МТУСИ] $\cos(70^\circ + x)\cos(20^\circ - x) = \frac{1}{2}, \quad 0^\circ < x < 180^\circ.$

4.8.14. [МГАП] $2\cos 3x \sin x + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1.$

4.8.15. [МГУ, ф-т почвовед.] $2(\sin 6x - \sin 4x \sin 2x) = \cos 6x + \cos 2x.$

4.8.16. [МГУ, *физ.* ф-т] $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}.$

4.8.17. [МПГУ] $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x = 0.$

4.8.18. [ГАУ] $\sin 3x = 4\sin x \cos 2x.$

9. Уравнения, содержащие выражения вида $\sin^4 \alpha x \pm \cos^4 \alpha x$

4.9.1. [УфНТУ; МЭСИ] $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}, \quad 0^\circ < x < 90^\circ.$

4.9.2. [НГПУ] $\cos^4(\pi - x) = \sin^4 x + \frac{1}{2}$. Найдите корни из чисел а–д: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; в) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$; г) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$; д) ответа нет.

4.9.3. [ГАУ] $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$

4.9.4. [МГСоцУ; МАТИ; МГУГиК] $\sin^4 x + \frac{1}{2} = \sin 2x - \cos^4 x.$

4.9.5. [УПИ; МГАП; ГАУ] $\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}.$

4.9.6. [МПГУ] $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cos 2x.$

4.9.7. [МПГУ] $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + 0{,}25.$

4.9.8. [МГТУ] $\sin^4\frac{x}{2} + \cos^4\frac{x}{2} = 1 - \frac{3}{2}\cos^2\frac{x}{2}.$

4.9.9. [МАТИ] $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x - \frac{9}{4}\cos 2x.$

4.9.10. [ГФА] $\sin^4\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\cos^4\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2.$

4.9.11. [ГФА] $\sin^4\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2.$

4.9.12. [МАТИ] $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 2x + \cos^4 2x.$

4.9.13. [МТУСИ] $1 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos^4 x - \sin^4 x$. Число корней, не *превосходящих по модулю* π.

4.9.14. [МГУГиК] $\sin 2x + \sin^4\frac{x}{2} = \cos^4\frac{x}{2}.$

10. Уравнения на применение формул $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$, $\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$, $\cos^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$

4.10.1. [ГАУ] $\cos 2x = \cos x - \sin x$.

4.10.2. [МГТУ] $\sin x + \cos x = \cos 2x$.

4.10.3. [БГПИ; МЭСИ] $\sin 2x + \cos 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0$, $90° < x < 180°$. Наибольшее решение.

4.10.4. [МЭСИ] $4\sin^2 x \cos x - 1 = \cos x$, $0° < x < 90°$. Наименьшее решение.

11. Уравнения на применение формулы $1 \pm \sin 2x = (\sin x \pm \cos x)^2$

4.11.1. [МГТУ; ВШЭ] $1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2}\right)^2$.

4.11.2. [МГОУ] $1 + \sin 2x = (\cos 3x + \sin 3x)^2$.

4.11.3. [МАСИ] $1 + \cos 7x = \left(\sin \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2}\right)^2$.

4.11.4. [МИРЭА] $(\cos 3x + \sin 3x)^2 = 1 + \cos 2x$.

4.11.5. [МАДИ] $\cos\left(\frac{4x + 3\pi}{2}\right) + 1 + \left(\sin\left(\frac{13\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)\right)^2 = 0$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}$.

4.11.6. [ГАУ] $1 + \sin 2x = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2$.

4.11.7. [СГПИ] $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$.

4.11.8. [КПИ] $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$.

4.11.9. [МТУСИ] $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$.

4.11.10. [МПГУ] $$\frac{1 + 2\sin^2(\pi + x) - 3\sqrt{2}\sin x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)}{(\sin x - \cos x)^2} = -1.$$

12. Уравнения, решаемые с помощью разложения на множители

4.12.1. [МГАВТ] $\sin 2x \sin x - 0{,}5 \sin x - \sin 2x = -\frac{1}{2}$.

4.12.2. [МИФИ] $\operatorname{tg} 5x = \sin^2 x \operatorname{tg} 5x$.

4.12.3. [СПбГУ] $\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = 5\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

4.12.4. [МЭИ] $\left(1-2\cos^2\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)\right)\cos 3x=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)\cos 4x+\sin x\cos 2x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

4.12.5. [МГУ, ф-т почвовед.] $\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x\cos^2 x$.

4.12.6. [МГУ, ф-т почвовед.] $\sin 2x\cos 2x - \sin x\cos x = 0$.

4.12.7. [РГАЗУ] $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sin x}$.

4.12.8. [МГСоцУ] $\sin x\cos 3x - 1 = \sin x - \cos 3x$.

4.12.9. [МГСоцУ] $\sin x = 2\sin^3 x - \cos 2x$.

4.12.10. [ГАУ] $2\cos x + \cos 2x + 1 = 2\left(\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{3x}{2}\right)$.

4.12.11. [ГАУ] $\sin 4x = 2\cos^2 x - 1$.

4.12.12. [МГТУ] $2\cos x + \sin x = 1 + \sin 2x$.

4.12.13. [РХТУ] $2\cos^2 x - \sin 2x + 4\sin^2 x = 2$.

4.12.14. [МСХА] $6\sin^2(\pi - x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 7\cos^2(\pi - x) = 6$.

4.12.15. [МАДИ] $\sin(2x + 120°) = \cos(x + 15°) - 1 \quad 0° < x < 75°$.

4.12.16. [СПбГТУ] $\sin 4x + \cos^2 x = \sin^2 x, \quad |x| < 2$.

4.12.17. [КПИ] $6 - 10\cos^2 x + 4\cos 2x = \sin 2x$.

4.12.18. [МЭИ] $\cos^2 2x = 1 + \sin 2x\sin 4x, \quad -\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

4.12.19. [МЭИ] $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{7\pi}{3} + x\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos x}, \quad -\pi < x < 2\pi$.

4.12.20. [МИРЭА] $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x = \sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x$.

4.12.21. [РЭА] $\sin 2x + 2\sin x = 1 + \cos x$. Число корней на $[-4, -3]$.

13. Однородные уравнения 2-го порядка

4.13.1. [МГАЛП; МПГУ] $3\cos^2 x - \sin 2x - \sin^2 x = 0, \quad 0° < x < 90°$.

4.13.2. [МГАП] $10\sin^2 x + 5\sin x\cos x + \cos^2 x = 3$.

4.13.3. [МГТУГА] $1 + 7\cos^2 x = 3\sin 2x$.

4.13.4. [МГУ, геогр. ф-т] $2\cos^2 x - 7\cos x = 2\sin^2 x$.

4.13.5. [МПГУ] $5\sin^2 x + 5\sin x\cos x = 3$.

4.13.6. [МГАПИ] $2 + \cos^2 3x = 2{,}5\sin 6x$.

4.13.7. [ГАУ] $2\sin 4x - 3\sin^2 2x = 1$.

4.13.8. [МГАП] $6\sin^2 2x + 4\cos^2 2x - 4\sin 4x = 1$.

4.13.9. [МИРЭА] $\sqrt{3}\sin^2(\pi + x) - (1+\sqrt{3})\cos x\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos^2 x = 0$.

4.13.10. [МГСоцУ]
$$2\sin x\cos\left(x + \frac{11\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)\cos x = 3\cos x\sin(7\pi - x).$$

4.13.11. [МГСоцУ]
$$4\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin(\pi + x)\cos x + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(\pi + x) = 1.$$

4.13.12. [МГУ, физ. ф-т] $8 - 7\sin 2x = 12\sin^2 x$.

4.13.13. [МГУЛ] $3\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin^2(\pi + x) + \sin(\pi - 2x)$. Число корней на $[-\pi, \pi]$.

4.13.14. [МАИ] $\dfrac{1}{\cos x} + \sin x = 7\cos x$.

14. Уравнения вида $a\sin\alpha x + b\cos\alpha x = c$

4.14.1. [МГУ, физ. ф-т] $5\cos x + 2\sin x = 3$.

4.14.2. [МГГА] $\sin 2x - 4\cos 2x = 4$.

4.14.3. [ГАУ] $5\sin x + 12\cos x = 13$.

4.14.4. [СПбГУ] $3\sin 2x - 4\cos 2x = 5$.

4.14.5. [МИРЭА] $\cos 2x + 3\sin 2x = 2$.

4.14.6. [ПИИРС] $3\sin 5x - 2\cos 5x = 3$.

4.14.7. [МТУСИ] $6\sqrt{3}\sin x + 4\cos x = 7$.

4.14.8. [МГУ, филолог. ф-т] $\dfrac{2}{\pi}\sin x + \cos(19\pi) = \cos x$.

15. Уравнения, содержащие выражения вида $\operatorname{ctg}\alpha x \pm \operatorname{tg}\alpha x$, $\operatorname{tg}\alpha x \pm \operatorname{tg}\beta x$, $\operatorname{ctg}^2\alpha x - \operatorname{tg}^2\alpha x$

4.15.1. [МПГУ] $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 1{,}5$.

4.15.2. [МГТУ] $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

4.15.3. [МГТУ] $\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$

4.15.4. [МПГУ] $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + 2\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + \frac{1}{\operatorname{tg} x - 1}\right) = 4.$

4.15.5. [СПбГТУ] $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2\sin 2x, \quad 2 < x < 3.$

4.15.6. [РЭА] $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Число корней на $[0, \pi]$.

4.15.7. [МГТУ] $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 8\operatorname{ctg}^2 2x.$

4.15.8. [МГТУ] $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 16\cos^3 2x.$

16. Уравнения с тангенсами и котангенсами

4.16.1. [МПГУ] $2\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 2.$

4.16.2. [МИСиС; МАДИ] $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$. Сумма корней на $[0, \pi]$.

4.16.3. [КПИ] $\sin x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0.$

4.16.4. [МГГА] $\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = 1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 4x\right), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

4.16.5. [МПУ] $1 + \cos x = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$

4.16.6. [МЭСИ] $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 0, \quad 0^\circ < x < 270^\circ$. Наибольший корень.

4.16.7. [МТУСИ] $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x + 1) = 1.$

4.16.8. [МАИ] $\operatorname{tg} x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}.$

4.16.9. [МПГУ] $\cos 3x \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\cos x - 1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}.$

4.16.10. [МПГУ] $\frac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}.$

4.16.11. [МГОПУ] $\frac{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\sin\frac{x}{2}.$

17. Прочие

4.17.1. [МГАУ] $2\cos^2 x - \cos 2x = 2\sin^2 x - \sin 2x.$

4.17.2. [ЛГПИ] $\sin 3x = \frac{1}{4}(2\sin^2 x + \cos 2x + 1).$

4.17.3. [МГУ, геогр. ф-т] $\cos^2 6x - \sin^2 3x - 1 = 0.$

4.17.4. [МЭИ] $\sin 2x \operatorname{tg} 3x - 2\sin x \sin\left(x + \dfrac{23\pi}{2}\right) = 0, \ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}.$

4.17.5. [ГАУ] $(2\cos^2 x - 1)\sqrt{2x - x^2} = 0.$

4.17.6. [МГОПУ] $\dfrac{\cos^2 x}{1 - \cos x} = \dfrac{1}{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} + 2\cos^2 \dfrac{x}{2}.$

4.17.7. [МГУ, филолог. ф-т] $\dfrac{(\sqrt{3}\cos x + \sin x)^2}{\sqrt{3} + 2\sin 2x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

4.17.8. [МГУ, мех.-мат.] $\dfrac{4\sin x - 2\cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - 2} = 0.$

4.17.9. [МГУ, геогр. ф-т] $\sin x = \cos^2 x + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}\right).$

4.17.10. [МИРЭА] $\log_{4-x^2}(\sin x + \cos x) = \log_{4-x^2} \sin x.$

4.17.11. [ЛГПИ] $2\sin 2^x - \sin 2^{x+1} = 0.$

Группа Б

18. Уравнения, содержащие выражения вида $\cos^3 \alpha x \pm \sin^3 \alpha x$, $\cos^6 \alpha x \pm \sin^6 \alpha x$, $\cos^8 \alpha x - \sin^8 \alpha x$

4.18.1. [МГУЛ] $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x, \quad -90^\circ < x < 90^\circ.$

4.18.2. [МЭСИ] $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin^2 x - \cos^2 x, \quad 0^\circ < x < 60^\circ.$

4.18.3. [МГУ, ф-т почвовед.] $\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0.$

4.18.4. [МТУСИ] $\dfrac{\sin^3\left(\dfrac{x}{2}\right) - \cos^3\left(\dfrac{x}{2}\right)}{2 + \sin x} = \dfrac{1}{3}\cos x.$

4.18.5. [РГМУ] $\cos^6 x - \sin^6 x = 2\cos^2 2x.$

4.18.6. [МАТИ] $\sin^6 x - \cos^6 x = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - 1.$

4.18.7. [МАТИ] $\sin^6 x + \cos^6 x = \cos 2x.$

4.18.8. [МАТИ] $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{13}{14}(\sin^4 x + \cos^4 x).$

4.18.9. [МГАПБ] $\cos^6 x - \sin^6 x = \dfrac{13}{8}\cos^2 2x, \quad 270^\circ < x < 320^\circ.$

4.18.10. [МГАПБ] $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{15}{8}\cos 2x - \dfrac{1}{2}, \ 180^\circ < x < 270^\circ.$

4.18.11. [МГАПБ] $\sin^8 x - \cos^8 x = \frac{1}{2}\cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x$, $270^\circ < x < 360^\circ$.

4.18.12. [МГАПБ] $\cos^8 x - \sin^8 x = \cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x$, $180^\circ < x < 270^\circ$.

19. Уравнения, сводящиеся к кубическим, и однородные уравнения 3-го порядка

4.19.1. [МЭИ] $\sin^2 x(\operatorname{tg} x - 1) = 3\sin x(\cos x + \sin x) - 3$. Найти все решения, принадлежащие области определения функции $y = \sqrt{-4x - x^2 - 3}$.

4.19.2. [ГФА; МГСоцУ] $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.

4.19.3. [ГФА] $3\sin 3x + 2\operatorname{ctg}\frac{3x}{2} = 5$.

4.19.4. [МАДИ] $2\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3\frac{\sin x}{\cos x} = 3$, $0^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$. Число корней.

20. Уравнения, решаемые с помощью оценок для $\sin x$ и $\cos x$

4.20.1. [РУДН] $\sin^4 x + \cos^3 x = 1$.

4.20.2. [МИЭТ] $\cos^{1977}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^{1995} 7x = 2$.

4.20.3. [МТУСИ] $\sin 2x \sin 6x = 1$.

4.20.4. [МГТУ] $\cos \pi x + x^2 - 6x + 10 = 0$.

4.20.5. [МГУ, ИСАА] $\cos^2 x + \sqrt{x - \frac{\pi}{2}}\sin x + \sqrt{x - \frac{\pi}{2}} = 0$.

4.20.6. [МГУ, ИСАА] $\sin^2 x + 3x^2\cos x + 3x^2 = 0$.

21. Уравнения, решаемые с помощью разложения на множители

4.21.1. [МЭСИ] $\cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = 0{,}5$; $0^\circ < x < 40^\circ$.

4.21.2. [МГУ, биолог. ф-т]
$\sin x(3\sin 2x\sin^3 x + 12\sin 2x\sin x - 16\cos x) + 2\sin 4x = 0$.

4.21.3. [МГУ, биолог. ф-т]
$3\cos 4x + 2\cos 2x(10\cos^4 x + 3\cos^2 x + \sin^2 x) + 3 = 0$.

4.21.4. [ГФА] $2\sin^5 x - \sin^3 x + 3\cos 2x = 0$.

4.21.5. [МГУ, псих. ф-т] $(\cos x - 1)(\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x - 1) = \sin^2 x$.

4.21.6. [МГУ, псих. ф-т] $(2\sin x - 1)\left(\cos x + 2\sin 2x + \frac{1}{2}\right) = 3 - 4\cos^2 x.$

4.21.7. [НГУ] $\dfrac{\sin 2x - \dfrac{4}{5}\cos x + 1}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} = 5\cos\frac{x}{2}, \quad \frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2\pi.$

4.21.8. [МТУСИ] $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \dfrac{\cos x - \sin x}{\dfrac{1}{2}\sin 2x}.$

4.21.9. [ГФА] $\sin 6x + 2\cos 4x = 2.$

4.21.10. [МИРЭА] $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x.$

4.21.11. [МИРЭА] $\sin^2 x + \sqrt{6}\cos x = 3\cos^2 x + \sqrt{2}\sin x.$

4.21.12. [МИРЭА]
$4(\sin^2 x \sin 2x - \sqrt{3}\sin^3 x) + \frac{3}{2}\cos 2x \sin 4x = 3\sqrt{3}\sin x \cos^2 2x.$

4.21.13. [ГАУ] $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \sin^2 x \cos 9x + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right)$. Число корней на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4.21.14. [МЭИ] $0{,}5(\sin 3x - \sin x) = \sin 2x \cos x - 4\sin^3 x, \ -\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}.$

4.21.15. [МТУСИ] $\sin 14x - \sin 12x + 8\sin x - \cos 13x = 4.$

4.21.16. [ГФА] $\sin\frac{3x}{2} + 2\cos x = 2.$

4.21.17. [МГУ, ф-т почвовед.] $2(\sin 6x - \sin 4x \sin 2x) = \cos 6x + \cos 2x.$

4.21.18. [СПбГУ] $\sin 2x + \sin 4x = \sin x + 2\cos x \sin 4x.$

22. Уравнения с радикалами

4.22.1. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{1 + \cos 4x}\sin x = 2\sin\frac{\pi}{4}.$

4.22.2. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{1 + \cos 6x}\sin\frac{3x}{2} = 2\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{3}.$

4.22.3. [МИЭМ] $\sqrt{8 - 17\sin x} + 2\cos x = 0.$

4.22.4. [МИЭМ] $\sqrt{1 - \sqrt{3}\sin x} + \sqrt{10}\cos x = 0.$

4.22.5. [МИЭМ] $\sqrt{7\sin x - \cos 2x} + 2\cos x = 0.$

4.22.6. [МГУ, филолог. ф-т] $\sqrt{10}\cos x - \sqrt{4\cos x - \cos 2x} = 0.$

4.22.7. [МГУ, мех.-мат.] $\sqrt{4\cos 2x - 2\sin 2x} = 2\cos x.$

4.22.8. [МФТИ] $\sqrt{\cos x + \cos 3x} = -\sqrt{2}\cos x$.

4.22.9. [СПбГУ] $3 - 4\sin x = \sqrt{2\sin x - 1}$.

4.22.10. [МФТИ] $\sqrt{\cos 2x} = 1 + 2\sin x$.

4.22.11. [НГУ] $\sqrt{2}\sin x = \sqrt{5\cos x - 1}$.

4.22.12. [МГУ, мех.-мат.] $\sqrt{\sin 2x - 2\cos 2x} = \sqrt{2}\sin x$.

4.22.13. [МЭИ] $\sqrt{2 + \cos 2x - 2\cos^2 3x + 2\cos 6x} = \sqrt{2}\sin 2x$, $-5 \leqslant x \leqslant 0$.

4.22.14. [МПГУ] $\sqrt{6(1 - \operatorname{tg}^2 x)} = 4\sin x$.

4.22.15. [МПГУ] $2\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

4.22.16. [МПГУ] $1 + \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}} = 2\cos^2 x$.

4.22.17. [МГУ, геолог. ф-т] $15\cos 2x\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 7$.

4.22.18. [МИЭМ] $\sqrt{4\cos x + 3\sin 2x} - 2\cos x = 1$.

4.22.19. [МГУЛ] $\sqrt{2\sin x} = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$. Наименьший положительный корень (в град.).

4.22.20. [МФТИ] $\sqrt{0{,}5 + \cos x\cos 2x} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

4.22.21. [МИЭМ] $2\cos x + 3\sin x = \sqrt{4 + 13\sin x}$.

4.22.22. [МИЭМ] $\sin x + 2\cos x = \sqrt{6\sin 2x + 4}$.

4.22.23. [МГУЛ] $\sqrt{1 - \sin 2x} = \sin 3x + \cos 3x$. Число корней на $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

4.22.24. [МИФИ] $\sqrt{\sin(x + 3) - \sin 3\cos x} = \sqrt{\cos x}$.

4.22.25. [МФТИ] $\cos x\sqrt{3 - \operatorname{tg} x} = \sin x\sqrt{1 - \operatorname{ctg} x}$.

4.22.26. [МФТИ] $\sqrt{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x} = \dfrac{1}{\cos x}$.

4.22.27. [МГАП] $2\sqrt{\sin x + 6\cos x} = (\operatorname{tg} x + 3)\sqrt{\cos x}$.

4.22.28. [МИРЭА] $\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2} - \cos x} = \sin x + \cos x$.

4.22.29. [МИРЭА] $\sqrt{2 + \sin 3x + \sin x} = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

4.22.30. [МИЭМ] $\sin x + \cos x = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}$.

4.22.31. [МИФИ] $\sqrt{0{,}5 - \sin x} - \sqrt{\cos x} = \sqrt{0{,}5 - \cos x - \sin x}$.

4.22.32. [МИЭТ] $\sqrt{\operatorname{tg} x + \sin x} + \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x} = \sqrt{3\operatorname{tg} x}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

4.22.33. [СПбГУ] $2\sin x = \sqrt{4 + \cos 3x}$.

23. Уравнения с модулями

4.23.1. [МГУ, мех.-мат.] $1 + 2|\sin x| = 2\cos 2x$.

4.23.2. [МПГУ] $5\sin^2 x + 8\cos x + 1 = |\cos x| + \cos^2 x$.

4.23.3. [МГУ, геолог. ф-т; РЭА] $\dfrac{|\sin x|}{\sin x} = 1 - \cos 2x$, $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

4.23.4. [РЭА] $(x^2 - 12x + 23)\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right| = 12\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Сумма целых корней.

4.23.5. [МГУ, псих. ф-т; МИЭТ] $\left|\cos^2\frac{x}{2} - \frac{2}{5}\right| = 5\cos x + 1$.

4.23.6. [МГУ, ф-т почвовед.] $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin x + |\cos x| = 0$.

4.23.7. [МГУ, ф-т почвовед.] $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = |\cos x|$.

4.23.8. [КПИ] $3^{|\sin x - 1|} = 9$.

4.23.9. [МГУ, мех.-мат.] $2^{|x-2|\sin x} = (\sqrt{2})^{x|\sin x|}$.

4.23.10. [МЭИ] $\left|\cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right)\right| = 2\sin\left(x + \frac{9\pi}{2}\right) - \sin(x + 17\pi)$. Найти корни, принадлежащие области определения функции $y = \sqrt{\cos\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

4.23.11. [ВА им. Дзержинского] $|\sin x - \cos x| = 1 - \sin 2x$.

4.23.12. [МИЭМ] $3\cos 2x + 2\sin^2 x + 4\sin|x| = 0$. Число корней на $[0, 12]$.

4.23.13. [МИЭМ] $\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x = |1 + 2\cos x + \cos 2x|$.

4.23.14. [МИЭМ] $\sin x - 2\sin 2x + \sin 3x = |1 - 2\cos x + \cos 2x|$.

24. Смешанные уравнения

4.24.1. [РГМУ] $\log_{1/\sin x}\cos^2 x = \log_{\sqrt{\sin x}}\sqrt{7 - \operatorname{tg} x}$.

4.24.2. [РЭА] $\log_{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = -1$. Число корней на $[1, 8]$.

4.24.3. [МИФИ] $\log_3(2\sin x - 1 + 18\sin^2 x) = -\log_{1/3}(1 - 7\sin x)$.

4.24.4. [МГУ, хим. ф-т] $\log_2(3\sin x - \cos x) + \log_2\cos x = 0$.

4.24.5. [МГУ, эк. ф-т] $\log_5((x + 19)\cos x) = \log_5\left(\dfrac{x + 19}{\cos x}\right)$.

4.24.6. [МГУ, эк. ф-т] $\log_4\left(\dfrac{x - 14}{\sin x}\right) = \log_4\left((x - 14)\sin x\right)$.

4.24.7. [МГУ, эк. ф-т] $\log_3\big((x+10)\cos x\big) = \log_3\left(\dfrac{x+10}{\cos x}\right)$.

4.24.8. [МПГУ] $\log_3(2\sin x\sin 2x) + \log_{1/3}(5\cos x + 4\sin 2x) = 0$.

4.24.9. [МФТИ] $\log_{27}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x\right) = \frac{1}{3}\log_3(-\cos x)$.

4.24.10. [МТУСИ] $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} 3 = 1$.

4.24.11. [МИЭМ] $\sqrt{9-x^2}(2\sin 2\pi x + 5\cos\pi x) = 0$.

4.24.12. [СГПИ] $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$.

4.24.13. [МПУ] $4^{\sin^2 x} - 2^{-\cos 4x} = 0$.

4.24.14. [МГУ, ВМиК] $3\cdot 64^{2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})} - 392\cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0$.

4.24.15. [МГУ, мех.-мат.] $\left(3^{8x\operatorname{ctg}\pi x}\right)^x \cdot 27^{5x\operatorname{ctg}\pi x} = 9^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

4.24.16. [МПГУ] $7^{1+\cos 2x} + 49^{(\sin x+1)^2 - 2\sin x} = 14\cdot 5^{\log_{\cos x}\cos^2 x}$.

25. Уравнения с тангенсами и котангенсами

4.25.1. [МФТИ] $\sin x + 2\sin 3x + \sin 5x = \operatorname{ctg} x\sin 3x$.

4.25.2. [МФТИ] $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = \dfrac{8}{\sin 2x}$.

4.25.3. [МАИ] $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

4.25.4. [КПИ] $\sin 2x + 3\sin x = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

4.25.5. [МЭИ] $(\sin x + \cos x)^2 + \cos 2x + \operatorname{tg} 2x = 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$.

4.25.6. [МЭИ] $\cos 2x + (\sin x + \cos x)^2\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x + 1), \ -\frac{7\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

4.25.7. [МИРЭА] $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} 2x = \dfrac{1}{1+\cos 2x}, \quad -0{,}5 \leqslant x \leqslant 1$.

4.25.8. [МИРЭА] $\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = \operatorname{tg} 6x$.

4.25.9. [МИРЭА] $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 2x}$.

4.25.10. [МИРЭА] $\dfrac{\cos 4x + 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x} = \dfrac{1}{2}\cos^4 2x - 8\sin^4 x\cos^4 x$.

4.25.11. [НГУ] $2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 3\operatorname{tg} 2x + 5$.

4.25.12. [МГУ, геолог. ф-т] $\operatorname{tg} x(1 - 2\sin x) - 2\cos x = -\sqrt{3}$.

4.25.13. [МТУСИ] $\operatorname{ctg}^4 x = \cos^2 2x - 1.$

4.25.14. [МТУСИ] $\cos x(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x) = 4\sin 3x \sin 4x.$

4.25.15. [ГАУ] $\dfrac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} = 2\operatorname{tg}^2 x - 1.$

4.25.16. [МЭСИ] $\sin x \operatorname{tg} x + \cos x \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \sin x + \cos x, \quad 0^\circ < x < 90^\circ.$

4.25.17. [МЭСИ] $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}, \quad 0^\circ < x < 150^\circ.$

4.25.18. [МЭИ] $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg} 2x} + \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\cos 2x + \sin 2x} = \dfrac{2\sqrt{3}\operatorname{tg} 2x}{1-\operatorname{tg}^2 2x}.$

4.25.19. [МИРЭА] $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} = 9 - \operatorname{ctg} 2x + \dfrac{5}{\sin 2x} + \operatorname{tg}^2 x.$

4.25.20. [СПбГУ] $\operatorname{ctg} x + \sin 2x = \operatorname{ctg} 3x.$

4.25.21. [МФТИ] $2\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{2}{\sin 2x}.$

26. Уравнения со сложными тригонометрическими функциями

4.26.1. [МГУ, ВМиК] $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right) = 1.$

4.26.2. [МГУ, ВМиК] $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}\cos x\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

4.26.3. [МГАП] $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\cos x\right) = -\dfrac{1}{2}.$

4.26.4. [ГАУ] $\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\sin x\right) = \dfrac{1}{2}.$

4.26.5. [МГУ, эк. ф-т; МГАП] $\operatorname{tg}(4\sin x) = \sqrt{3}, \quad \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}.$

4.26.6. [МГУ, мех.-мат.] $\cos\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) = \dfrac{1}{2}.$

27. Уравнения с обратными тригонометрическими функциями

4.27.1. [МТУСИ] $2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi \arcsin x.$

4.27.2. [МТУСИ] $4\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{x+3} = \pi.$

4.27.3. [МТУСИ] $9(\arccos 2x)^2 - 3\pi\arccos 2x - 2\pi^2 = 0.$

4.27.4. [МФТИ] $2\arcsin 2x = \arccos 7x.$

28. Прочие

4.28.1. [СПбГУ] $\cos x = \cos \frac{1}{x}$.

4.28.2. [МТУСИ] $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi(x^2 + 2x))$.

4.28.3. [МГУ, геолог. ф-т]
$\cos x \cos 3x - 9\cos^2 x + 5 = 14 \sin x \sin 3x - 30 \sin^2 x$.

4.28.4. [МГУ, геолог. ф-т]
$\sin x \sin 3x + 7 + 2\sin^2 x = 14 \cos x \cos 3x + 7\cos^2 x$.

4.28.5. [ГФА]
$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos^6\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin^6\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

4.28.6. [ГФА]
$\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\cos^5\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - \sin^5\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

4.28.7. [СПбГТУ] $8\sin^3 x \sin 3x - \cos 6x - 3\cos 2x = -3\cos 4x$.

4.28.8. [СПбГТУ] $\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{5} + 2x\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \frac{2}{3}$.

4.28.9. [МИРЭА] $1 + \sin 4x - \cos 4x = 2\sin 5x \cos x$.

4.28.10. [МАТИ] $5\cos 2x + 3\cos 5x - 4\sin 5x = 0$.

4.28.11. [МАТИ] $3 - \sin 4x + 3\sin 2x - 3\cos 2x = 0$.

4.28.12. [МАТИ] $\sin 2x + 3 = 3(\sin x + \cos x)$.

4.28.13. [МГСоцУ; МТУСИ] $\frac{1}{2}\sin 2x + 1 = \sin x + \cos x$.

4.28.14. [МПГУ] $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \frac{1}{4}\sin 12x$.

4.28.15. [МГУ, филолог. ф-т] $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

4.28.16. [МГСоцУ] $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.

4.28.17. [МЭСИ] $\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = 0, \quad 0^\circ < x < 70^\circ$.

4.28.18. [ВВИА] $\cos x + \cos 3x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

4.28.19. [ГФА] $\cos x + \cos 3x + (\sqrt{3}\cos x + \sin x)\cos x = 0$.

4.28.20. [ГФА] $\sin 2x \sin 3x = \sin 2x \cos 3x + \sin x + \cos x$.

4.28.21. [МАТИ] $4\sin^2 x \sin^2 2x = \cos 4x \cos 2x$.

4.28.22. [МГСоцУ] $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

4.28.23. [ГФА] $8\sin^6\frac{x}{2} + \cos^3 x - \cos 2x = 0$.

4.28.24. [МЭСИ] $1 + \frac{2}{\sin x} = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}0{,}5$, $-100^\circ < x < 150^\circ$.

4.28.25. [МЭИ] $0{,}5(1+\cos x)\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) - \sin^3 x = 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Найти все корни, удовлетворяющие неравенству $\log_\pi(x+1) \geqslant 1$.

4.28.26. [МЭИ] $(1+\sqrt{3})\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{11\pi}{4} = \sin x\left(\sin\frac{16\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{6}\right)$. Найти все корни, принадлежащие области определения функции $y = \log_{\pi/4}\left(\frac{x-4\pi}{\pi-2x}\right)$.

4.28.27. [МИФИ] $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = a$.

4.28.28. [МИФИ] $\frac{a}{a - 3\sin^2 2x} = 3$.

4.28.29. [МГУ, мех.-мат.] $2\cos(\sqrt{x} + \pi) + 1 = 0$.

29. Системы уравнений

Решить системы:

4.29.1. [ГАУ] $\begin{cases} \cos x + \cos y = \sqrt{3}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

4.29.2. [ГАУ] $\begin{cases} x + y = \frac{7\pi}{3}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{2}. \end{cases}$

4.29.3. [МПУ] $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = \frac{1}{2}. \end{cases}$

4.29.4. [МГУ, эк. ф-т] $\begin{cases} 3x + 4\sin y = -11, \\ -2x + 5\sin y = \frac{7}{2}. \end{cases}$

4.29.5. [МИЭМ] $\begin{cases} \cos x \sin 2y = \frac{3}{4}, \\ \sin x \cos 2y = \frac{1}{4}. \end{cases}$

4.29.6. [МИРЭА] $\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}75; \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$

4.29.7. [НижГУ] $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ \cos 2x + 2\cos y = 1. \end{cases}$

4.29.8. [СГУ] $\begin{cases} \cos 2y\sqrt{\sin x} = 0, \\ \cos 2y + 4\sin^2 x - 3 = 0. \end{cases}$

4.29.9. [СГУ] $\begin{cases} \log_3 \sin x + 1 = \log_3 y, \\ 9(1 + \cos x) = 2y^2. \end{cases}$

4.29.10. [МФТИ] $\begin{cases} \cos 2x - 2\,\mathrm{tg}^4\, y = -4, \\ \sin x + \dfrac{1}{\cos^2 y} = 3. \end{cases}$

4.29.11. [МФТИ] $\begin{cases} 2\,\mathrm{tg}^4\, 2x + 6\cos^2 y = 5, \\ \dfrac{2}{\cos^2 2x} + 4\sin y = 1. \end{cases}$

4.29.12. [МИФИ] $\begin{cases} \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x. \end{cases}$

Группа В

30. Разные задачи

Решить уравнения:

4.30.1. [ГАНГ] $(4 - \cos 2x)(2 + 3\sin y) = 12 + 13\cos^{-2} 3z.$

4.30.2. [МТУСИ] $x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0.$

4.30.3. [МЭСИ] $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = \sin 3x + 5,\quad 0^\circ < x < 360^\circ.$

4.30.4. [МИЭМ] $5\sin 2x - 6\sin x \sin 3x + \sin x = 0,\quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}.$

4.30.5. [МТУСИ] $\left|\sin\frac{\pi x}{2} - 2\right|^{\log_2\left(2-\frac{x}{\pi}\right)} = (x^3 - 6x^2 + 5x + 1)^{\arccos\left(\frac{\pi}{x}\right)}.$

Найти по крайней мере один корень уравнения.

4.30.6. [МГУ, хим. ф-т] $\cos^4 x = \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x \cos 8x.$

4.30.7. [МГУ, хим. ф-т] $4\cos^4\frac{x}{4} = \cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{4}\cos 2x.$

4.30.8. [МГУ, псих. ф-т] $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin 3x = \cos 3x - \sqrt{2},$
$-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi.$

4.30.9. [СПбГУ] $\dfrac{\sin x - \sqrt{\sin x}}{\cos x - \sqrt{\cos x}} = 1.$

4.30.10. [МГУ, ВМиК] $2\sqrt{3}\sin 5x - \sqrt{3}\sin x = \cos 24x \cos x + 2\cos 5x - 6.$

4.30.11. [МТУСИ] $\arccos\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\pi}{2}(1 - x^4).$

4.30.12. [МТУСИ] $\arcsin\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi x}{2}.$

4.30.13. [МГУ, хим. ф-т] $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}.$

4.30.14. [МГУ, геолог. ф-т]
$$(\cos 2\pi z + \cos \pi y)^2 + \sqrt{128 - 2y^2 - 2yz} = (yz - 82)(4 + x^2 + 4x\sin \pi z).$$
Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие уравнению.

4.30.15. [МГУ, геолог. ф-т] $x^2 + 1 - 2x\sin(\pi y) + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} = (41 - yz)\big(\cos(2\pi y) + \cos(\pi z)\big)^2$. Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие уравнению.

4.30.16. [МГУ, эк. ф-т] $\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi x}{2}\right)}\sin(\pi x) - \cos(\pi x) = 2, \quad -3 \leqslant x \leqslant 2.$

4.30.17. [МГУ, мех.-мат.] $6\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \left|\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right| = 1.$

4.30.18. [СПбГУ] $\cos 3x = -\cos x \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right).$

4.30.19. [МПГУ] $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{17}{32}.$

4.30.20. [МГУ, ВМиК] $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{1 + 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

4.30.21. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2 - \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

4.30.22. [МУПОЧ «Дубна»] $2\sin 2x - \operatorname{tg} x \sin\dfrac{29\pi}{6} = \sin\dfrac{19\pi}{3}$. Найти все решения, удовлетворяющие неравенству $\dfrac{\pi^2}{x} > 4x$.

4.30.23. [ГАНГ] $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^3 x - 4 = 0.$

4.30.24. [МЭИ] $\sin^4 2x - \cos 2x + \operatorname{tg}^2\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 3 = \cos^3 x - 4\sin x.$

Найти все корни, принадлежащие области определения функции $y = \sqrt[4]{(\cos 0{,}9\pi - \cos 0{,}1\pi)\cos x}$.

4.30.25. [МФТИ] $\sin 2\pi x + \sin^2 4\pi x = \sin^2 6\pi x$. Найти все решения, удовлетворяющие неравенству $\log_{4x-36}(10 - x) < 1$.

4.30.26. [МЭИ] $(\sin x - 1)\big((\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x - 2\big) = 0$. Найти все корни, удовлетворяющие неравенству $\lg\big((x+2\pi)(-x-3\pi/2)+1\big) \geqslant 0$.

Решить системы:

4.30.27. [МГУ, хим. ф-т] $\begin{cases} x^2 + 2x\sin y + 1 = 0, \\ 8|x|y(x^2+y^2) + \pi^3 + 4\pi = 0. \end{cases}$

4.30.28. [МГУ, мех.-мат.]
$$\begin{cases} (\cos y + \sin x - 1)\left(\operatorname{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}^2\left(y + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 0, \\ (\sin x - \cos y)(2 - \sin 2y + \sin y) = 0. \end{cases}$$

4.30.29. [МФТИ] $\begin{cases} 17\cos 2x - 7 = 21\sin x\cos 2y, \\ \cos x = \sqrt{3\sin x}\cos y. \end{cases}$

4.30.30. [МИФИ] $\begin{cases} (a^2 - a)\sin\frac{x}{2} + 2\cos y = a + 5, \\ 3\sin\frac{x}{2} + \cos y = 4. \end{cases}$

4.30.31. [МАИ] $\begin{cases} 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 4 + 4x, \\ \sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) = 0. \end{cases}$

4.30.32. [НижГУ] $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ 4\sin x\sin y = 3. \end{cases}$

5. Показательные и логарифмические уравнения

Показательная функция

1. Показательная функция $y = a^x$ определена при любом $a > 0$. Область определения этой функции — множество всех действительных чисел ($x \in \mathbb{R}$).
2. Область значений функции $y = a^x$ — множество всех действительных положительных чисел, т. е.

$$a^x > 0 \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

3. При $a > 0$ функция $y = a^x$ (см. рис. 1) возрастает на всей числовой прямой, т. е.
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}.$$

При $0 < a < 1$ функция $y = a^x$ (см. рис. 2) убывает на всей числовой прямой, т. е.
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}.$$

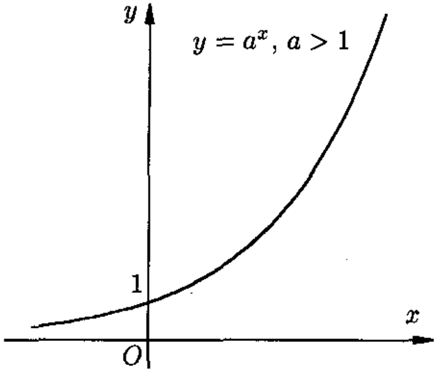


Рис. 1

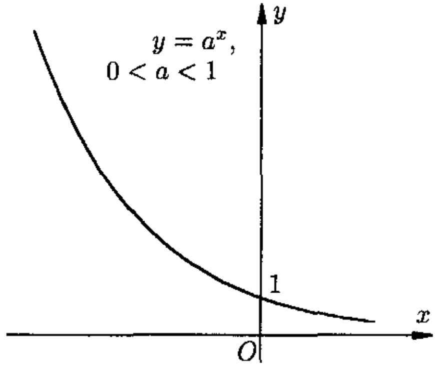


Рис. 2

При любых $a > 0$, $b > 0$ и при любых действительных x и y справедливы следующие равенства (свойства 4–8):

4. $a^1 = a, \quad a^0 = 1, \quad 1^x = 1.$
5. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad \dfrac{a^x}{b^x} = a^{x-y}.$
6. $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x.$
7. $(ab)^x = a^x b^x, \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
8. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}.$
9. Для любого $a > 0$ и любых натуральных чисел m и n справедливы равенства $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$

Показательные уравнения

1. Уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.
2. Уравнение $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$ при $h(x) > 0$, $h(x) \neq 1$, равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} h(x) = 1, \\ f(x) \text{ и } g(x) \text{ определены} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

Логарифмическая функция

1. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена при любом $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения этой функции — множество всех положительных действительных чисел ($x > 0$).
2. Область значений функции $y = \log_a x$ — множество всех действительных чисел.

3. При $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает (см. рис. 3), т. е.

$$0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2.$$

При $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ убывает (см. рис. 4), т. е.

$$0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2.$$

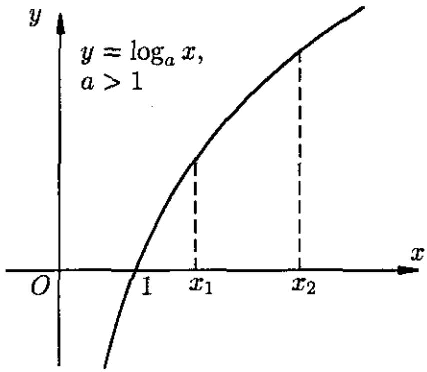


Рис. 3

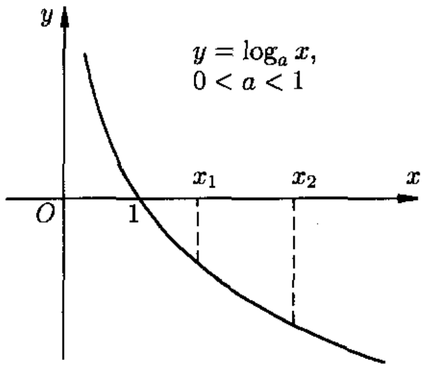


Рис. 4

При любых $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, $b \neq 1$ справедливы следующие равенства (свойства 4–9):

4. $x > 0 \Longrightarrow a^{\log_a x} = x$ (*основное логарифмическое тождество*).

5. $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

6. $x > 0$, $y > 0 \Longrightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (формула для логарифма произведения).

7. $x > 0$, $y > 0 \Longrightarrow \log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (формула для логарифма частного).

8. $x > 0 \quad \Longrightarrow \quad \log_{a^\beta} x^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a x$ для любых α и β.

В частности,

$$x > 0 \quad \Longrightarrow \quad \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad \text{для любого } \alpha$$

(формула для логарифма степени);

$$x > 0 \quad \Longrightarrow \quad \log_{a^\beta} x = \frac{1}{\beta} \log_a x \quad \text{для любого } \beta;$$

$$x > 0 \quad \Longrightarrow \quad \log_{a^\alpha} x^\alpha = \log_a x \quad \text{для любого } \alpha;$$

$$x > 0 \quad \Longrightarrow \quad \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x.$$

9. $x > 0 \implies \log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ (формула перехода к новому основанию). В частности, $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

10. $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$ для любых a, b, $c > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмические уравнения

1. Уравнение $\log_a f(x) = g(x)$ равносильно уравнению $f(x) = a^{g(x)}$. В частности, уравнение $\log_a f(x) = b$ равносильно уравнению $f(x) = a^b$.

2. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \implies f(x) = g(x)$, т.е. каждое решение первого уравнения является решением второго уравнения. Обратное, вообще говоря, неверно, поэтому, переходя от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$, необходимо в конце проверить корни последнего подстановкой в исходное уравнение. Вместо проверки корней можно заменить уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильной системой

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \left(\text{или, что то же самое, системой } \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}\right)$$

3. Если при решении логарифмического уравнения выражения

$$\log_a f(x)g(x), \ \log_a \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{и} \quad \log_a [f(x)]^n, \text{ где } n \text{ — четное число}$$

преобразовывается соответственно по формулам для логарифма произведения, частного и степени, то, так как во многих случаях при этом сужается ОДЗ исходного уравнения, возможна потеря некоторых его корней. Поэтому указанные формулы целесообразно применять в следующем обобщенном виде:

$$\log_a f(x)g(x) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|,$$
$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|,$$
$$\log_a [f(x)]^n = n \log_a |f(x)|, \quad n \text{ — четное число.}$$

Обратно, если при решении логарифмического уравнения выражения $\log_a f(x) + \log_a g(x)$, $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ и $n \log_a f(x)$ где n — четное число, преобразовываются соответственно в выражения $\log_a f(x)g(x)$, $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\log_a [f(x)]^n$, то ОДЗ исходного уравнения может расшириться, в силу чего возможно приобретение посторонних корней. Помня об этом, в подобных ситуациях необходимо следить за равносильностью преобразований и, если ОДЗ расширяется, делать проверку получаемых корней.

Показательные уравнения

Группа А

Решить уравнения:

1. Уравнения вида $\alpha \cdot a^x + \beta \cdot b^x = 0$

5.1.1. [МГАПБ] $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.

5.1.2. [МГАПБ] $5^{2x} - 7^x - 7 \cdot 5^{2x+1} + 5 \cdot 7^{x+1} = 0$.

5.1.3. [МЭСИ] $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

5.1.4. [МЭСИ] $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

5.1.5. [РЭА] $25^x + 7^{x+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{7} \cdot 7^x - 2 \cdot 5^{2x-1}$.

5.1.6. [РЭА] $7^{x+3} - 7^{x+2} - 2^{x+5} + 2 \cdot 0{,}25^{-(1+0{,}5x)} = 0$.

5.1.7. [РЭА] $3^{3x} + 9 \cdot 5^{2x} = 5^{2x} + 9 \cdot 3^{3x}$.

5.1.8. [МИСиС] $3^{3x} + 9 \cdot 2^{2x} = 4^x + 3^{2+3x}$. Корень или сумма корней, если их несколько[1].

5.1.9. [МТУСИ; МГАПБ] $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$. Произведение корней.

2. Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

5.2.1. [МГУЛ] $8^{\frac{2x-2}{x}} = \sqrt{4^{x-1}}$. Больший корень.

5.2.2. [ВОКУ] $\left(\frac{5}{6}\right)^{1-2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{2+x}$.

5.2.3. [МЭСИ] $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

5.2.4. [МГУ, эк. ф-т] $5^{x+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$.

5.2.5. [МГТУ] $2^{x(x+2)-\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} \cdot 4^x$.

5.2.6. [МГУ, физ. ф-т] $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} = 8^x$.

5.2.7. [РЭА] $25^{3-2x} = \frac{1}{125} \cdot (25\sqrt{5})^{-x}$.

---

[1] Это условие означает, что в ответе должно быть указано одно число – корень (если он один) или сумма корней (если их несколько). То же относится и к другим подобным примерам.

5.2.8. [КПИ] $\quad 1000\cdot(0{,}1)^2=100^x.$

5.2.9. [МТУСИ] $\quad 0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\dfrac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}.$

5.2.10. [РЭА] $\quad 9^{-4x}\cdot 3^{-6}=9^{\frac{3}{2}}\cdot(9\sqrt{3})^{-2x}.$

5.2.11. [МЭСИ; МГСоцУ] $\quad \left(\dfrac{4}{9}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1}=\dfrac{\lg 4}{\lg 8}.$

5.2.12. [МГУП] $\quad (\sqrt[4]{2})^{4x+5}=\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{\frac{2x}{3}}.$

5.2.13. [ЛГПИ] $\quad 6^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8}.$

5.2.14. [МИЭТ] $\quad 12^{x-2}=3^{3x}\cdot 2^{6x}.$

5.2.15. [МГАПБ] $\quad 4^x\cdot 5^{x+1}=5\cdot 20^{2-x}.$

5.2.16. [МГАПБ] $\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{9}{8}\right)^{x}=\dfrac{27}{64}.$

5.2.17. [ГАУ] $\quad \left((\sqrt[5]{27})^{\frac{x}{4}-\frac{\sqrt{x}}{3}}\right)^{\frac{x}{4}+\frac{\sqrt{x}}{3}}=\sqrt[4]{3^7}.$

5.2.18. [МЭСИ] $\quad 2\cdot\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{2^{-1}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}-\sqrt[\sqrt{x}-1]{4^2}=0.$

5.2.19. [РЭА] $\quad 2^{x^2-x-1}=0{,}5\cdot 8^{2x-4}.\ \log_{1,1}\left(\log_{1,3}\dfrac{2x-1}{x+1}\right)>0.$ [1]

3. Уравнения вида $\alpha\cdot a^{x+b}+\beta\cdot a^{x+c}+\gamma\cdot a^{x+d}=\delta$

5.3.1. [МГАПБ] $\quad 2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9.$

5.3.2. [МТУСИ] $\quad 2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448.$

5.3.3. [МЭСИ] $\quad 33\cdot 2^{x-1}-2^{x+1}=29.$

5.3.4. [МГУ, ф-т почвовед.] $\quad 2-3^{x-2}=3^{x-1}.$

5.3.5. [МГУ, ИСАА] $\quad 2^{x+5}+2^3\cdot 2^{x-1}-2^2=0.$

5.3.6. [ВАХЗ] $\quad 3^{x+1}+3^x=108.$

5.3.7. [МГАПБ] $\quad 7^{x+2}-\left(\dfrac{1}{7}\right)\cdot 7^{x+1}-14\cdot 7^{x-1}+2\cdot 7^x=48.$

---

[1] Данное условие означает, что требуется найти все решения уравнения, удовлетворяющие неравенству $\log_{1,1}\left(\log_{1,3}\dfrac{2x-1}{x+1}\right)>0$, и указать их в ответе. То же относится и к другим подобным примерам.

5.3.8. [МТУСИ] $4^{x-1}+11\cdot 4^{x-2}=15\cdot 2^{-4}$.

5.3.9. [МГУЛ] $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}=12$.

5.3.10. [РГАЗУ] $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}-4\cdot 3^{x-2}=17$.

5.3.11. [МГУГиК] $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}=315$.

5.3.12. [ГАНГ] $3^x+\dfrac{240}{3^x}=\dfrac{9^{x+2}}{3^x}$.

5.3.13. [МГСУ] $3^{x-1}\cdot 2^{x+1}+2^{x-1}\cdot 3^x=\dfrac{7}{36}$.

5.3.14. [МГСУ] $2^{2x+3}\cdot 3^x+2\cdot 4^x\cdot 3^{x+2}=\dfrac{13}{72}$.

5.3.15. [МГАПБ] $3^{2x-3}-9^{x-1}+27^{2x/3}=675$.

5.3.16. [МЭСИ] $5^{\lg x}=50-\left(10^{\lg 5}\right)^{\lg x}$.

5.3.17. [АГА] $2^{2x-1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2-2x}+4^{x+1}=\sqrt{\dfrac{1}{4^{3-2x}}}+74$.

4. Уравнения вида $\alpha\cdot a^{2x}+\beta\cdot a^x+\gamma=0$

5.4.1. [МВВДИУ] $2^{2x+1}+2^{x+2}-16=0$.

5.4.2. [РЭА] $4^x-5\cdot 2^{x-\frac{1}{2}}+2=0$.

5.4.3. [ГАУ] $4^x-10\cdot 2^{x-1}-24=0$.

5.4.4. [МГУ, хим. ф-т] $4^x-3\cdot 2^{x+2}=64$.

5.4.5. [РЭА] $9^x-8\cdot 3^{x+1}-81=0$.

5.4.6. [МТУСИ] $9^x-75\cdot 3^{x-1}-54=0$.

5.4.7. [РГАЗУ] $4+2^x=2^{2x-1}$.

5.4.8. [МГУП] $3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}=0{,}2$.

5.4.9. [МТУСИ] $4^{x-1}-3\cdot 2^{x-2}=1$.

5.4.10. [МГУ, ф-т почвовед.] $25^x+24\cdot 5^{x-1}-1=0$.

5.4.11. [МИКХС] $2\cdot 7^{3x}-5\cdot 49^{3x}+3=0$.

5.4.12. [МГУЛ] $4^{-x}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}=8$.

5.4.13. [РЭА] $25^{\frac{1}{x}}+1=6\cdot 5^{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$. Меньший корень.

5.4.14. [МГТУ] $16^{\frac{1}{x}}-20\cdot 2^{\frac{2}{x}-2}+4=0$.

5.4.15. [МГТУ] $4^{\frac{1}{x}+x} - 5\cdot 2^{\frac{1}{x}+x} + 4 = 0.$

5.4.16. [ГАУ; МГТУ] $2\cdot 4^{\sqrt{x}} - 5\cdot 2^{\sqrt{x}} + 2 = 0.$

5.4.17. [МАТИ] $2^{x+1} - 11 + \dfrac{15}{2^x+1} = 0.$

5. Уравнения вида $\alpha\cdot a^{x+b} + \beta\cdot a^{-x+c} = \gamma$

5.5.1. [МЭСИ] $3^x + 3^{3-x} - 12 = 0.$ Меньший корень.

5.5.2. [МЭСИ] $5^x + 5^{2-x} = 26.$ Сумма корней.

5.5.3. [МТУСИ] $4\cdot 5^x - 5^{-x} + \lg 100 = 5.$

5.5.4. [МГАПБ] $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15.$

5.5.5. [МГАПБ] $2^{2-x} = \dfrac{4^{x/2}-1}{3}.$

5.5.6. [МГУ, геогр. ф-т] $7^x - 14\cdot 7^{-x} = 3^{\log_3 2} + 3.$

5.5.7. [МГУ, физ. ф-т] $5^{x-1} + 5\cdot(0{,}2)^{x-2} = 26.$

5.5.8. [ЛГПИ; МГАП] $\dfrac{2^x+10}{4} = \dfrac{9}{2^{x-2}}.$

5.5.9. [МГАПБ] $\dfrac{2^{x+1}-10}{6} = \dfrac{4}{2^{x-1}}.$

5.5.10. [МГАПБ] $\dfrac{33-2^{x+2}}{4} = 2^{1-x}.$ Меньший корень.

5.5.11. [МГТУ] $2^{x^2+1} + 2^{4-x^2} = 33.$

5.5.12. [МТУСИ] $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1.$

5.5.13. [МГУ, физ. ф-т] $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20.$

5.5.14. [МГТУ] $\dfrac{2^x}{5^{x-1}} + 3 = \dfrac{5^x}{2^{x-1}}.$

6. Прочие

5.6.1. [МГУ, ИСАА] $2^{x\cdot\log_2 7}\cdot 7^{x^2+x} = 1.$

5.6.2. [МГУ, ИСАА] $3^{x\cdot\log_3 5}\cdot 5^{x^2-3x} = 1.$

5.6.3. [МТУСИ] $\sqrt{3^{\frac{1}{x}} + 7} = 4.$

5.6.4. [МГАП] $9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54\cdot 27^{x-1}.$

5.6.5. [ЛГПИ] $x^2\cdot 2^x + 2^x = x\cdot 2^{x+1{,}5}.$

5.6.6. [ЛГПИ] $\sqrt[x]{3}\cdot\sqrt[x]{5} = 225.$

5.6.7. [МГАУ] $2^{x-1} - 2^{x-2} = 6 \cdot 3^{2-x}$.

5.6.8. [УПИ] $\frac{1}{3} \cdot \sqrt[x]{9} = \dfrac{3^{x-5}}{\left(\frac{1}{27}\right)^{x-1}}$.

7. Системы уравнений

5.7.1. [ГАУ] $\begin{cases} \log_5(x+y) = 1, \\ 2^x + 2^y = 12. \end{cases}$

5.7.2. [ГАУ] $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ 2^{\frac{x+y}{2}} = 1024. \end{cases}$

5.7.3. [МГУ, мех.-мат.] $\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$

5.7.4. [МГУ, ф-т почвовед.] $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35. \end{cases}$

5.7.5. [МГУ, ВМиК] $\begin{cases} 3 \cdot 7^x - 3^y = 12, \\ 7^x \cdot 3^y = 15. \end{cases}$

5.7.6. [МТУСИ] $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = \frac{4}{9}, \\ x + y = 4. \end{cases}$

5.7.7. [МЭИ] $\begin{cases} \dfrac{2 \cdot 4^x + 1}{2^x + 2} - 4^x = \dfrac{y}{2^{x+1} + 4}, \\ 4 \cdot 2^{3x} + y^2 = 4. \end{cases}$

Группа Б

8. Однородные уравнения 2-го порядка

5.8.1. [МГАП; ЛГПИ; ВА им. Дзержинского] $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$.

5.8.2. [МГАХМ] $25 \cdot 9^x - 34 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x = 0$. Меньший корень.

5.8.3. [МГУ, ф-т почвовед.] $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$.

5.8.4. [МИСиС] $4 \cdot 9^{2x} - 3 \cdot 4^{2x} - 4 \cdot 36^x = 0$. Корень или сумма корней.

5.8.5. [МГАП] $4^x + 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 9^x = 0$.

5.8.6. [КПИ] $2^{2x+1} + 3^{2x+1} = 5 \cdot 6^x$.

5.8.7. [МГТУ] $8 \cdot 9^x + 6^{x+1} = 27 \cdot 4^x$.

5.8.8. [МТУСИ] $36^x = 2 \cdot 12^x + 3 \cdot 4^x$.

5.8.9. [МГАПБ] $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

5.8.10. [МГАПБ] $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$. Больший корень.

5.8.11. [МТУСИ] $1{,}5 \cdot 4^{x+0{,}5} = 6^x + 2 \cdot 9^{x-0{,}5}$.

5.8.12. [МГАПБ] $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$. Меньший корень.

5.8.13. [МГТУ] $81^{|x|} + 16^{|x|} = \dfrac{13}{6} \cdot 36^{|x|}$.

5.8.14. [МГАП] $2 \cdot 16^{\cos x} - 20^{\cos x} = 3 \cdot 25^{\cos x}$.

5.8.15. [МЭСИ] $4^{1+\lg x} - 6^{\lg x} - 2 \cdot 3^{2+\lg x^2} = 0$.

5.8.16. [МЭСИ] $\left(2 \cdot 3^x + 5^x\right) \cdot \left(3^{x+1} + 2 \cdot 5^x\right) = 15^{x+1}$. Меньший корень.

9. Уравнения с модулями

5.9.1. [МГУЛ] $5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}$.

5.9.2. [ЛГПИ] $25^{|1-2x|} = 5^{4-6x}$.

5.9.3. [МГУ, эк. ф-т] $2^{|x+1|} = (\sqrt{2})^{-2x+3}$.

5.9.4. [МГУЛ] $3^{|x-2|} = 9^{2x-1}$.

5.9.5. [НГПУ] $5^{|2-4x|} = 5^{|4-6x|}$. Найти корни из а–д: а) 1; б) $\frac{5}{3}$; в) 0,6; г) $\{1; 0{,}6\}$; д) нет ответа.

5.9.6. [ОИАЭ] $2^{|3x-5|} = 4 \cdot 8^{|x-1|}$.

5.9.7. [МГАВТ] $7^{|x+6|} - 7^{|x^2+4x-12|} = \log_{11} \operatorname{ctg}(225^\circ)$.

10. Уравнения, решаемые с помощью разложения на множители

5.10.1. [МГАП] $2 \cdot 12^x - 3^{x+1} + 4^{x+1} - 6 = 0$.

5.10.2. [МГАП] $2 \cdot 15^x - 3^{x+2} - 4 \cdot 5^{x+1} + 90 = 0$.

5.10.3. [МГУЛ] $x^2 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 4^{2-x} = 4^{\sqrt{2-x}+2} + x^2 \cdot 2^{-2x}$. Сумма корней.

5.10.4. [МТУСИ] $x^2 \cdot 6^{-x} + 6^{\sqrt{x}+2} = x^2 \cdot 6^{\sqrt{x}} + 6^{2-x}$. Сумма и произведение корней.

5.10.5. [МТУСИ] $2x^2 \cdot 2^{\sqrt{x+2}} + x \cdot 2^{x+1} = 2x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{\sqrt{x+2}+1}$. Сумма и произведение корней.

5.10.6. [РЭА] $x^2 \cdot 5^y + 5^{x+2} = 25 \cdot 5^y + x^2 \cdot 5^x$ при $y = \sqrt{5x-4}$. Наибольший корень.

5.10.7. [РЭА] $3^{y+2} + x^2 \cdot 3^{x+3} = 3^{x+5} + x^2 \cdot 3^y$ при $y = \sqrt{x+5}$. Меньший корень.

5.10.8. [МАДИ] $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{y+4} = 2^{x+5} + x^2 \cdot 2^y$, где $y = \sqrt{x+3}$. Сумма и произведение корней.

5.10.9. [МАДИ] $x^2 \cdot 2^{3-x} + 16 \cdot 2^y = 2^{7-x} + x^2 \cdot 2^y$, где $y = \sqrt{x-1}$. Число корней и наибольший из них.

11. Смешанные уравнения

5.11.1. [МГУ, физ. ф-т] $4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18$.

5.11.2. [МГУ, псих. ф-т] $(\sqrt{3})^{\operatorname{tg} 2x} - \dfrac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg} 2x}} = 0$.

5.11.3. [ЯГУ] $2^{\cos^2 x} - 8^{\sin^2 x} = 0$.

5.11.4. [КФЭИ] $25^{1-\cos 6x} = 5^{\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}}$.

5.11.5. [МГУ, эк. ф-т] $\cos(3\pi \cdot 5^x) - \cos(\pi \cdot 5^x) = \sin(\pi \cdot 5^x)$.

12. Уравнения вида $(a + b^{1/2})^x + (a - b^{1/2})^x = c$

5.12.1. [МЭСИ; ЛГПИ] $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$. Наибольший корень.

5.12.2. [МЭСИ] $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$. Наибольший корень.

5.12.3. [МИЭТ] $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x = 6$.

13. Прочие

5.13.1. [МГАПБ] $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$.

5.13.2. [МГАПБ] $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$.

5.13.3. [МГУ, псих. ф-т] $32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}$.

5.13.4. [СПбГТУ] $8^{4(x^3+8)} - 16^{7(x^2+2x)} = 0$.

5.13.5. [МГУ, ф-т почвовед.] $\dfrac{4^x - 2^{x+2} + 3}{2^{x/2} - 1} + 2^{\frac{x}{2}} + 1 = 0$.

5.13.6. [МГУ, ф-т почвовед.] $\dfrac{9^x - 82 \cdot 3^x + 162 - 3^{\frac{x}{2}+2}}{3^{x/2} - 9} = -9$.

5.13.7. [МИИТ] $2^{\sqrt{x+5}} = 4 \cdot 2^{\sqrt{x-3}}$.

5.13.8. [МТУСИ] $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$.

5.13.9. [МГСоцУ] $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \sqrt[x]{\frac{256}{81}} = \left(\frac{16}{9}\right)^{-1}$.

5.13.10. [МГСоцУ] $\sqrt[x]{81} - \sqrt[x]{9^{x+1}} + 18 = 0$.

5.13.11. [МГУ, псих. ф-т] $3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}$.

5.13.12. [МГУ, биолог. ф-т] $9^{\sqrt{x}+0,5} - 39 \cdot 3^{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}} + 12 = 0$.

5.13.13. [МГУП] $2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x$.

5.13.14. [МГТУ] $(p-1) \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + (p+2) = 0$. Найти все значения p, при которых уравнение имеет хотя бы одно решение.

5.13.15. [ГАУ] $a \cdot 12^{|x|} = 2 - 12^{-|x|}$. При каких значениях a уравнение имеет решение? Найти решение.

14. Системы уравнений

5.14.1. [НГУ] $\begin{cases} 7^{2x} + 4^{2y+1} = 85, \\ 7^x - 4^y = 5. \end{cases}$

5.14.2. [МИИ] $\begin{cases} 2^{x+1} = y^2 + 4, \\ 2^{x-1} \leqslant y. \end{cases}$

5.14.3. [МТУСИ] $\begin{cases} 9^x - 3^{x+y\cdot\log_3 2} + 4^y = 7, \\ 3^x + 2^y = 5. \end{cases}$

Группа В

15. Разные задачи

5.15.1. [ГАУ] $2^{x^2-4x+5} = 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4}$.

5.15.2. [ГАУ] $3^x + 3^{2-x} = 3 \cdot (1 + \cos 2\pi x)$.

5.15.3. [ГАУ] $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} = 4 - \left|\sin \frac{\pi}{4}(x-1)\right|$.

5.15.4. [ГАУ] $2^x + 2^{-x} = 2\cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

5.15.5. [МГУ, хим. ф-т] $2^{x+1}+2^{1-x}=1-4x-x^2$. Число решений, ответ обосновать.

5.15.6. [МЭСИ] $8^{x+1}+8\cdot(0{,}5)^{3x}+3\cdot 2^{x+3}=125-24\cdot(0{,}5)^x$. Больший корень.

5.15.7. [МЭСИ] $5^{3x}+5^{3(1-x)}+15\left(5^x+5^{1-x}\right)=216$.

5.15.8. [МГСоцУ] $2^{3x}-8\cdot 2^{-3x}-6\left(2^x-\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)=1$.

5.15.9. [МГАП] $16^{x^2-\frac{x}{2}}-15\cdot 4^{x^2}-4^{2+x}=0$.

5.15.10. [МГАП] $4^{x^2-x}-10\cdot 2^{x^2}+2^{2x+4}=0$.

5.15.11. [МГАП] $8\cdot 4^{-x+\frac{1}{x}}-4^x+2\cdot 4^{\frac{1}{x}+1}-1=0$.

5.15.12. [РЗИТЛП] $(x-3)^{3x^2-10x+3}=1$.

5.15.13. [МЭСИ] $7^{x+3}\cdot 3^{\frac{x+3}{x+2}}=1$. Наименьший корень.

5.15.14. [МИЭМ] $\left(x-\lg\dfrac{x}{2}\right)^{\lg^2 2x-\lg\frac{x}{5}-1}=1$.

5.15.15. [МТУСИ] $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1$.

5.15.16. [МТУСИ] $|x-2|^{10x^2-3x-1}=1$.

5.15.17. [МТУСИ] $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}}=\sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}$.

В задачах 5.15.18–5.15.20 найти все значения параметра a, при каждом из которых система имеет единственное решение:

5.15.18. [МГУ, эк. ф-т] $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

5.15.19. [МГУ, эк. ф-т] $\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+3|x|-2=5y+3x^2-5a, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

5.15.20. [МГУ, эк. ф-т] $\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x-5=a-2y+y^2 \\ x^2+(2-a-a^2)y^2=0, \\ 0\leqslant y\leqslant 2. \end{cases}$

Логарифмы, логарифмические уравнения

Группа А

16. Задачи на вычисление

Вычислить:

5.16.1. [РЭА] $(0{,}2)^{\frac{1}{2}\log_5 4-\log_{25}16}$.

5.16.2. [ГАНГ] $\log_3 10\cdot\lg 27$.

5.16.3. [МИСиС] $\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

5.16.4. [МГАПБ] $\log_2\log_4\log_8 64$.

5.16.5. [МТУСИ] $(0{,}025)^{\lg 2}\cdot(0{,}04)^{\lg 2}$.

5.16.6. [РЭА] $81^{0{,}5\log_9 7}$.

5.16.7. [МАДИ] $4^{0{,}5\log_4 9-0{,}25\log_2 25}$.

5.16.8. [РЭА] $36^{\left(\frac{1}{3}\log_6 8+2\log_6 3\right)}$.

5.16.9. [МГУЛ] $2^{6\log_{2\sqrt{2}}(5-\sqrt{10})+8\log_{1/4}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$.

5.16.10. [МТУСИ] $20^{\frac{1}{2\log_{81}5}}\cdot(0{,}25)^{\frac{1}{2\log_{81}5}}$.

5.16.11. [МГАХМ] $\log_6 4+\log_6 9+\log_4 6\cdot\log_{\sqrt{6}}2+5^{\log_5 2}$.

5.16.12. [ЛГПИ] $\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7$.

5.16.13. [РЭА] $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

5.16.14. [МГАПБ] $\log^2_{\sqrt[5]{5}}\sqrt{5}-\log_{\sqrt[3]{5}}5\sqrt{5}+\log_{\sqrt{3}+1}(4+2\sqrt{3})$.

5.16.15. [МЭСИ] $\left(\sqrt[7]{\dfrac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3}+\frac{6}{5}\log_3 5}\cdot 5^{\frac{3}{5}}$.

5.16.16. [МЭСИ] $4\sqrt{3}+5^{\log_5\frac{3}{5}}-15^{\frac{1}{2}+\log_{15}\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)}$.

5.16.17. [МГАПБ] $72\cdot\left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9-\log_7 6}+5^{-\log_{\sqrt{5}}4}\right)$.

5.16.18. [МГУ, ВМиК] $\log_b(a^2b)$, если $\log_a b=7$.

5.16.19. [РЭА] $A=5^b+6^c$, если $b=\dfrac{3}{\log_2 5}$, $c=(\log_5 6)^{-1}$.

5.16.20. [РЭА] $A=10^b+6^c$, если $b=\left(\dfrac{1}{2}\log_2 100\right)^{-1}$, $c=(\log_7 6)^{-1}$.

5.16.21. [МАДИ] $a=3^b$, если $b=\log_c 0{,}25+3\log_u 4$, $u=27$, $c=\dfrac{1}{9}$.

17. Задачи на сравнение двух чисел

Что больше

5.17.1. [МГУ, геолог. ф-т] $2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$ или $3 \cdot \log_8 26$?

5.17.2. [МГУ, геолог. ф-т] $2 \cdot \log_3 4$ или $3 \cdot \log_{27} 17$?

5.17.3. [МГУ, биолог. ф-т] $\sqrt{11}$ или $9^{\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_8 2}$?

5.17.4. [МГУ, геолог. ф-т] $2^{\log_3 5} - 0{,}1$ или $5^{\log_3 2}$?

5.17.5. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{8}$ или $2^{2\log_2 5+\log_{1/2} 9}$?

5.17.6. [МГУ, биолог. ф-т] $\sqrt{15}$ или $8^{\frac{1}{3}\log_2\left(1-\frac{1}{32}\right)+2\log_{27} 3}$?

18. Простейшие логарифмические уравнения

Решить уравнения:

5.18.1. [КПИ] $\log_{2x+3} \frac{1}{4} + 2 = 0.$

5.18.2. [КПИ] $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) = \log_2 \frac{1}{16}.$

5.18.3. [МГУЛ] $\log_3 \frac{x-2}{x+3} = 1.$

5.18.4. [МГУ, физ. ф-т] $2\log_2 x^3 - 1 = \frac{1}{2}\log_2 x.$

5.18.5. [МТУСИ] $25^{\frac{\log_3 \log_3 25}{\log_3 25}} = 2\log_3 x.$

5.18.6. [МГУ, филолог. ф-т] $\log_{2x+2}(2x^2 - 8x + 6) = 2.$

5.18.7. [ОмПУ] $\log_{\frac{1}{2}}(5 - \log_3 x) = -2.$

19. Уравнения, сводящиеся к квадратным

5.19.1. [МЭСИ] $(\lg x)^2 - 3\lg x + 2 = 0.$ Больший корень.

5.19.2. [МГУ, геолог. ф-т] $(2 - \log_6 x)\log_6 x = \frac{3}{4}.$

5.19.3. [МГУЛ] $\lg^2 x = \lg 10x.$ Произведение корней.

5.19.4. [МГУГиК] $\frac{\lg^2 10x}{5 - \lg x} = 1.$

5.19.5. [МГАУ] $\lg^2 x + \lg \frac{2}{x} + \lg \frac{5}{x} = 4.$

5.19.6. [МГУП] $\lg^2 x + \lg x^2 = 3.$

5.19.7. [МТУСИ] $\lg^2 x^2 - 3\lg x - 1 = 0.$

5.19.8. [МГУ, хим. ф-т] $(\log_2 x)^2 + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0.$

5.19.9. [МГУК; МГУ, физ. ф-т] $\log^2_{0,5} 4x + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) = 8.$

5.19.10. [МПГУ] $\dfrac{1}{5 - \log_{1/3} x} + \dfrac{2}{1 + \log_{1/3} x} = 1.$

5.19.11. [МАДИ] $0{,}5\lg x \cdot \lg 0{,}001x = \lg 0{,}1.$

5.19.12. [МИРЭА] $(\log_x \sqrt{5})^2 - \log_x(5\sqrt{5}) + 1{,}25 = 0.$

5.19.13. [КГТУ] $\dfrac{\log^2_3 x}{\log_3\left(\dfrac{x}{27}\right)} - \dfrac{6 - \log_3 x^5}{3 - \log_3 x} = 0.$

20. Уравнения вида $\log_a \log_b f(x) = c$

5.20.1. [МГАТХТ] $\log_2(\log_5 x) = 1.$

5.20.2. [МЭСИ] $\log_5(\log_2 x) = 1.$

5.20.3. [МТУСИ] $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \log_9 x = 0.$

5.20.4. [КПИ] $\log_4 \log_3 \log_2(x^2 - 1) = 0.$

21. Уравнения на применение формулы $\log_a b = (\log_b a)^{-1}$

5.21.1. [РХТУ] $\log_5 x - \log_x 5 = \frac{3}{2}.$

5.21.2. [МГАПБ] $3\log_8(x+1) = 8 + 3\log_{x+1} 8.$ Больший корень.

5.21.3. [МГУЛ] $5\log_4 x + 3\log_x 4 = 8.$ Целые корни.

5.21.4. [ВГАВТ] $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0.$

5.21.5. [МТУСИ] $\log_3 x + \log_x 9 = 3.$

5.21.6. [МИСиС] $\log_7 x = 5 - \log_{\sqrt[3]{x}} 49.$ Корень или сумма корней (если их несколько).

5.21.7. [ГАУ] $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_4 2.$

5.21.8. [МТУСИ] $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 = 1.$

5.21.9. [МПГУ] $\log_x 2 + \log_{4x} 4 = 1.$

5.21.10. [МГУ, эк. ф-т] $\log_2(x+4) = \log_{4x+16} 8.$

22. Уравнения на формулы для логарифмов произведения, частного и степени

5.22.1. [ГУЗ] $\log_3 x - \log_3(x+8) = -\log_3(x+3)$.

5.22.2. [РЭА] $3 + 2\log_2(x-7) = \log_2(2x+1)$.

5.22.3. [МГУ, хим. ф-т] $\log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 1$.

5.22.4. [МЭСИ] $\lg(x-4) + \lg(x-6) = \lg 8$.

5.22.5. [МАТИ] $\lg(x-1) + \lg(x+1) = 3\lg 2 + \lg(x-2)$.

5.22.6. [МАТИ] $\log_2(x-2) + \log_2(x+1) = 2$.

5.22.7. [ГАУ] $\log_2(x+1) = 1 + 2\log_2 x$.

5.22.8. [ГАУ] $2\log_4(4-x) = 4 - \log_2(-2-x)$.

5.22.9. [РЭА] $3 + 2\log_2\left(\frac{x}{2} - 6\right) = \log_2(x+3)$.

5.22.10. [МПГУ] $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$.

5.22.11. [МГАПБ] $2\lg\left(x + \frac{1}{2}\right) - \lg(x-1) = \lg\left(x + \frac{5}{2}\right) + \lg 2$.

5.22.12. [МГАПБ] $\lg\left(x + \frac{4}{3}\right) - \lg\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\lg(x+6) - \frac{1}{2}\lg x$.

5.22.13. [МГУ, хим. ф-т] $\log_5(x+1) + \log_5(x+5) = 1$.

5.22.14. [МИРЭА] $\log_5(3x-11) + \log_5(x-27) = 3 + \log_5 8$.

5.22.15. [МИСиС] $\lg(0{,}5 + x) = \lg 0{,}5 - \lg x$.

5.22.16. [РГОТУПС] $\log_3(x^2+1) = \log_3 2 + \log_3(x+8)$.

5.22.17. [МГУ, биолог. ф-т] $\log_9(2x^2 + 9x + 5) + \log_{\frac{1}{3}}(x+3) = 0$.

5.22.18. [МГУ, биолог. ф-т] $\log_{49}(2x^2 + x - 5) + \log_{\frac{1}{7}}(1+x) = 0$.

5.22.19. [МГУЛ] $\log_2 \dfrac{x-2}{x-1} - 1 = \log_2 \dfrac{3x-7}{3x-1}$.

5.22.20. [МИЭМ] $\log_4(x^2 - 4x + 2) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -\frac{1}{2}$.

5.22.21. [МИЭМ] $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x - 1) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x - 2) = -1$.

5.22.22. [МГТУ] $\dfrac{1 + \log_2(3x+5)}{1 + \log_2(x+2)} = 2$.

5.22.23. [НГПУ] $\log_6(x-9)^2 - 2 = 2\log_6(x-2)$. Указать корни из чисел а–д: а) 0,6; б) 3; в) $\{0{,}6; 3\}$; г) $\frac{5}{3}$; д) нет решений.

5.22.24. [МГУ, физ. ф-т] $\frac{1}{6}\log_2(x-2)-\frac{1}{3}=\log_{\frac{1}{8}}\sqrt{3x-5}$.

5.22.25. [МГУ, биолог. ф-т] $\log_5\left(\frac{x-9}{x-5}\right)+\log_5(x^2-17x+60)=1+\log_5 2$.

5.22.26. [СПбГТУ] $2\log_{9\omega^{-2}}\left(\frac{1}{3}\right)-3\log_{9\omega}3+\frac{16}{5}=0$.

23. Смешанные уравнения

5.23.1. [МВМИ] $\log_2(6-4^x)=x$.

5.23.2. [ММИ] $\log_{0,5}(2^x-1)=x-1$.

5.23.3. [НГПУ; ГАУ] $\log_2(9-2^x)=3-x$. Найти корни из а–д: а) 3; б) -1; в) 0; г) 0,25; д) нет решений.

5.23.4. [МГУ, хим. ф-т] $x+\log_2(2^x-31)=5$.

5.23.5. [МГТУ] $\log_3(3^x-2)=1-x$.

5.23.6. [МГТУ] $\lg 2+\lg\left(4^{-x^2}+9\right)=1+\lg\left(2^{-x^2}+1\right)$.

5.23.7. [РЭА] $\log_3(3^{2x}-3^x-63)=x$.

5.23.8. [МАТИ] $\log_2(2^{x+3}+16)=2x+\log_2 3$.

5.23.9. [РЭА] $\log_{\sqrt{7}}(3^{2x-2}-3^{x+1}+7^x)=2x$.

5.23.10. [МГГА] $\dfrac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=2\cdot 3^{\log_{1/3}2}$.

5.23.11. [КПИ] $\log_3\left(\log_9 x+\frac{1}{2}+9^x\right)=2x$.

5.23.12. [МГТУ] $1-x\log_6 2=\log_6(2^x+1)$.

5.23.13. [МЭСИ] $\log_2(4^x+1)=x+\log_2(2^{x+3}-6)$.

5.23.14. [МИСиС] $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$. Корень или сумма корней (если их несколько).

5.23.15. [МГСоцУ] $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\log_3(x^2-1)}=\sqrt{2(x-1)}$.

5.23.16. [МПГУ] $0{,}4^{\lg^2 x+1}=6{,}25^{2-\lg x^3}$.

5.23.17. [МГСоцУ] $9^{\log_{25}x^2}+\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(9^{\log_{25}x+1}-9^{\log_{25}x}\right)$.

5.23.18. [МПУ] $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$.

5.23.19. [МГАПИ] $1+\log_3(2^x-7)=\log_3(2^x-7)+\log_3(2^x-8)$.

5.23.20. [МГАПБ] $4^{\log_9 x}-6\cdot 2^{\log_9 x}+2^{\log_3 27}=0$. Больший корень.

24. Уравнения на применение формулы перехода к другому основанию

5.24.1. [МПГУ] $\log_2 x + \log_5 x = \log_5 10.$

5.24.2. [МГАПБ] $\log_2 x + \log_3 x = \log_2 x \cdot \log_3 x.$ Сумма корней.

5.24.3. [МАРХИ] $\log_2 x + \log_3 x = 1.$

5.24.4. [ГАУ] $\log_{3x} 3 = \log_x^2 3.$

5.24.5. [ОмПУ] $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2.$

25. Прочие

5.25.1. [МВВДИУ] $x \lg 10^{x+3} + \lg 100 = 0.$

5.25.2. [МГУ, ВМиК] $3x^2 + 5^{\log_5 x} = 16^{\log_4 \sqrt{30}}.$

5.25.3. [МГТУ] $2 \cdot 4^{\log_2 x} = 7x + 4.$

5.25.4. [МГУ, геолог. ф-т] $(x^2 - 18x + 77) \cdot (\log_{\frac{x}{2}} 8x + 3) = 0.$

5.25.5. [МГАЛП] $\log_{12}(x^2 + \log_2 256) = 1 + \log_{12}(x - 1).$

5.25.6. [МГАВТ] $\log_4^2 x + 3\log_4 x + \log_4 x^4 : \log_4 \frac{x}{16} = 0.$

5.25.7. [АГАУ] $\dfrac{3 - \log_5(x^3 + 12x + 62)}{1 - \log_5(x + 2)} = 3.$

5.25.8. [ГАУ] $\log_2 \log_3(x^2 - 16) - \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{x^2 - 16}\right) = 2.$

5.25.9. [МГТУ] $\lg \lg(x - 1) = \lg \lg(2x + 1) - \lg 2.$

5.25.10. [МАДИ] $\log_{\frac{1}{2}} x = -x^2 + 2x - 1.$ Найти графически число корней уравнения.

5.25.11. [МАРХИ] $3\sqrt{\lg x} + 2\lg\sqrt{\dfrac{1}{x}} = 2.$

26. Системы уравнений

Решить системы:

5.26.1. [СТАНКИН] $\begin{cases} \sqrt{y} + \lg x^2 = 2, \\ y + 4\lg x = 28. \end{cases}$

5.26.2. [МГСоцУ] $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$

5.26.3. [МГСоцУ] $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 1152, \\ \log_{\sqrt{5}}(y-x) = 2. \end{cases}$

5.26.4. [УГПУ] $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases}$

5.26.5. [ГАУ] $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ 2^{\frac{x+y}{2}} = 1024. \end{cases}$

5.26.6. [МТУСИ] $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 2 + 2\log_5 4, \\ \log_{81}(y-x) = 0{,}5. \end{cases}$

5.26.7. [МГУ, псих. ф-т] $\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y \cdot 2^y + 2^y \cdot \log_3 x = 4. \end{cases}$

Группа Б

27. Задачи на вычисление

Вычислить:

5.27.1. [МГУ, филолог. ф-т] $\dfrac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \dfrac{\log_3 216}{\log_8 3}$.

5.27.2. [МГУ, эк. ф-т] $\dfrac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \dfrac{\log_5 150}{\log_6 5}$.

5.27.3. [МЭСИ] $\log_{12} 18 \cdot \log_{24} 54 + 5(\log_{12} 18 - \log_{24} 54)$.

5.27.4. [МГГА] $\dfrac{1 - \log_5^3 3}{(\log_5 3 + \log_3 5 + 1)\log_5 \dfrac{5}{3}}$.

5.27.5. [МИСиС] $5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} - \log_3 \log_2 \sqrt[9]{\sqrt[3]{2}} + 7^{\lg 8} - 8^{\lg 7}$.

5.27.6. [РЭА] $\left(1{,}5^{\frac{2}{2\log_5 3 - \log_5 4}} + 11 \cdot 8^{\log_{27} 3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

5.27.7. [МИСиС] $\dfrac{\log_2^2 18 - 4\log_2^2 3 + 3\log_2 18 + 6\log_2 3}{\log_2 18 + 2\log_2 3}$.

Найти:

5.27.8. [МТУСИ] $\log_{175} 56$, если $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.

5.27.9. [МИЭТ] $\log_{30} 8$, если $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

5.27.10. [МГУ, мех.-мат.] $\log_{\sqrt[3]{xyz}} \left(\dfrac{yz}{x^3}\right)^2$, считая, что это число определено и $a = \log_y x$, $b = \log_z x$.

28. Уравнения, содержащие выражения вида $x^{\log_a x}$

Решить уравнения:

5.28.1. [МЭСИ] $x^{\lg x-1}=100$. Наименьший корень.

5.28.2. [МГАП] $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x}$.

5.28.3. [МГАП] $x^{0,1+\frac{1}{5}\lg x}=\sqrt{x}$.

5.28.4. [ГАУ] $x^{\lg x}=1000x^2$.

5.28.5. [МИСиС] $(\sqrt{x})^{\lg x}=\sqrt{100x}$. Корень или произведение корней (если их несколько).

5.28.6. [МПГУ] $(\sqrt{x})^{\log_x 7-1}=7$.

5.28.7. [МПГУ] $x^{2\lg^3 x-1,5\lg x}=\sqrt{10}$.

5.28.8. [МПГУ] $x^{\lg x-3}=0,01$.

5.28.9. [РЭА] $3x=x^{\log_3 x^2}$. Больший корень.

5.28.10. [РЭА] $\left(\frac{4}{x}\right)^{\sqrt{\log_2 x}}=x$. Меньший корень.

5.28.11. [ЛГПИ] $x^{2\lg x}-10x=0$.

5.28.12. [МЭСИ] $x^{5-\log_2 x-\log_x 2}=8$. Больший корень.

5.28.13. [РЭА] $(x+1)^{\log_2^3(x+1)}=2$. Меньший корень.

5.28.14. [ОмГУ; МГАП] $2x^{\lg x}+3x^{-\lg x}=5$.

5.28.15. [МИРЭА] $10^{(6\log_x 10)^2-13}\cdot x^{\lg x}=1$.

5.28.16. [МТУСИ] $x\cdot 2^{\log_x 5}=10$.

5.28.17. [МТУСИ] $x=20\cdot(0,75)^{\log_x 15}$.

29. Уравнения с модулями

5.29.1. [МГУ, геолог. ф-т] $|\log_5 3\cdot\log_3 x^4-5\log_x x^2|=2\log_x 25$.

5.29.2. [МГУ, геолог. ф-т] $|3\log_x x^4+7\log_7 2\cdot\log_2 x^2|=-\log_x 49$.

5.29.3. [МИРЭА] $\log_{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2}\frac{5x+1}{x-2}+\log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|=\frac{3}{2}$.

5.29.4. [УрГУ] $\left|2+\log_{\frac{1}{5}} x\right|+3=|1+\log_5 x|$.

5.29.5. [МУПОЧ «Дубна»] $\sqrt{\log_2|x|\cdot\log_2\left(\frac{64}{|x|}\right)-5}=\log_2\left(\frac{x^2}{64}\right)$.

30. Смешанные уравнения

5.30.1. [МГУ, геолог. ф-т] $3^{2(\log_5 x)^2}+1=4\cdot 3^{(\log_5 x)^2}$.

5.30.2. [МГУ, геолог. ф-т] $11^{2(\log_7 x)^2}-8\cdot 11^{(\log_7 x)^2}+6=0$.

5.30.3. [МГУ, биолог. ф-т] $\log_2(9^x+2\cdot 3^x-5)=1+2\log_4(3^{x+1}-4)$.

5.30.4. [ГАУ] $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$.

5.30.5. [МПГУ] $5^{\log_2 x}+x^{\log_2 5}=10$.

5.30.6. [МФТИ] $9\log_{\sin 2x}(4\cos^2 x)+8\log_{2\cos x}(\sin x)=16$.

31. Уравнения с радикалами

5.31.1. [МГУ, филос. ф-т] $\log_3(\sqrt{12+x}-2)=\frac{1}{2}\log_3(x+2)$.

5.31.2. [МАДИ] $\log_{2x+5}(2\sqrt{2x+5}-2x-3)=0{,}5$.

5.31.3. [МАДИ] $\log_{14-x}(4x-\sqrt{14-x})=0{,}5$.

5.31.4. [МПГУ] $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x=-1$.

5.31.5. [МГАПБ] $5\sqrt{\log_3 x}-\log_3 9x-4=0$. Меньший корень.

5.31.6. [МГУП] $\lg(3^{2\sqrt{x+5}-x}-4)=1-\lg 2$.

5.31.7. [МГУ, физ. ф-т] $\sqrt{\log_2 x}=2\log_2\sqrt{x}-1$.

32. Прочие

5.32.1. [МГУ, физ. ф-т] $3x\log_3 x+2=\log_{27}x^3+6x$.

5.32.2. [СПбГУ] $1+\log_{x-2}(4x-11)=2\log_{4x-11}(4x^2-19x+22)$.

5.32.3. [МТУСИ] $\log_{1+\sqrt{2}}(x^2+x+\sqrt{3})=\log_{\sqrt{2}-1}(4-x^2-x-\sqrt{3})$.

5.32.4. [МТУСИ] $\log_{2+\sqrt{5}}(x^2+x-1)=\log_{\sqrt{5}-2}(x+3)$.

5.32.5. [МГСоцУ] $\log_7 x+\log_{\frac{1}{x}}\frac{1}{7}=\log^2_{\frac{1}{7}}\frac{1}{x}+\log^2_x 7-\frac{7}{4}$. Больший корень.

5.32.6. [РЭА] $\log_3(x+8)+\frac{1}{2}\log_3 x^2=2$. Число корней.

5.32.7. [РЭА] $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$. Число корней.

5.32.8. [НГУ] $\log_{x+2}\log_2\log_{x+3}(11x^2+46x+48)=0$.

5.32.9. [МГСУ] $\log_{\frac{x}{9}}x^2+5\log_{9x}x^3-12\log_{3x}\sqrt{x}=0$.

5.32.10. [ВШЭ] $\lg(x-10)\lg(x+10)=\lg(x^2-100)-1$.

5.32.11. [МГУ, физ. ф-т] $\log_{\sqrt{2-x}}(4x+k)=4$. Определить, при каких k уравнение имеет решения и найти эти решения.

5.32.12. [ГАУ] $px^2=\ln x$. Найти значения параметра p, при которых уравнение не имеет решений.

5.32.13. [МГУ, эк. ф-т] $\log_2 x+\log_a x+\log_4 x=1$. Найти все a, при которых уравнение имеет решения и найти эти решения.

33. Системы уравнений

Решить системы:

5.33.1. [МГУ, псих. ф-т] $\begin{cases} \log_x 25+2y=2, \\ -(\log_x 0{,}2)^3+y=1. \end{cases}$

5.33.2. [МГУ, мех.-мат.] $\begin{cases} \log_y x-2\log_x y=1, \\ x^2+2y^2=3. \end{cases}$

5.33.3. [МГУ, псих. ф-т] $\begin{cases} \lg x-5^y+2y=3, \\ 2y\cdot 5^y+5^y\lg x=4. \end{cases}$

5.33.4. [МТУСИ] $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12, \\ 2^{-\log_2 x}+5^{\log_5 \frac{1}{y}}=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

5.33.5. [МЭИ] $\begin{cases} \lg(4x^2+y^2)=\lg 15+1, \\ \lg(2x+y)+\lg(2x-y)=\lg 0{,}5+2. \end{cases}$

5.33.6. [МИРЭА] $\begin{cases} y^{2y^2+x^2}=y^{3xy}, \\ \log_{y-2x}(y+2x)=\log_{2y-2x-1}(4x^2+xy+x). \end{cases}$

5.33.7. [МФТИ] $\begin{cases} 1+\log_3(x+y)\log_2 3=2\log_4 7-\log_2 x, \\ \log_2(xy+1)=2\log_4 y+\log_{\frac{1}{8}}(x-2y)^3. \end{cases}$

5.33.8. [МФТИ] $\begin{cases} \log_4 x\cdot\log_3 4=\log_3 5+\log_{\frac{1}{3}}(2y+4x), \\ \log_3(x-y)=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{y}-3\log_{27}(2+xy). \end{cases}$

5.33.9. [СПбГТУ] $\begin{cases} \lg^2 x=\lg^2 y+\lg^2 xy, \\ \lg^2(x-y)+\lg x\cdot\lg y=0. \end{cases}$

5.33.10. [МГТУ] $\begin{cases} 2+\log_2 y=\log_2(x+3y), \\ y=x+2a-4+2(x-a)^2. \end{cases}$ Найти все значения a, при которых система имеет два решения.

Группа В

34. Разные задачи

Решить уравнения:

5.34.1. [МГУ, ИСАА] $\log_x(3x-2)-2=\sqrt{\log_x^2(3x-2)+4\log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right)}$.

5.34.2. [МГУ, ИСАА] $\log_x(6x-5)-2=\sqrt{\log_x^2(6x-5)-4\log_x\left(\frac{6x-5}{x}\right)}$.

5.34.3. [МПГУ] $2x^2+\log_2(7+2x-x^2)=4+x^4$.

5.34.4. [МПГУ] $\log_2(6x-x^2-5)=x^2-6x+11$.

5.34.5. [ГАУ] $\log_2\bigl(x(1-x)\bigr)=-2+\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|$.

5.34.6. [ГАУ] $\log_2(1+x^2)=\log_2 x+2x-x^2$.

5.34.7. [ГАУ] $\log_2(4x^2+1)=\log_2 x+8x(1-x)$.

5.34.8. [МФТИ] $\sqrt{\log_{4x^2-x}5}\cdot\log_5\left(\frac{25}{4x^2-x}\right)=1$. Найти все решения, удовлетворяющие неравенству $\sin x>\operatorname{ctg}2x$.

5.34.9. [МЭСИ] $\log_{2x}\frac{2}{x}\cdot\log_2^2 x+\log_2^4 x=1;\ x>1$.

Решить системы:

5.34.10. [МГУ, псих. ф-т]

$$\begin{cases} 2^{x+y}\cdot 3^y\cdot 6^{x+y}\cdot 9^x=144,\\ \log_{0,2x+0,1y}(27^x\cdot 9^y+4^{x+y})\cdot\log_5(0{,}2x+0{,}1y)=2.\end{cases}$$

5.34.11. [МГУ, псих. ф-т]

$$\begin{cases} 400\cdot 5^y\cdot 50^x\cdot 100^{x+y}=1,\\ \log_{0,5x+0,4y}(8^{-x}\cdot 4^{-y}+25^{-2x}\cdot 125^{-y})\cdot\log_{41}(0{,}5x+0{,}4y)=1.\end{cases}$$

5.34.12. [СПбГУ] $\begin{cases} 4\log_2^2 x+1=2\log_2 y,\\ \log_2 x^2\geqslant\log_2 y.\end{cases}$

5.34.13. [СПбГУ] $\begin{cases} \log_x\left(\frac{y}{9}\right)+\frac{3x}{y(x+9)}=0,\\ (y-2)^{-1}=(y-2)^{-\log_9(x+8)}.\end{cases}$

6. Неравенства

Основные свойства неравенств

1. Решая неравенство $f(x) > g(x)$ (или $f(x) \geqslant g(x)$), в большинстве случаев бывает полезным находить область допустимых значений (ОДЗ) неравенства, т. е. множество таких значений переменной x, при которых функции $f(x)$ и $g(x)$ определены. Решением неравенства называется множество всех значений переменной x, при которых функции $f(x)$ и $g(x)$ определены, а неравенство обращается в верное числовое неравенство при подстановке в обе части его этих значений.

2. Нестрогое неравенство $f(x) \geqslant g(x)$ равносильно совокупности строгого неравенства $f(x) > g(x)$ и уравнения $f(x) = g(x)$.

3. *Свойства строгих неравенств.* Пусть рассматривается неравенство $f(x) > g(x)$ и функция $h(x)$ определена для всех значений x, принадлежащих ОДЗ неравенства. Тогда

3.1. $f(x) > g(x) \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} f(x) \pm h(x) > g(x) \pm h(x)$.

3.2. $f(x) > g(x) \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} f(x)h(x) > g(x)h(x) \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \dfrac{f(x)}{h(x)} > \dfrac{g(x)}{h(x)}$, если $h(x) > 0$ на ОДЗ исходного неравенства.

3.3. $f(x) > g(x) \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} f(x)h(x) < g(x)h(x) \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \dfrac{f(x)}{h(x)} < \dfrac{g(x)}{h(x)}$, если $h(x) < 0$ на ОДЗ исходного неравенства.

В случае, когда пункты 3.2 и 3.3 не применимы (в силу того, что функция $h(x)$ может принимать и положительные, и отрицательные значения, а также обращаться в нуль на ОДЗ неравенства), всю ОДЗ разбивают на 3 множества, где $h(x) > 0$, $h(x) < 0$ и $h(x) = 0$, и сводят решение неравенства к решению совокупности трех систем: $f(x) > g(x) \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow}$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} h(x) > 0 \\ f(x)h(x) > g(x)h(x) \end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l} h(x) < 0 \\ f(x)h(x) < g(x)h(x) \end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l} h(x) = 0 \\ f(x) < g(x). \end{array}\right.$$

4. *Возведение обеих частей неравенства в степень*

4.1. $f(x) > g(x) \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \left[f(x)\right]^{2n} > \left[g(x)\right]^{2n}$, если $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$.

4.2. $f(x) > g(x) \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \left[f(x)\right]^{2n} < \left[g(x)\right]^{2n}$, если $f(x) \leqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$.

4.3. $f(x) > g(x) \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \left[f(x)\right]^{2n+1} > \left[g(x)\right]^{2n+1}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Если же ничего не известно о знаках обеих частей неравенства, но, тем не менее, необходимо возвести обе части неравенства в четную степень, нужно разбить ОДЗ на 4 множества: $M_1 = \{x \mid f(x) > 0,\ g(x) \geqslant 0\}$, $M_2 = \{x \mid f(x) > 0,\ g(x) < 0\}$, $M_3 = \{x \mid f(x) \leqslant 0,\ g(x) \geqslant 0\}$, $M_4 = \{x \mid f(x) \leqslant 0,\ g(x) < 0\}$ и свести неравенство к совокупности четырех систем. В формальной записи это выглядит так:

$$f(x) > g(x) \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > g(x) \end{array}\right. \text{или} \left\{\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) > g(x) \end{array}\right. \text{или} \left\{\begin{array}{l} f(x) \leqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > g(x) \end{array}\right. \text{или} \left\{\begin{array}{l} f(x) \leqslant 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) > g(x) \end{array}\right. \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) \geqslant 0 \\ \left[f(x)\right]^{2n} > \left[g(x)\right]^{2n} \end{array}\right. \text{или} \left\{\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{array}\right. \text{или } \{\varnothing\} \text{ или} \left\{\begin{array}{l} f(x) \leqslant 0 \\ g(x) < 0 \\ \left[f(x)\right]^{2n} < \left[g(x)\right]^{2n} \end{array}\right.$$

5. *Расщепление неравенств*

$$f(x) \cdot g(x) > 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array}\right. \text{или} \left\{\begin{array}{l} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array}\right. \text{или} \left\{\begin{array}{l} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{array}\right.$$

6. Решение неравенств вида $f\big(\varphi(x)\big) > f\big(\psi(x)\big)$, где $f(t)$ — монотонная функция.

Если $f(t)$ — монотонно возрастающая функция, то

$$f\big(\varphi(x)\big) > f\big(\psi(x)\big) \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \varphi(x) > \psi(x).$$

Если $f(t)$ — монотонно убывающая функция, то

$$f\big(\varphi(x)\big) > f\big(\psi(x)\big) \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \varphi(x) < \psi(x).$$

7. *Обобщенный метод интервалов для решения неравенств $f(x) > 0$ или $f(x) \geqslant 0$*

1. Находится ОДЗ неравенства.

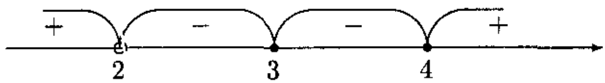
2. Находятся критические точки функции $f(x)$, т. е. те значения x, принадлежащие ОДЗ неравенства, в которых функция $f(x)$ меняет свой знак. Эти точки являются корнями уравнения $f(x) = 0$ (вообще говоря, критическими точками являются и точки разрыва функции $f(x)$, но для элементарных функций точки разрыва не попадают в ОДЗ неравенства).

3. Наносят критические точки на ОДЗ; эти точки разбивают ОДЗ на несколько промежутков, в каждом из которых функция $f(x)$ будет знакопостоянной.

4. Определяют знак $f(x)$ в каждом промежутке, вычисляя, например, значение $f(x^*)$ для произвольной точки x^* каждого промежутка.

5. Выписывают ответ, особое внимание обращая на концевые точки промежутков (критические точки).

Например, пусть дано неравенство $f(x) \geqslant 0$. Его ОДЗ: $x \neq 2$, а критические точки функции, т. е. корни уравнения $f(x) = 0$: $x = 3$ и $x = 4$. Пусть знаки функции соответствуют приведенным на рисунке:



Тогда решением данного неравенства будет множество $(-\infty; 2) \cup [4; +\infty)$.

Группа А

Решить неравенства:

1. Рациональные неравенства

6.1.1. [МЭСИ] $5x + 7 > 3x + 20$. Наименьшее целое решение[1].

6.1.2. [МГТА] $x - \frac{1-x}{6} \leqslant \frac{2x+1}{2} - \frac{3}{4}$. Наибольшее целое решение.

6.1.3. [МГУЛ] $(x-2)^2 + 3 > (x+5)^2$. Наибольшее целое решение.

6.1.4. [МЭСИ] $x^2 - 9x + 14 \leqslant 0$. Наибольшее целое решение.

6.1.5. [МТУСИ] $x^2 + 8x < 20$. Число целых решений.

6.1.6. [БГАУ] $x^2 + 2x - 5 \geqslant x + 7$.

6.1.7. [МИЭТ] $2x^2 + 1 \leqslant x(x+2)$.

6.1.8. [МЭСИ] $(x^2+1)(x^2+x+1)^3(x+5)^5 > 0$. Наименьшее целое решение.

6.1.9. [ВГАВТ] $(x^3 - 1)(x^4 - 16) < 0$.

6.1.10. [МГГУ] $\frac{1}{x} > \frac{1}{5}$.

[1]Запись «наименьшее целое решение» означает, что в ответе требуется указать наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству. То же относится и к другим подобным записям.

6.1.11. [МИЭТ] $\dfrac{2x+1}{2+x} \geqslant 2$.

6.1.12. [ГАУ] $\dfrac{x+1}{3x-5} \leqslant \dfrac{1}{3}$.

6.1.13. [МГУ, геолог. ф-т] $\dfrac{1}{x-1} \geqslant -2$.

6.1.14. [МЭСИ] $\dfrac{2x^2+x+2}{x^2-1} < 0$. Целое решение.

6.1.15. [МИКХС] $\dfrac{3x^2-2x-5}{x-2} > 0$.

6.1.16. [МГАХМ] $\dfrac{x^2-5x+4}{(x^2+2)(x+2)} \leqslant 0$. Наименьшее положительное решение.

6.1.17. [ГАУ] $5-x \geqslant \dfrac{6}{x}$.

6.1.18. [МГТУ] $\dfrac{1+x^2}{x} < \dfrac{10}{3}$.

6.1.19. [РЭА] $x \geqslant \dfrac{25}{1-x} - 9$. Наименьшее решение.

6.1.20. [МГУ, эк. ф-т] $\dfrac{4x-1}{3x+1} \geqslant 1$.

6.1.21. [МГУ, физ. ф-т] $x-1 > \dfrac{4x}{3-x}$.

6.1.22. [РЭА] $\dfrac{121}{x+2} \leqslant 20-x$. Наибольшее решение.

6.1.23. [ЛГПИ] $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{x-3}$.

6.1.24. [РЭА] $\dfrac{4x^2+45x}{x-1} \geqslant 25$. Наименьшее целое решение.

6.1.25. [МГУ, геогр. ф-т] $\dfrac{x-3}{x^2+2x-5} > \dfrac{1}{2}$.

6.1.26. [ВВИА] $\dfrac{1}{x-2} \geqslant \dfrac{2}{11-3x}$.

6.1.27. [МГАВТ] $\dfrac{3x^2-2x+3}{4x^2-7x+9} > 1$.

6.1.28. [МГТУ; РЭА] $\dfrac{4-x}{x-5} > \dfrac{1}{1-x}$. Решить и найти сумму целых решений.

6.1.29. [МГАПП] $\dfrac{3x^2+x-9}{x} \geqslant -5$. Сумма целых отрицательных решений.

6.1.30. [МЭСИ] $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{8}{x^2-1}<0$. Наибольшее целое решение.

6.1.31. [МТУСИ] $\frac{x^2+x-45}{x-6}\leqslant\frac{3x+1}{2}$.

6.1.32. [МАДИ] $\frac{2}{x+8}<\frac{2x-1}{x^2-1}$. Середина промежутка конечной длины.

6.1.33. [МИСиС] $\frac{2x^2-9x+7}{x^2-1}\leqslant 1$. Наибольшее целое решение.

6.1.34. [ГАСБУ] $\frac{5x+4}{5x^2-6x+1}<\frac{1}{x-2}$.

6.1.35. [КГТУ] $\frac{9-x^2}{3x+1}\geqslant\frac{2}{x}$.

6.1.36. [РЭА] $\frac{4}{x^2-x+3}+\frac{2}{x-3}\leqslant\frac{2x^2-2x-13}{(x^2-x+3)(x-3)}$. Длина промежутка.

6.1.37. [РЭА] $\frac{1}{x+10}\leqslant\frac{x}{x^2-2x+4}+\frac{8-17x}{(x+10)(x^2-2x+4)}$. Длина промежутка.

6.1.38. [МИСиС] $\frac{5(x^3+6x^2+12x+8)}{(x-1)^2(x+8)}\geqslant\frac{x(x+2)^3}{(x^2-2x+1)(x+8)}$. Количество целых решений, принадлежащих отрезку $[-10;12]$.

6.1.39. [МАДИ] $2x+1<\frac{y^2+3}{2x-3}$, где $y=(8x-14)^{\frac{1}{2}}$. Середина промежутка.

2. Неравенства с модулями

6.2.1. [МТУСИ] $|4x+1|<3$.

6.2.2. [ГАНГ] $|x+3{,}5|>6$. Наибольшее целое отрицательное решение.

6.2.3. [МИСИ] $|x^2+2x-4|>4$.

6.2.4. [МЭСИ] $\left|\frac{-x^2+5x+2}{-x^2-5x-24}\right|>2$. Наибольшее целое решение.

6.2.5. [МГАПИ] $|x^2-8x+15|<x-3$.

6.2.6. [МЭСИ] $|x^2-2x-3|<3x-3$. Наибольшее целое решение.

6.2.7. [МГУ, хим. ф-т] $3x-1<2|x|$.

6.2.8. [МГУ, хим. ф-т] $2x<|x|+1$.

6.2.9. [МГСУ] $x^2+|6x-24|\leqslant 16$.

6.2.10. [МЭСИ] $x^2+x-10<2|x-2|$. Наибольшее целое решение.

6.2.11. [МГУ, геолог. ф-т] $|x| \cdot (x^2 - 2x - 3) \geqslant 0$.

6.2.12. [МГУ, геолог. ф-т] $\frac{1}{|x|} \cdot (x^4 - 6x^2 - 16) \leqslant 0$.

6.2.13. [МИРЭА] $|x - 1| + |2 - x| > 3$.

6.2.14. [МГАХМ] $|x + 3| + |x - 4| \leqslant 11$. Наименьшее решение.

6.2.15. [ГАУ] $|x - 2| + |x| \leqslant 4$. Наименьшее решение.

6.2.16. [ОмГУ] $|x| + |2x + 1| - x > 1$.

6.2.17. [МГТУ; МПГУ] $|x^2 - 1| < x^2 - |x| + 1$.

6.2.18. [МПУ; МГУК] $|x^2 - 2x - 3| + 2 \cdot |x - 2| < 5$.

6.2.19. [МГТУ] $\dfrac{x^2 + |x| - 2}{x^2 + |x| - 6} > 0$.

3. Иррациональные неравенства

6.3.1. [МГАПБ] $\sqrt{\dfrac{x - 2}{1 - 2x}} > -1$. Середина промежутка.

6.3.2. [МТУСИ] $\sqrt{\dfrac{3 + 2x}{4 - x}} > -\sqrt{3}$. Наименьшее отрицательное решение.

6.3.3. [МЭСИ] $\sqrt{x + 5} < 2$. Наибольшее целое решение.

6.3.4. [МЭСИ] $\sqrt{x + 1} > 4$. Наименьшее целое решение.

6.3.5. [МГАПБ] $\sqrt{3x - 10} > \sqrt{6 - x}$. Середина промежутка.

6.3.6. [МГАЛП] $\sqrt{3x - 2} \geqslant \sqrt{-x + 4}$. Наибольшее решение.

6.3.7. [ГАУ] $\sqrt{x - 1} < 3 - x$.

6.3.8. [ГАУ] $\sqrt{7 + 3x} < 1 - x$.

6.3.9. [ГАУ] $\sqrt{9x - 20} < x$.

6.3.10. [МГТУ] $x - 4 < \sqrt{x - 2}$.

6.3.11. [МГОУ] $\sqrt{2x + 3} \leqslant x$.

6.3.12. [ЛГПИ] $x - \sqrt{3 - 2x} < 0$.

6.3.13. [МИСИ] $2\sqrt{11 - 2x} + x > 3$.

6.3.14. [ГФА] $\sqrt{7 + x} \geqslant 7 - 2x$.

6.3.15. [МГУ, ф-т почвовед.] $\sqrt{2x + 3} \geqslant x$.

6.3.16. [МАРХИ] $\sqrt{24 - 10x} > 3 - 4x$.

6.3.17. [СГУ] $\sqrt{x^2+3x-18} > 2x+3$.

6.3.18. [МГУГиК] $\sqrt{x^2+7x} > x+1$.

6.3.19. [ГАУ] $x > \sqrt{x^2-x-12}$.

6.3.20. [МТУСИ] $\sqrt{5-x^2} \geqslant x+1$.

6.3.21. [МГАПБ] $\sqrt{x^2+4x-5} > 6-x$. Наименьшее целое решение.

6.3.22. [ГФА] $\sqrt{x^2+4x-5} > 2x-3$.

6.3.23. [МГУ, геолог. ф-т] $\sqrt{24-10x+x^2} > x-4$.

6.3.24. [МГУ, геолог. ф-т] $x+5 < \sqrt{15+x^2+8x}$.

6.3.25. [ГАУ] $\sqrt{t^2-\frac{3}{4}} > t-\frac{1}{2}$.

6.3.26. [МЭСИ] $\sqrt{x^2-2x+4} > x-3$. Наименьшее целое положительное решение.

6.3.27. [СПбГТУ] $2x-17 < \sqrt{81-x^2}$.

6.3.28. [ГАУ] $\dfrac{1}{\sqrt{x+18}} > \dfrac{1}{2-x}$.

6.3.29. [ВАХЗ] $(2-x+x^2)^{0,5} \leqslant |x-3|$. Наибольшее решение.

6.3.30. [МГУ, филолог. ф-т] $\sqrt{2x^2+15x-17} > x+3$.

6.3.31. [МТУСИ] $\dfrac{x-3}{2} \geqslant \dfrac{(\sqrt{x}-5)^2}{x-6}$. Наименьшее решение.

6.3.32. [МГСоцУ; МГАПБ] $(x-1)\cdot\sqrt{-x^2+x+6} \geqslant 0$.

6.3.33. [МГТУ] $\dfrac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1} > 0$.

6.3.34. [ГАУ] $(x^2-1)\cdot(x-3)\cdot(x+10)\cdot\sqrt{x-6} \geqslant 0$.

6.3.35. [МЭСИ] $\dfrac{6-x}{\sqrt{x^2-8x+7}} \geqslant 0$. Наибольшее целое решение.

6.3.36. [МЭСИ] $\dfrac{(x-2)(x-4)}{\sqrt{x^2+x+1}} < 0$. Целое решение.

6.3.37. [МГУ, эк. ф-т] $\sqrt{-25x^2+15x-2}\cdot(8x^2-6x+1) \geqslant 0$.

6.3.38. [СГУ] $(x^2+2x-8)\cdot\sqrt{x^2+x-2} \leqslant 0$.

6.3.39. [МГУ, мех.-мат.] $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leqslant \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

6.3.40. [ГАСБУ] $(x+3)\cdot\sqrt{12-|x|} \geqslant 0$.

6.3.41. [МТУСИ] $2x - 5\sqrt{x} + 2 \leqslant 0$. Наибольшее решение.

6.3.42. [МТУСИ] $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} \leqslant 6$. Длина отрезка.

6.3.43. [СПбГТУ] $5x - 17\sqrt{x+5} + 31 < 0$.

6.3.44. [МТУСИ] $3\sqrt[6]{x+1} - \sqrt[3]{x+1} \geqslant 2$. Середина отрезка.

6.3.45. [МГТУ] $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x} - 6} > 0$.

6.3.46. [МГТУ] $\dfrac{x - \sqrt{x} - 2}{x - \sqrt{x} - 6} > 0$.

6.3.47. [ГАУ] $\sqrt{1+x} > 1 + \sqrt{1-x}$.

6.3.48. [МГАХМ] $\sqrt{x+7} - \sqrt{x} \geqslant 1$.

6.3.49. [МГТУ] $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

6.3.50. [ВГАВТ] $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} > -\sqrt{x-5}$.

6.3.51. [МЭСИ] $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+1} - \sqrt{2-x} < 0$. Наибольшее целое решение.

6.3.52. [МГУ, геолог. ф-т] $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}+1}$.

6.3.53. [МГУ, геолог. ф-т] $\sqrt{4z - 3 - z^2} \neq 0$.

4. Показательные неравенства

6.4.1. [МГТА] $8^{5-\frac{x}{3}} > 4$.

6.4.2. [МГТУ] $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x\cdot(2-x)} > 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$.

6.4.3. [ГАНГ] $\dfrac{(\sqrt{5})^{x-10}}{4^{x-10}} > \dfrac{5\sqrt{5}}{64}$. Наибольшее целое решение.

6.4.4. [МТУСИ] $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$.

6.4.5. [МТУСИ] $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$.

6.4.6. [МГУЛ] $\dfrac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}} > \dfrac{(0{,}04)^x}{25}$. Найти наименьшее целое значение величины $4x$, где x — решение неравенства.

6.4.7. [МТУСИ] $\sqrt{0{,}8^{x(x-3)}} > 0{,}64$. Наименьшее положительное целое решение.

6.4.8. [МЭСИ] $4^x - 4^{x-1} < 3$. Наибольшее целое решение.

6.4.9. [ГАУ] $(0{,}2)^{\frac{x+2}{x-1}} > 25$.

6.4.10. [МПГУ] $2^{\frac{x+3}{x-3}} \geqslant \frac{1}{16}$.

6.4.11. [МПУ] $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84$.

6.4.12. [МИФИ] $\dfrac{7^x - 30}{7^{x-1} + 1} \leqslant -14$.

6.4.13. [ГАУ] $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x} \geqslant 1$.

6.4.14. [ГАУ] $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$.

6.4.15. [МГАТХТ] $8^{\frac{2x^2+1}{x}} \leqslant 0{,}5 \cdot 4^{3x}$. Количество целых решений.

6.4.16. [МЭСИ] $3^{72} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$. Наибольшее целое решение.

6.4.17. [ГАУ] $(0{,}5)^{\frac{2x}{1-x}} \leqslant \sqrt{(0{,}25)^{x-6}}$.

6.4.18. [РЭА] $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{7-\frac{16}{x+1}}$. Наибольшее решение.

6.4.19. [ЯВВФУ] $3^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[3]{27^{2x-1}}$.

6.4.20. [КПИ] $5^{\log_5(x^2-x)} \leqslant 3^{\log_3(3x-3)}$.

6.4.21. [ДВГУ] $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$.

6.4.22. [ГАУ] $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

6.4.23. [МГАХМ] $4 \cdot 3^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+2} \leqslant 5^{x+3} - 3^{x+3}$.

6.4.24. [ГАУ] $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 < 0$.

6.4.25. [ЯВВФУ] $2^x + 11 \cdot 2^{0{,}5 \cdot x} < 26$.

6.4.26. [МГУГиК] $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

6.4.27. [ГАУ] $2 \cdot 3^{2x^2} + 4 \leqslant 3^{x^2+2}$.

6.4.28. [МТУСИ] $7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4$.

6.4.29. [МЭСИ] $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geqslant 0$. Наименьшее целое решение.

6.4.30. [МЭСИ] $3^{4-3x}-35\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x}+6\geqslant 0$. Наибольшее целое решение.

6.4.31. [МГУ, биолог. ф-т] $3^x<1+12\cdot 3^{-x}$.

6.4.32. [РЭА] $15\cdot 2^{2-2x}+19\cdot 2^{-x}>2$. Наибольшее целое решение.

6.4.33. [МГУЛ] $25^x-2^{2\log_4 6-1}<10\cdot 5^{x-1}$. Наибольшее целое решение.

6.4.34. [МЭСИ] $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}\left(3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+5\right)}<2^{1+x}$. Наименьшее целое решение.

6.4.35. [СПбГТУ] $(0{,}25)^{\sqrt{x}}<2^{3-\sqrt{x}}+25^{\log_3^{-1}5}$.

6.4.36. [МГТУ] $2\cdot 4^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{\sqrt{x}}+2<0$.

6.4.37. [ГАУ] $3^{\sqrt{x}}-3^{1-\sqrt{x}}\leqslant\frac{26}{3}$.

6.4.38. [МАДИ] $4^{\sqrt{x}}-2^{\sqrt{x}+1}<2^{\sqrt{x}+4}-32$. Середина промежутка.

5. Логарифмические неравенства

6.5.1. [ГАУ] $\log_2(x^2+3x)\leqslant 2$.

6.5.2. [ЛГПИ] $\log_8(x^2-4x+3)<1$.

6.5.3. [МГОПУ] $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(-x^2+6x+3)\geqslant -2$.

6.5.4. [ГАУ] $\lg(x^2-2x-2)\leqslant 0$.

6.5.5. [МГТУ] $\log_2\frac{x+1}{x}>1$.

6.5.6. [МЭСИ] $\lg\frac{x+1}{x}>0$. Наименьшее целое решение.

6.5.7. [МГАПБ] $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right)\geqslant -1$. Середина промежутка.

6.5.8. [МИЭТ] $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)>-1$.

6.5.9. [МПГУ] $\log_3(x^2-x)\geqslant\log_3(3x+2)$.

6.5.10. [МГУ, ф-т почвовед.] $\log_3(1-2x)\geqslant\log_3(5x-2)$.

6.5.11. [МТУСИ] $\lg(x^2+2)-\lg(3x-7)>0$.

6.5.12. [МГУ, ВМиК] $\log_3(x+2)+\log_3(x-4)\leqslant 0$.

6.5.13. [МПГУ] $\log_4(x^2-2x)\geqslant\log_4(4x+7)$.

6.5.14. [МГАВТ] $2\log_{\frac{1}{2}}(1-x)<\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$.

6.5.15. [МГТУ] $\lg(x-2)+\lg(x-5)<\lg 4$.

6.5.16. [МГТУ] $\lg(x-3)+\lg x<\lg\left(\frac{9}{2}x+4\right)$.

6.5.17. [РЭА] $\log_4(x-7)\leqslant\log_4(20-x)-1$. Наибольшее целое решение.

6.5.18. [РЭА] $\log_{0,5}(x^2-3x+4)-\log_{0,5}(x-1)<-1$. Наименьшее целое решение.

6.5.19. [МГУ, ВМиК] $\log_5(x+2)+\log_5(1-x)\leqslant\log_5\left[(1-x)(x^2-8x-8)\right]$.

6.5.20. [МГУ, ф-т почвовед.] $\lg(x+5)\geqslant-2\lg\frac{1}{3-x}$.

6.5.21. [МГУ, ф-т почвовед.] $2\ln\frac{1}{3x-2}+\ln(5-2x)\geqslant0$.

6.5.22. [КПИ] $\log_{\frac{1}{5}}\frac{2}{x-2}<\log_{\frac{1}{5}}(5-x)$.

6.5.23. [МГГА] $\log_5(x-3)+\frac{1}{2}\log_5 3<\frac{1}{2}\log_5(2x^2-6x+7)$.

6.5.24. [МПГУ] $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\geqslant\log_3(5-x)$.

6.5.25. [МГУЛ] $\log_{0,2}(x^2-x-20)+\log_5(x+4)>0$. Середина промежутка.

6.5.26. [МГАП] $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{x}{2}-1\right)<1+\log_{\frac{1}{2}}x$.

6.5.27. [МГАПБ] $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)\geqslant\log_{\frac{1}{2}}2-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$. Наибольшее целое решение.

6.5.28. [МИЭМ] $\log_2 x<\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)-2$.

6.5.29. [МТУСИ] $\lg(x+2)+\log_{\frac{1}{\sqrt{10}}}(x+2)>-1$.

6.5.30. [МИИТ] $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\log_2(x-1)\geqslant1$.

6.5.31. [МИЭМ] $\log_2 x<\log_{\frac{1}{2}}(4x-1)-1$.

6.5.32. [БГАРФ] $\log_5 x+\log_{25}x<\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{3}$.

6.5.33. [МПГУ] $\lg^2 x-2\geqslant\lg x$.

6.5.34. [МГТУ] $\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+\log_{\frac{1}{2}}x-2\geqslant0$.

6.5.35. [РЭА] $\log_2^2(5-x)-6\log_2(5-x)+9\leqslant0$.

6.5.36. [РЭА] $\log_{\frac{1}{2}}^2(4-x)+10\log_{\frac{1}{2}}(4-x)+25\leqslant0$.

6.5.37. [МПГУ] $\log_3^2 x-6\log_3 x+5\geqslant0$.

6.5.38. [МГСУ] $\log^2_{\frac{1}{3}}(x-1)+3 \geqslant -\frac{4}{5}\log_{\frac{1}{3}}(x-1)^5$.

6.5.39. [МГУ, филолог. ф-т] $\dfrac{1}{\log_2 x - 4} > \dfrac{1}{\log_2 x}$.

6.5.40. [МАТИ] $\dfrac{4}{\lg 10x} - \dfrac{5}{\lg 100x} \geqslant 0$.

6.5.41. [МГУ, биолог. ф-т] $\dfrac{4\log_{0,3} x + 1}{\log_{0,3} x + 1} \leqslant \log_{0,3} x + 1$.

6.5.42. [МГТУ] $\dfrac{1}{1-\lg x} < \dfrac{2\lg x - 5}{1+\lg x}$.

6.5.43. [МФТИ] $\dfrac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_x 2} \geqslant 2\log_2 x$.

6.5.44. [МГТУ] $2 + \dfrac{\log_2^2 x}{1+\log_2 x} > \log_2 x$.

6.5.45. [МЭСИ] $\dfrac{1}{5-\lg x} + \dfrac{2}{1+\lg x} < 1$. Наименьшее целое решение.

6.5.46. [МГУ, биолог. ф-т] $\dfrac{3\log_{0,5} x}{2-\log_{0,5} x} \geqslant 2\log_{0,5} x + 1$.

6.5.47. [МИСИ] $\left(\log_{\frac{1}{2}} x + 2\right)\left(2 - \log_{\frac{1}{4}} x^2\right) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^3}{64}$.

6.5.48. [МГУ, хим. ф-т] $4\log_2 x + \log_2 \dfrac{x^2}{8(x-1)} \leqslant 4 - \log_2(x-1) - \log_2^2 x$.

6.5.49. [ГФА] $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)\right) > 0$.

6.5.50. [МФТИ] $\dfrac{\log_x\left((x-2)\cdot(x-3)\right)}{\log_x 2} < \log_2(x+1)$.

6.5.51. [МГУ, мех.-мат.] $\log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}}(x^2+2x+16-2\sqrt{55}) < 2$.

6.5.52. [СПбГУ] $\log_{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}(x^2-4x+14-4\sqrt{6}) < 2$.

6.5.53. [МГУ, мех.-мат.] $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2+4x+11-4\sqrt{3}) < 2$.

6.5.54. [МГУ, геолог. ф-т] $\frac{1}{2}\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}(x^2) \geqslant \log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}(\sqrt{2x+3})$.

6.5.55. [МГУ, геолог. ф-т] $\frac{1}{4}\log_{2\sin\frac{\pi}{7}}(x^2) > \log_{2\sin\frac{\pi}{7}}(\sqrt[4]{3x+4})$.

6.5.56. [МГУЛ] $\log_2 \dfrac{\left(\sqrt{4x+1}\right)^2+15}{x^2+2} + \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{28}{x+5} > 0$. Середина промежутка.

6.5.57. [ДВГУ] $|\lg x - 1| < 1$.

6.5.58. [МГТУ] $\sqrt{1-\log_{\frac{1}{2}} x} < 2$.

6. Неравенства смешанного типа. Обобщенный метод интервалов

6.6.1. [МГУЛ] $(4x-1)\cdot\log_2 x \geqslant 0$. Наименьшее целое решение.

6.6.2. [МИФИ] $(x+2)\cdot\log_{1,5}(4-x) \geqslant 0$.

6.6.3. [ДВГУ] $(4x^2-16x+7)\cdot\log_2(x-3) > 0$.

6.6.4. [ГАУ] $\dfrac{\log_{0,1}(x+2)}{\sqrt{5-4x-x^2}} \leqslant 0$.

6.6.5. [ГАУ] $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2+\log_{0,5}(x+1)} \geqslant 0$.

6.6.6. [ГАУ] $\dfrac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{8-2x-x^2}} \leqslant 0$.

6.6.7. [РЭА] $2^{\log_{0,7}(1+2x)} > 4$. Длина промежутка.

6.6.8. [РЭА] $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_3(1-x)} \geqslant 0{,}25$. Сумма целых решений.

6.6.9. [ЯВВФУ] $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(2x^2-3x+1)} < 1$.

6.6.10. [ДВГУ] $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)} > 1$.

6.6.11. [МПУ] $\dfrac{2x^2-11x+15}{2^x-6} < 0$.

6.6.12. [МИФИ] $\dfrac{x-2\sqrt{x}-8}{2^x-4} \geqslant 0$.

6.6.13. [МТУСИ] $\dfrac{x^2\cdot(x-2)^2}{\log_{0,5}(x^2+1)} \geqslant 0$.

6.6.14. [МПУ] $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_5^2 x-\log_5 x^2} > \dfrac{1}{81}\cdot 3^{2\log_5 x-5}$.

6.6.15. [МИЭМ] $\dfrac{3^x-25}{x+1} \leqslant \dfrac{3^x-25}{x-3}$.

6.6.16. [РЭА] $\dfrac{3\cdot 2^{\frac{x}{2}}-7\cdot 2^{\frac{x}{4}}-20}{\sqrt{x-3}} \leqslant 0$. Наименьшее целое решение.

6.6.17. [РЭА] $\sqrt{6-x}\cdot(2\cdot 9^{2x}-53\cdot 3^{2x}-27) \geqslant 0$. Наименьшее целое решение.

6.6.18. [МГАПИ] $\dfrac{\sqrt{3^{2x+1}-4\cdot 3^x+1}}{x^2-x-6} \leqslant 0$.

7. Область определения функций

Найти область определения функций:

6.7.1. [МПУ] $y = \dfrac{2}{\sqrt{-x^2+7x-10}}$.

6.7.2. [ЛГПИ] $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{3x+x^2-7}$.

6.7.3. [МПГУ] $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-4}}$.

6.7.4. [МГТУ] $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+3x+4}{x-3}}$.

6.7.5. [ГУЗ] $y = \sqrt{\dfrac{3x+2}{2x-1}+2}$.

6.7.6. [КПИ] $y = \sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{x-4}}$.

6.7.7. [МГАП] $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{x+1}}}$.

6.7.8. [МГЗИПП] $y = \lg(3x^2+7x+2)$.

6.7.9. [ВЗФЭИ] $y = \lg(10x^2-x)+\sqrt{3+5x}$.

6.7.10. [МПУ] $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{\log_2 x - 1}$.

6.7.11. [РЭА] $y = \dfrac{\sqrt{x+30-x^2}}{\log_2(x+2)}$. Сумма целых значений.

6.7.12. [РЭА] $y = \dfrac{1}{\lg(6-x)}+\sqrt{x-1}$. Сумма целых значений.

6.7.13. [МГАХМ] $y = \log_6 \log_{0,5}(4-x)$. Найти промежуток, на котором определена функция и указать его середину.

6.7.14. [МГУ, физ. ф-т] $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-2x)}$.

6.7.15. [МГАП] $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+\frac{8}{3}x\right)}$.

6.7.16. [МГТУ] $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{2}{3}}(7-x)-1}$.

6.7.17. [МГТУ] $f(x) = \sqrt{1+\log_{\frac{1}{2}} x}$.

6.7.18. [МГАП] $y = \sqrt{2-\log_{0,5} x}+\sqrt{x^2-9}$.

6.7.19. [ЯВВФУ] $f(x) = \sqrt{\log_2(4-x)(x-1) - 1}$.

6.7.20. [МСХА] $y = \sqrt{\log_{0,3}\dfrac{x-1}{x+5}}$.

6.7.21. [КПИ] $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{5x-2}{x+2} + 3}$.

6.7.22. [РЭА] $y = \log_{x-1}(7-x)$. Сумма целых значений.

6.7.23. [РЭА] $y = \log_{x+2}(5-x)$. Сумма целых значений.

6.7.24. [МГУ, геогр. ф-т] $y = \log_x(x^2+3x+2)$.

6.7.25. [ЯВВФУ] $f(x) = \sqrt{5x^2-3x+23} + \lg(x^2-10x+16) + \dfrac{1}{x}$.

6.7.26. [УГПУ] $y = \log_5(4+5x) + \sqrt{7^{2x} - 2401}$.

6.7.27. [МГОПУ] $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-7x+6}{3-x}} + \log_{\sqrt{3}}(7x-3)$.

6.7.28. [КПИ; ЯВВФУ] $y = \sqrt{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2-3} - \left(\dfrac{1}{25}\right)^{x}}$.

6.7.29. [РЭА] $y = \sqrt{7x-x^2-6}\cdot\log_5\dfrac{x-7}{2-x}$. Сумма целых значений.

6.7.30. [МГТУ] $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{3-x}}$.

6.7.31. [МГТУ] $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log_2(x+1)}{x-1}}$.

6.7.32. [МГТУ] $f(x) = \sqrt{\dfrac{12+x-x^2}{\log_{\frac{1}{2}} x}}$.

6.7.33. [ДВГУ] $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\log_3\dfrac{x+1}{x-1}}$.

8. Системы неравенств

Решить системы:

6.8.1. [МЭСИ] $\begin{cases} 2x + 10 < 1{,}5x + 20 \\ 3x + 4 < 2x + 16. \end{cases}$ Наибольшее целое решение.

6.8.2. [УфНТУ] $\begin{cases} \dfrac{x}{8} - \dfrac{5x-4}{12} < \dfrac{x-2}{6} - \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{3x}{4} + 6 \\ x - \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x+2}{3} > \dfrac{x-3}{4} \end{cases}$

6.8.3. [МЭСИ] $\begin{cases} x^2 - 9x + 14 < 0 \\ x - 4 < 0. \end{cases}$ Целое решение.

6.8.4. [МЭСИ] $\begin{cases} x^2 + 6x + 5 < 0 \\ x^2 + 4x + 3 > 0. \end{cases}$ Целое решение.

6.8.5. [СамТУ] $\begin{cases} x(x+5) > 6 \\ 1 - \frac{x}{3} > 0{,}1 - 0{,}25x \end{cases}$

6.8.6. [СПбААП] $\begin{cases} 2x^2 - 10x + 5 < 0 \\ x^2 + 3x - 2 < 0 \end{cases}$

6.8.7. [МТУСИ] $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0 \\ x^2 - 3x > 0 \end{cases}$

6.8.8. [РЭА] $\begin{cases} \dfrac{2x-14}{x^2-x-12} \leqslant 1 \\ 1{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5. \end{cases}$ Сумма наибольшего и наименьшего решений.

6.8.9. [РЭА] $\begin{cases} 1 \geqslant \dfrac{x^2+4x+8}{(x+2)(x+3)} \\ -2{,}5 \leqslant x \leqslant 3{,}5. \end{cases}$ Сумма наибольшего и наименьшего решений.

6.8.10. [МЭСИ] $1 \leqslant \dfrac{x+1}{2-x} < 3.$ Наименьшее целое решение.

6.8.11. [ЯГУ] $\begin{cases} |x| \geqslant 1 \\ |x-1| < 3 \end{cases}$

6.8.12. [РЭА] $\begin{cases} 9^{x+0,5} - 10 \cdot 3^x + 3 \leqslant 0 \\ x \geqslant -0{,}5. \end{cases}$ Длина промежутка.

6.8.13. [РЭА] $\begin{cases} 3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} > 29 \\ 1 \leqslant x \leqslant 12. \end{cases}$ Длина промежутка.

6.8.14. [РЭА] $\begin{cases} \dfrac{x^2-13x+40}{x^2-x-6} \geqslant 0 \\ \log_2(x+2) \leqslant 3. \end{cases}$ Наибольшее целое решение.

6.8.15. [РЭА] $\begin{cases} 2^{\log_{\frac{1}{2}} x} \leqslant 3 \\ \dfrac{x^2+x-12}{x^2-6x+8} \geqslant 0. \end{cases}$ Наименьшее целое решение.

6.8.16. [РЭА] $\begin{cases} \log_{0,5}\dfrac{x^2-2x}{x-3}<0 \\ \dfrac{x-7}{x+5}\geqslant 0. \end{cases}$ Наименьшее решение.

6.8.17. [МТУСИ] $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(2x-3)>-3 \\ x^2-4x>0. \end{cases}$ Целое решение.

6.8.18. [МТУСИ] $\begin{cases} \dfrac{1}{2-x}\geqslant 1 \\ 2\cdot 4^{2x}\geqslant 32^x \end{cases}$

6.8.19. [МГГУ] $\begin{cases} (x-2)\cdot\sqrt{x^2-5{,}5x+6}\geqslant 0 \\ (x+1)\cdot\sqrt{x^2+0{,}5x-3}\leqslant 0 \end{cases}$

9. Сравнение числовых значений

6.9.1. [МГУ, ВМиК] Какое из двух чисел $\sqrt[5]{\dfrac{1990}{1992}}$ или $\sqrt[5]{\dfrac{1989}{1991}}$ больше?

6.9.2. [МГУ, эк. ф-т] Какое из чисел больше $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3}$ или 1?

6.9.3. [МГУ, геолог. ф-т] Определить, что больше: $2^{\log_3 5}-0{,}1$ или $5^{\log_3 2}$? Результат обосновать.

6.9.4. [МГУ, геолог. ф-т] Определить, что больше: $2^{\log_7 3}+\sqrt[5]{6}$ или $3^{\log_7 2}+6^{\frac{1}{3}\log_6 3}$? Результат обосновать.

6.9.5. [МГУ, псих. ф-т] Справедливо ли неравенство $\log_{11}8+1<\sqrt{2\log_{11}^2 2+\log_{11}2+3}$?

6.9.6. [МГУ, псих. ф-т] Верно ли неравенство $4(1-\log_3 2)<\sqrt{1+\log_3 4}$?

Группа Б

10. Рациональные, иррациональные неравенства и неравенства с модулями

Решить неравенства:

6.10.1. [МИСиС] $\dfrac{5(x^3+6x^2+12x+8)}{(x-1)^2(x+8)}\geqslant\dfrac{x(x+2)^3}{(x^2-2x+1)(x+8)}$. Количество целых решений, принадлежащих отрезку $[-10;12]$.

6.10.2. [СПбГТУ] $|4x^2+35x+38|>|12x^2+33x+32|$.

6.10.3. [ДВГУ] $|x^2-4|-|9-x^2|\geqslant 5$.

6.10.4. [МГУ, филолог. ф-т] $\dfrac{|x+1|+|x-2|}{x+199} < 1.$

6.10.5. [МГУ, мех.-мат.] $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{|x|-1} \geqslant \dfrac{2}{x-2}.$

6.10.6. [МГУ, эк. ф-т] $\dfrac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leqslant 2.$

6.10.7. [МГУ, ИСАА] $\dfrac{|x+3|-1}{4-2|x+4|} \geqslant -1.$

6.10.8. [СПбГУ] $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \geqslant \dfrac{1}{2-x}.$

6.10.9. [СПбГУ] $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}} \geqslant \dfrac{1}{1+x}.$

6.10.10. [МГТУ] $\dfrac{4x}{1+x^2} < 1 + \sqrt{\dfrac{2x}{1+x^2}}.$

6.10.11. [СПбГУ] $\dfrac{1}{\sqrt{6-3x}+x} \geqslant \dfrac{1}{2}.$

6.10.12. [СПбГУ] $\dfrac{1}{\sqrt{6-2x}+x} \leqslant \dfrac{1}{3}.$

6.10.13. [СПбГУ] $\dfrac{2x+\sqrt{x+2}}{2x-\sqrt{x+2}} \geqslant 1.$

6.10.14. [СПбГУ] $\dfrac{3x-\sqrt{x+1}}{3x+\sqrt{x+1}} \leqslant 1.$

6.10.15. [МИСиС] $x\sqrt{4-3x-x^2} \geqslant \left(\dfrac{4}{x}-3\right)\sqrt{(4+x)(1-x)}$. Произведение целых решений.

6.10.16. [МЭСИ] $(x+3)^2 \geqslant (x+3)(1+\sqrt{2x^2-4x-5})$. Наибольшее целое решение.

6.10.17. [ДВГУ] $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}} < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}.$

6.10.18. [МГТУ] $\dfrac{\sqrt{3x-10\sqrt{x}+3}}{x-3\sqrt{x}-10} < 0.$

6.10.19. [МИФИ] $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3.$

6.10.20. [СПбГТУ] $\sqrt{x^2-9x+20} \leqslant \sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-13}.$

6.10.21. [ДВГУ] $\sqrt{4-4x^3+x^6} > x - \sqrt[3]{2}.$

6.10.22. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{x-3} \leqslant 3 - |x-6|.$

6.10.23. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{x-2}+|x-8|\leqslant 6$.

6.10.24. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{x+2}+|x-4|\leqslant 6$.

6.10.25. [МГАП] $3\sqrt{x^2+|x|-2}\geqslant 1-x$.

6.10.26. [МГАП] $2\sqrt{x^2-|x|-2}\geqslant x-2$.

6.10.27. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{x^2-5}+3>|x-1|$.

6.10.28. [МГАП] $3\sqrt{x^2+x-2}\geqslant |x+2|-1$.

6.10.29. [МГАП] $2\sqrt{x^2-x-2}\geqslant |x+1|-2$.

6.10.30. [МГУ, биолог. ф-т] $5\cdot\sqrt{1-\frac{1}{z}}>\frac{7z-1}{z}$.

6.10.31. [МГУ, эк. ф-т] $\frac{\sqrt{x^2+x+6}+3x+13}{x+5}>1$.

11. Показательные и логарифмические неравенства

6.11.1. [ДВГУ] $4^{\sqrt{9-x^2}+1}+2<9\cdot 2^{\sqrt{9-x^2}}$.

6.11.2. [МГУ, физ. ф-т] $4^{\log_2 x}+x^2<8$.

6.11.3. [МГАП] $5\cdot 9^x-18\cdot 15^x+9\cdot 25^x>0$.

6.11.4. [МГАП] $3\cdot 49^x-16\cdot 21^x+21\cdot 9^x<0$.

6.11.5. [МЭСИ] $9\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{-\frac{1}{x}}<4\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$. Целое решение.

6.11.6. [РЭА] $6^x\geqslant 3\sqrt{3}\cdot 2^x+32\cdot 2^2\cdot 3^x-64\sqrt{108}$. Наименьшее целое положительное решение.

6.11.7. [РЭА] $15^x-\sqrt{243}\cdot 5^x-25\sqrt{5}\cdot 3^x+225\sqrt{15}\leqslant 0$.

6.11.8. [МГАПБ] $8^{\frac{2}{x}+\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{x}+1}\geqslant 3^2\cdot 4^{\frac{2}{x}}$. Сумма длин промежутков.

6.11.9. [ДВГУ] $(\sqrt{5}+2)^{x-1}\geqslant(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

6.11.10. [МГАП] $4^{x^2-x}-10\cdot 2^{x^2}+2^{2x+4}\geqslant 0$.

6.11.11. [МГАП] $9^{x^2+2x}-8\cdot 3^{x^2}-3^{2-4x}\geqslant 0$.

6.11.12. [МГУ, хим. ф-т] $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x-2|}>\left(\frac{1}{25}\right)^{|x|}$.

6.11.13. [МГАП] $6^{x+2}\geqslant 4\cdot 7^{|x+1|}$.

6.11.14. [МГАП] $3^{x+1}>7\cdot 5^{|x-1|}$.

6.11.15. [МГУ, ВМиК] $25^{x+1}\geqslant 10\cdot 32^{|x-1|+1}$.

6.11.16. [МПГУ] $2^x + 2^{|x|} \geqslant 2\sqrt{2}$.

6.11.17. [РЭА] $\left|2^{\frac{x}{3}} - \frac{11}{2}\right| \leqslant \frac{5}{2}$. Сумма целых решений.

6.11.18. [РЭА] $\left|\sqrt{3^x} - \frac{11}{2}\right| \leqslant \frac{7}{2}$. Сумма целых решений.

6.11.19. [РЭА] $\left|4^{x-1} - \frac{5}{4}\right| \leqslant \frac{4^x}{8} + \frac{3}{4}$. Сумма целых решений.

6.11.20. [МГСУ] $(2{,}5)^{(x+1)^2} \cdot (0{,}4)^{|4x-4|} \geqslant \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{13}{2}}$.

6.11.21. [ГАУ] $\dfrac{1}{3^x + 5} \leqslant \dfrac{1}{3^{x+1} - 1}$.

6.11.22. [МИСИ] $\dfrac{2^{x+1} - 22}{2^x - 2} \geqslant 1$.

6.11.23. [РЭА] $\dfrac{5}{2^{x+2} - 1} > \dfrac{1}{2^x - 1}$. Наименьшее целое решение.

6.11.24. [ГАУ] $\dfrac{4^x}{2^x - 1} \leqslant \dfrac{2^x + 12}{3}$.

6.11.25. [МГТУ] $\dfrac{2^x + 8}{2^x - 1} > 2^x$.

6.11.26. [ДВГУ] $\dfrac{2^{-x}}{1 - 2^{1-x}} + 2^x < 0$.

6.11.27. [МФТИ] $\dfrac{9^{x+0,5} + 1}{3 - 3^{2x}} \leqslant 3^{2x} + 1$.

6.11.28. [МФТИ] $\dfrac{15 - 16^{x+1}}{4^{2x} - 4} \geqslant 2^{4x+1} - 3$.

6.11.29. [РЭА] $\dfrac{3 \cdot 2^{x+2} - 27}{2^x - 1} \geqslant 2^x + 3$. Наибольшее целое решение.

6.11.30. [ГАУ] $\dfrac{9}{2^{\frac{1}{x}} + 1} \geqslant \dfrac{4}{2^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{3}}$.

6.11.31. [ГАУ] $\dfrac{3^{\frac{1}{x}} + 12}{3^{\frac{1}{x}} - 1} \geqslant \dfrac{4 \cdot 3^{\frac{1}{x}}}{3}$.

6.11.32. [МГТУ] $\dfrac{1}{4^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2} < \dfrac{1}{6}$.

6.11.33. [МГУ, геогр. ф-т] $\dfrac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1$.

6.11.34. [МГУЛ] $\log_2 \log_4 x + \log_4 \log_2 x \leqslant 2$. Середина промежутка.

6.11.35. [МГУ, биолог. ф-т] $3\log_{\sqrt{5}} 2 + \log_{\sqrt{5}}\left(2^{x^2-1} - \frac{1}{8}\right) < \log_{\sqrt{5}} 7$.

6.11.36. [МПГУ] $1 + \lg x^6 \cdot \log_5 x > \log_5 x^2 + \lg x^3$.

6.11.37. [МГУ, ф-т почвовед.] $\frac{1}{4}\log_2(x-2) - \frac{1}{2} \leqslant \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{x-5}$.

6.11.38. [МГТУ] $\log_2(x + \sqrt{x} - 2) < 2$.

6.11.39. [МГТУ] $\log_3(2^{2x-1} - 3 \cdot 2^{x-1} + 1) < 1$.

6.11.40. [РЭА] $\log_3(\sqrt{x+7} - x - 1) < 0$. Целое решение.

6.11.41. [РЭА] $\log_{0,1}(x - 1 + \sqrt{7-x}) > 0$. Целое решение.

6.11.42. [МИСиС] $\log_2\left(1 + \log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x}{3}\right) - \log_9\left(\frac{x}{3}\right)\right) < 1$. Длина промежутка.

6.11.43. [МИЭМ] $\log_4(3 \cdot 4^{x+1} - 8) < 2x + 1$.

6.11.44. [МГСУ] $\log_2 \log_{\frac{1}{9}}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x - \frac{2}{3}\right) \leqslant -1$.

6.11.45. [МГТУ] $\log_2(2^x - 2) < 3 - x$.

6.11.46. [МЭСИ] $\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1$. Наименьшее целое решение.

6.11.47. [МПГУ] $\log_{0,5}(6|x| - 3) \leqslant \log_{0,5}(4 - x^2)$.

6.11.48. [МЭСИ] $\lg\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| > 0$. Целое решение.

6.11.49. [МЭИ] $\sqrt{\lg x} \geqslant 2 - \sqrt[4]{\lg x}$.

6.11.50. [ВВИА] $\log_5^2 x + |\log_5 x| \geqslant 6$.

6.11.51. [МИИТ; РЭА] $\log^2_{\frac{1}{3}} x + |\log_{\frac{1}{3}} x| > 2$. Наименьшее целое решение.

6.11.52. [МЭСИ] $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 2) > -2$. Целое решение.

6.11.53. [МЭСИ] $\log_2 \log_3 \frac{x+1}{x-1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+1}$. Наименьшее целое решение.

6.11.54. [МГУ, эк. ф-т] $\log_{16} \frac{5x+4}{x-2} \leqslant \log_{\frac{1}{6}-x} \sqrt{\frac{1}{6} - x}$.

6.11.55. [МГУ, хим. ф-т] $\log_3(2x^2 - x) - 1 \leqslant \log_3(6x - 3) - \log_3^2 x$.

6.11.56. [МПГУ] $\log_{\sqrt{2}} x + \log_7 x^5 < 1 + 10\log_7 x \cdot \log_2 x$.

6.11.57. [МГУ, мех.-мат.] $\dfrac{\log_3(1 - 2x - x^2)}{\log_{3-\sqrt{5}}(x + 1 + \sqrt{2})} \geqslant 0$.

6.11.58. [МГУ, мех.-мат.] $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(1-2x)}{\log_2\left(\frac{8}{3}x\right)} \leqslant -\frac{1}{2}$.

6.11.59. [СПбГУ] $2\log_3 3x - \log_3 x^x \leqslant x$.

6.11.60. [СПбГУ] $\log_2 x^x - 3\log_2 \frac{x}{2} \geqslant x$.

6.11.61. [ГАНГ] $\log_{x-5{,}65}(6{,}65 - x) > 1$. Середина промежутка.

6.11.62. [МЭСИ] $\log_x \sqrt{4x-4} \geqslant 1$. Наименьшее целое решение.

6.11.63. [КФЭИ] $\log_x(1-2x) < 1$.

6.11.64. [МПГУ] $\log_{3-2x} x < 2$.

6.11.65. [МГУ, геогр. ф-т] $\log_x(x^2-2x-3) < 0$.

6.11.66. [ГАУ; МГАП] $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$.

6.11.67. [МПГУ] $\log_{x+3}(x^2-x) < 1$.

6.11.68. [МГТУГА] $\log_{x+1}(x^2-x+1) > 1$.

6.11.69. [МИЭМ] $\log_{2x+1} 16 > 2 + \log_{2x+1} 25$.

6.11.70. [ГАУ] $2\log_5 x - \log_x 125 < 1$.

6.11.71. [ГАУ] $\log_t 2 \leqslant 1$, где $t = \dfrac{x-2}{x+1}$. Решить относительно x.

6.11.72. [СПбГУ] $\log_{x-2}(1-5x^3+x^5) < 0$.

6.11.73. [МГУ, филолог. ф-т] $\log_x(20x+3x^2-x^3) \geqslant 3$.

6.11.74. [МФТИ] $\log_{x^2-\frac{3}{2}x}(3-2^x) > 0$.

6.11.75. [МГУ, мех.-мат.] $\log_{-5x^2-6x} 6^x > 0$.

6.11.76. [ОКИ] $\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{5}{2}x - 1\right) \geqslant -2$.

6.11.77. [МТУСИ] $\log_{2x}(x-4)\cdot\log_{x-1}(6-x) < 0$.

6.11.78. [МТУСИ] $\log_{x+1}(2-x)\cdot\log_{3x}(2x-1) \geqslant 0$.

6.11.79. [МГАП] $\log_x 9 \cdot \log_3 \dfrac{1-5x}{6x-4} \geqslant 2$.

6.11.80. [МГАП] $\log_x 3 \cdot \log_9 \dfrac{5-12x}{12x-8} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

6.11.81. [АГА] $\log_5 x + \log_x\left(\dfrac{x}{3}\right) < \dfrac{2+\log_3 x\cdot\log_5 x}{\log_3 x}$.

6.11.82. [МГУ, ВМиК] $\log_{(x+1)^2} 8 + 3\log_4(x+1) \geqslant 9\frac{1}{4}$.

6.11.83. [МГУ, псих. ф-т] $\dfrac{6-\lg x^4}{3+2\lg x^2}<2.$

6.11.84. [МГУ, геогр. ф-т] $(\log_x 2-1)\cdot\log_2 2x\leqslant\dfrac{3}{2}.$

6.11.85. [МПГУ] $\log_{2x+4}2+\dfrac{2\log_{0,5}\sqrt{3-2x}}{1+\log_2(x+2)}\geqslant\log_{2x+4}\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}\right).$

6.11.86. [МПГУ] $\log_{3-x}(2x-1)+\log_{2x-1}(3-x)<-2.$

6.11.87. [СПбГУ] $\log_{9x}3x+\log_{3x^2}9x^2\leqslant\dfrac{5}{2}.$

6.11.88. [СПбГУ] $\log_{4x}2x-\log_{2x^2}4x^2\geqslant-\dfrac{3}{2}.$

6.11.89. [МФТИ] $\log_{8x^2-0,5}(\log_{0,5}x)<0.$

6.11.90. [МАСИ] $\log_x\Big(\log_3(9^x-6)\Big)\geqslant 1.$

6.11.91. [ВА им. Дзержинского] $\log_x\Big(\log_2(4^x-6)\Big)\leqslant 1.$

6.11.92. [ГАУ] $\log_x\Big(\log_2(4^x-12)\Big)\leqslant 1.$

6.11.93. [МИЭТ] $\log_{\frac{x}{6}}(\log_2\sqrt{6-x})>0.$

6.11.94. [ГАНГ] $\log_{\frac{x}{30}}(\log_x\sqrt{30-x})>0.$ Количество целых решений.

6.11.95. [МГГА] $\log_{|x|}\log_2(4^x-12)\leqslant 1.$

6.11.96. [МПГУ] $\log_{2x}\left(\log_3\dfrac{x+1}{x-1}\right)<\log_{\frac{1}{2x}}\left(\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x-1}{x+1}\right).$

6.11.97. [МГУ, ИСАА] $\log_{\log_{\frac{1}{5}}x}\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)>0.$

6.11.98. [МГАП] $\log_{\log_2\left(\frac{x}{2}\right)}(x^2-10x+22)>0.$

6.11.99. [МГАП] $\log_{\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{3}\right)}(x^2-14x+46)<0.$

6.11.100. [МГУ, геолог. ф-т] $\dfrac{\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{1}{x^{15}}\right)-2}{\log_{125}x^{12}}\leqslant 4-\dfrac{7}{\log_x 5}.$

6.11.101. [МГУ, хим. ф-т] $f\Big(g(x)\Big)<g\Big(f(x)\Big)$, где $f(x)=2^x$, $g(x)=4^x$.

6.11.102. [МГУ, ВМиК] $\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(4x-x^2-2)\geqslant 0.$

12. Тригонометрические неравенства

6.12.1. [МГУ, геолог. ф-т] $4\cos x - \sin 2x > 0$.

6.12.2. [МГУ, геолог. ф-т] $3\sin x + \sin 2x < 0$.

6.12.3. [ЛГПИ] $\sin 2x + \cos^2 2x > 1 + \sqrt{2}$.

6.12.4. [ОмГУ] $3\sin x > 2\cos^2 x$.

6.12.5. [НижГУ] $\cos^2 x - \sin^2 x + \sqrt{3} \cdot \cos x - 2 \leqslant 0$; $|x| \leqslant \frac{\pi}{4}$.

6.12.6. [МГУ, хим. ф-т] $\sqrt{2\sin x} < 1$.

6.12.7. [МГУ, хим. ф-т] $\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$.

6.12.8. [КПИ] $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 < 0$.

6.12.9. [МГУ, ИСАА] $2\sin x - 1 \leqslant \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}$.

6.12.10. [МГУ, ИСАА] $2\cos x - 1 \leqslant \sqrt{8\cos^2 x - 8\cos x - 16}$.

13. Неравенства смешанного типа

6.13.1. [РЭА] $3x + 12 \cdot 3^{\sqrt{x}} \geqslant 4x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9$. Количество целых решений.

6.13.2. [РЭА] $5x^2 \cdot 5^{x^2} + 12 < 3x^2 + 20 \cdot 5^{x^2}$. Количество целых решений.

6.13.3. [МЭСИ] $4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + 3^{\sqrt{x}} \cdot x < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$. Наименьшее целое положительное решение.

6.13.4. [МИФИ] $\sqrt{x^2 - 7{,}5x + 14} \cdot \log_2 |x - 3| \leqslant 0$.

6.13.5. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{7 + 2^{1-x}} \geqslant 7 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$.

6.13.6. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-x-1}} \geqslant 5 - 9 \cdot 3^{x-1}$.

6.13.7. [МГУ, мех.-мат.] $\dfrac{\sqrt{2 - x^2 + 2x} + x - 2}{\log_3\left(\dfrac{5}{2} - x\right) + \log_3 2} \leqslant 0$.

6.13.8. [МГУ, мех.-мат.] $\dfrac{\left[\log_{\sqrt{2}}(x - 3)\right]^2}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 0$.

6.13.9. [МТУСИ] $\sqrt{0{,}5 \cdot (15^x + 9)} \leqslant \sqrt{15^x + 12} - \sqrt{0{,}5 \cdot (15^x - 9)}$.

6.13.10. [МГУ, эк. ф-т] $(2 - 5^{x-2} - 5^{2-x})^{-1} \cdot (x^2 - x - 2) \cdot \sqrt{3 - x} \geqslant 0$.

6.13.11. [МФТИ] $\frac{1}{x} \cdot \log_5\left(\frac{10}{3} - 5^{-x}\right) > 1$.

6.13.12. [МИРЭА] $x \cdot \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3} - x\right) > |x|$.

6.13.13. [МГУ, ИСАА] $\left|x - 4^{1+\sqrt{3-x}}\right| \leqslant \frac{5}{3}x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}}$.

6.13.14. [МГУ, ИСАА] $\left|x - 7^{1-\sqrt{6-x}}\right| \leqslant \frac{4}{3}x - 7 \cdot 7^{\sqrt{6-x}}$.

6.13.15. [МГУК] $\frac{1}{x}\sqrt{10x - 8 - 2x^2} - \left(\sqrt{x^2 - 5x + 4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \log_5 \frac{x}{16} \leqslant 1$.

14. Область определения функций

Найти области определения функций:

6.14.1. [МТУСИ] $y = \sqrt{(64 - x^2) \cdot |x - 10|}$.

6.14.2. [МГГА] $y = \sqrt{(x^2 - 3x - 10) \cdot \lg|x - 3|}$.

6.14.3. [МПГУ] $y = \sqrt{\log_{5-x}(x^2 - 9)}$.

6.14.4. [МЭИ] $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1}}$.

6.14.5. [СПбГТУ] $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}\left(\log_5 x - \log_{125}(3x - 2)\right)$.

6.14.6. [ВШЭ] $y = \sqrt{(x^4 - 11x^2 + 18) \cdot |2x - 5|}$.

6.14.7. [МГОУ] $f(x) = \sqrt{(\log_2^2 4x - \log_2 x^2 - 3)^{-1}}$.

6.14.8. [МГУЛ] $y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(-x)}} + \log_{\frac{1}{4}}(15x - 2x^2 - 13)$. Сумма целых значений.

6.14.9. [МФТИ] $y = \sqrt{\log_4(1 + 6x) + \left|\log_{\frac{1}{8}}(1 + 7x)\right|}$.

15. Системы неравенств

Решить следующие системы:

6.15.1. [МГУ, филолог. ф-т] $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0 \\ 4x + 2y > 3. \end{cases}$ Найти все пары целых чисел.

6.15.2. [МГУ, биолог. ф-т] $\begin{cases} m^2 + n^2 < 16m - 22n - 171 \\ 30m - n^2 > 252 + 14n + m^2. \end{cases}$ Найти все пары целых чисел.

6.15.3. [МГУ, биолог. ф-т] $\begin{cases} p^2 + q^2 < 18p - 20q - 166 \\ 32p - q^2 > p^2 + 12q + 271. \end{cases}$ Найти все пары целых чисел.

6.15.4. [МГАПБ] $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x-1) < 4 \\ \dfrac{x}{x-3} + \dfrac{x-5}{x} < \dfrac{2x}{x-3}. \end{cases}$

6.15.5. [МГУ, геогр. ф-т] $\begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0 \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0. \end{cases}$

6.15.6. [МГУ, геогр. ф-т] $\begin{cases} \log_{x-1}(5-y) < 0 \\ \log_{2-y}(4-x) < 0. \end{cases}$

6.15.7. [МГУ, псих. ф-т] $\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leqslant 2 \\ x + 3y \geqslant 2 - \log_4 3. \end{cases}$

6.15.8. [МГУ, псих. ф-т] $\begin{cases} 3^{x+2y-1} + 2 \cdot 3^{3y-1} \leqslant 2 \\ x + 5y \geqslant 2 - \log_3 2. \end{cases}$

6.15.9. [МИИТ] Найти решения уравнения $2^{x^2-x-1} = 0{,}5 \cdot 8^{2x-4}$, удовлетворяющие условию $\log_{1,1}\left(\log_{1,3} \dfrac{2x-1}{x+1}\right) > 0$.

6.15.10. [МГУ, хим. ф-т] $\begin{cases} 2^{-x} \cdot y^4 - 2y^2 + 2^x \leqslant 0 \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$

16. Геометрические места точек, удовлетворяющие неравенствам

6.16.1. [МАИ] Изобразите на плоскости множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y + 8 \geqslant x^2 + 2x \\ 12 + 5x \leqslant -2y. \end{cases}$

6.16.2. [МАИ] Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, удовлетворяющих условиям $\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ y + |4x| \leqslant 4. \end{cases}$

6.16.3. [ГАУ] На плоскости Oxy построить множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y - 4 \leqslant \sqrt{4y - x^2}$.

6.16.4. [МИЭМ] Показать штриховкой множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\log_{|x-1|-2|x|+4} y > \log_{|x-1|-2|x|+4}(4 - x).$$

6.16.5. [МИЭМ] Показать штриховкой множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\log_{|x+1|-2|x-1|+6} y > \log_{|x+1|-2|x-1|+6}(x + 4).$$

6.16.6. [СПбГУ] Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x \geqslant |x^3 + xy^2|$.

6.16.7. [СПбГУ] Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geqslant |y^3 + x^2y|$.

17. Неравенства с параметрами

6.17.1. [МТУСИ] Найти все целые значения параметра b, при которых значение $x = 2$ удовлетворяет неравенству $\dfrac{x^3 - x^2}{b^2x^2 + x + 2} \leqslant \dfrac{x^2 - 3}{b^2x + b - 1}$.

6.17.2. [МТУСИ] Найти, при каких целых значениях параметра a значение $x = 1$ удовлетворяет неравенству $\dfrac{2x^3 - 1}{ax + 2x^4} < \dfrac{x}{ax^5 + 5}$.

6.17.3. [РЭА] При каком m область определения функции $f(x) = \sqrt{2mx - x^2 - 5} + \sqrt{1 - x}$ состоит из одной точки?

6.17.4. [РЭА] При каком n область определения функции $f(x) = \sqrt{x - 7} - \sqrt{n - 4x - x^2}$ состоит из одной точки?

6.17.5. [МГТУ] При каких значениях p функция

$$y = \sqrt{(3p + 1)x - p(4 + x^2)}$$

определена при всех действительных значениях x?

6.17.6. [МАМИ] При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + 2ax + 4 > 0$ выполняется на всей числовой оси?

6.17.7. [РЭА] Найти наименьшее целое значение a, при котором неравенство $ax^2 + 4x - 1 + 2a > 0$ выполняется для всех значений x.

6.17.8. [МИЭМ] Доказать, что при $a = 5$ неравенство

$$4^x + (a - 1) \cdot 2^x + (2a - 5) > 0$$

выполняется при любых значениях x. Найти все другие значения параметра a, при которых неравенство выполняется для всех x.

6.17.9. [МИЭМ] Доказать, что при $a = 2$ неравенство

$$9^x + (2a + 4) \cdot 3^x + 8a + 1 > 0$$

выполняется при любых значениях x. Найти все другие значения параметра a, при которых неравенство выполняется для всех x.

6.17.10. [ГАУ] При каких значениях параметра a неравенство $36^x + a \cdot 6^x + a + 8 \leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение?

6.17.11. [ГАУ] При каких значениях параметра p неравенство $25^x - p \cdot 5^x + 3 - p \leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение?

6.17.12. [МГУ, эк. ф-т] Найти все значения a, при которых неравенство $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$ выполняется для любого x.

6.17.13. [МГУ, биолог. ф-т] Найти все значения величины x, при которых неравенство $(2c-6)x^2 + (32-10c)x - (8+c) < 0$ выполняется для всех c, удовлетворяющих условию $2 < c < 4$.

6.17.14. [МГУ, биолог. ф-т] Найти все значения величины x, при которых неравенство $(4-2a)x^2 + (13a-27)x + (33-13a) > 0$ выполнено для всех $a \in (1;3)$.

6.17.15. [РЭА] При каком наибольшем целом значении a каждое решение неравенства $2x^2 + 5x + 2 \leqslant 0$ является решением неравенства $x^2 + ax + a - 7 \leqslant 0$?

6.17.16. [РЭА] Найти сумму всех целых значений a, при которых каждое решение неравенства $2x^2 - 9x + 4 \leqslant 0$ является решением неравенства $|2x - a| \leqslant 5$.

6.17.17. [ГАУ] При каких значениях параметра a неравенство

$$1 + \log_5(x^2+1) \geqslant \log_5(ax^2 + 4x + a)$$

выполнено при всех значениях x?

6.17.18. [РЭА] Найти сумму всех целых значений a, при которых неравенство $\dfrac{1 - ax - x^2}{x^2 + 2x + 2} \leqslant 2$ выполнено для всех x.

6.17.19. [МЭСИ] При каком наибольшем целом значении a система неравенств $-3 < \dfrac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$ удовлетворяется при всех x?

6.17.20. [МГАП] При каких значениях параметра a неравенство $(a-x)\cdot\sqrt{3 + x - x^2} \geqslant 0$ имеет только два решения? Указать эти решения.

6.17.21. [МГУ, ф-т почвовед.] Для каких значений a система неравенств $\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geqslant 0 \\ x \leqslant 2 \end{cases}$ выполняется хотя бы при одном значении x?

6.17.22. [МГУ, ф-т почвовед.] При каких значениях параметров a и b система неравенств $\begin{cases} a + \sin bx \leqslant 1 \\ x^2 + ax + 1 \leqslant 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

6.17.23. [ГАУ] При каждом значении параметра $a > 0$ найти все решения неравенства $\sqrt{2ax - x^2} \geqslant a - x$.

6.17.24. [МГУ, физ. ф-т] Для каждого значения a решить неравенство $3^{\sqrt{x+1}} > 2^{a-1}$.

6.17.25. [ГАУ] При каждом значении параметра k найти все решения неравенства $\log_3(x-2k+1)+2 \leqslant \log_3(x+k-5)$.

Группа В

18. Иррациональные неравенства и неравенства с модулями

6.18.1. [МГУ, мех.-мат.] $\dfrac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \leqslant x$.

6.18.2. [МГУ, мех.-мат.] $\dfrac{\sqrt{1+x^3}+x-2}{x-1} \geqslant x+1$.

6.18.3. [СПбГУ] $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}} > \dfrac{2}{x}$.

6.18.4. [МИФИ] $\sqrt{x^3+x^2-2x+1} \leqslant x$.

6.18.5. [МЭСИ] $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}} > \dfrac{x-1}{x}$. Наименьшее целое решение.

6.18.6. [СПбГУ] $\sqrt{x^3+3x} > x^2-6x+3$.

6.18.7. [СПбГУ] $2\cdot\sqrt{x^3+4x} > x^2-8x+4$.

6.18.8. [ДВГУ; МЭСИ] $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x(x+7)} < 35-2x$.

6.18.9. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{4v^2-4v-84}+\sqrt{4v^2-6v-85} \leqslant |2v+1|$.

6.18.10. [МГУ, ВМиК] $\sqrt{9v^2-48v-21}+\sqrt{9v^2-51v-15} \leqslant |3v-6|$.

19. Показательные и логарифмические неравенства

6.19.1. [МЭСИ] $4^x \leqslant 3\cdot 2^{\sqrt{x}+x}+4^{\sqrt{x}+1}$. Наибольшее решение.

6.19.2. [МГУ, мех.-мат.] $\dfrac{1}{4}\cdot x^{\frac{1}{2}\cdot\log_2 x} \geqslant 2^{\frac{1}{4}\cdot\log_2^2 x}$.

6.19.3. [МГУ, мех.-мат.] $3^{\frac{1}{4}\cdot\log_3^2 x} \leqslant \dfrac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}\cdot\log_3 x}$.

6.19.4. [МАИ] $(x^2-x+1)^{x^2-2,5x+1} < 1$.

6.19.5. [МЭСИ] $(x^2-x+2)^{\log_{0,6}\frac{2x-3}{x+1}} > 1$. Наибольшее целое решение.

6.19.6. [МТУСИ] $x\cdot 10^{\log_x 11} < 110$.

6.19.7. [МТУСИ] $x \cdot 3^{\log_x 4} > 12$.

6.19.8. [МТУСИ] $x \cdot 2^{\log_x 3} \leqslant 6$.

6.19.9. [МЭИ] $81^x - 3 \cdot 27^x - 12 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 9 > 0$.

6.19.10. [МГАП] $3 \cdot \log_{(2,5+x)^2}(x^2+12x+32) \leqslant 4 \cdot \log_{(-2,5-x)}(x^2+12x+32)$.

6.19.11. [МГАП] $\log_{(-0,5-x)}(x^2+8x+12) - 5 \cdot \log_{(x+0,5)^2}(x^2+8x+12) \geqslant 0$.

6.19.12. [МФТИ] $\log_3(1+x) > \Big(1 - \log_x(1-x)\Big) \cdot \log_3 x$.

6.19.13. [МГУ, мех.-мат.] $\log_{(2-5x)} 3 + \dfrac{1}{\log_2(2-5x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}$.

6.19.14. [МГУ, мех.-мат.] $\log_{(7x-4)} 3 + \dfrac{1}{\log_2(7x-4)} \geqslant \dfrac{1}{\log_6(9x^2-2x-2)}$.

6.19.15. [МГАП] $\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5-x)^4 \geqslant -4\log_{\frac{x-3}{x+2}}(4-x)$.

6.19.16. [МГАП] $\log_{\frac{x-5}{x+6}}(x-8)^6 \leqslant -6\log_{\frac{x+6}{x-5}}(x+7)$.

6.19.17. [МЭСИ] $\log_{x^2} \dfrac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \dfrac{1}{2}$. Наибольшее решение.

6.19.18. [МЭСИ] $\log_3 \dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 0$. Наибольшее решение.

6.19.19. [РУДН] $(2^x - 3^x) \cdot \log_x(x^2-5x+7) > 0$.

6.19.20. [МАИ] $\left|\log_{(x+5)}(x+2)^2\right| - 2 \leqslant 0$.

6.19.21. [ГФА] $\log_{\frac{1}{x^2}}\left[\dfrac{2\cdot(x-2)}{(x+1)\cdot(x-5)}\right] \geqslant \dfrac{1}{2}$.

6.19.22. [РГМУ] $\log_{|x-3|}|x^2-5x+6| < 2$.

6.19.23. [ГФА] $\log_{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}(x^2-3x+1) \geqslant 0$.

6.19.24. [МГАП] $\log_{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}(x^2+x) \geqslant 0$.

6.19.25. [МГУ, эк. ф-т] $\dfrac{1}{2}\cdot\log_{(x-1)}(x^2-8x+16)+\log_{(4-x)}(-x^2+5x-4) > 3$.

6.19.26. [ДВГУ] $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2}-x-1) \geqslant 1$.

6.19.27. [ГАУ] $\log_{(x+1)^2} 8 + 3 \cdot \log_4(x+1) \geqslant \dfrac{259}{2\pi} \cdot \arcsin\left(\cos\dfrac{11\pi}{7}\right)$.

6.19.28. [МГУ, ВМиК] $\dfrac{2\cdot\log_{(1-3\cdot|x|)}(42x^2-14\cdot|x|+1)}{\log_{(1-3\cdot|x|)}\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2} \leqslant 1$.

6.19.29. [СПбГТУ] $(4^{-x}+3\cdot 2^x)^{\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} - 2} \leqslant 1$.

20. Тригонометрические неравенства

6.20.1. [РЭА] $x^2 \cdot \sin x + 18 > 2x^2 + 9\sin x$. Количество целых решений.

6.20.2. [МГУ, ИСАА] $\log_{\frac{1}{7}}(10 - x^2) \cdot \log_{\frac{1}{2}} |\sin x| > 0$.

6.20.3. [МГУ, ИСАА] $\log_{\frac{1}{2}} |\cos x| \cdot \log_5(x^2 - 9) < 0$.

6.20.4. [МАДИ] $0{,}5^{2\sin(5x - 30^\circ)} > 0{,}5^p$, где $p = -2^{0{,}5}$. Середина промежутка, принадлежащего отрезку $[0^\circ; 90^\circ]$.

6.20.5. [МГТУ] $4^{\sin^2 x} < \dfrac{12}{4^{\sin^2 x} - 1}$.

6.20.6. [СПбГТУ] $\left(-5 + (\lg 103)\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec}^2 x\right) \cdot \dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + x)}{\pi x - 1} < 0$.

6.20.7. [МГУ, ИСАА] $\sqrt{4x - x^2 - 3} \cdot (\sqrt{2}\cos x - \sqrt{1 + \cos 2x}) \geqslant 0$.

6.20.8. [СПбГУ] $\dfrac{1}{1 - \operatorname{ctg} x} \leqslant \sqrt{1 + \operatorname{ctg} x}$.

6.20.9. [МГУ, ВМиК] Найти все положительные значения t, при каждом из которых выполнено неравенство $\dfrac{1}{\log_{6\cdot\sin t}\dfrac{1}{6}} - \dfrac{1}{\log_6\dfrac{\sin t}{6}} \leqslant 0$.

6.20.10. [МГУ, ВМиК] Найти все отрицательные значения u, при каждом из которых выполнено неравенство $\dfrac{1}{\log_{3\cdot\cos u} 3} + \dfrac{1}{\log_3\dfrac{\cos u}{3}} \geqslant 0$.

6.20.11. [МПГУ] $\dfrac{\sqrt{3} + \cos x}{2\sin^3 x - \cos x \cdot \sin 2x} > \dfrac{3}{2\sin 4x}$.

6.20.12. [МПГУ] $\dfrac{3}{\sin 4x} < \dfrac{2\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{4\cos^4 x - \sin^2 2x}$.

21. Неравенства, нестандартные по виду или по способу решения

6.21.1. [РЭА] $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) < 2x - 1$. Наименьшее целое решение.

6.21.2. [МГУ, филолог. ф-т] $\dfrac{9}{3x + 2} > \dfrac{1 + \log_3(x + 6)}{x}$.

6.21.3. [МГУ, псих. ф-т] $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \leqslant \dfrac{\sin x - 3}{\sqrt{2}}$.

6.21.4. [МГУ, псих. ф-т] $3 \cdot \sin 2\pi x \geqslant \sqrt{2} \cdot \sin 4\pi x + 3 \cdot \cos 2\pi x + \sqrt{32}$.

6.21.5. [МГУ, мех.-мат.] Найти все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющих неравенству

$$\log_2(2x+3y-6z+3)+\log_2(3x-5y+2z-2)+\log_2(2y+4z-5x+2) > z^2-9z+17.$$

6.21.6. [МГУ, мех.-мат.] Найти все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{\sqrt{7+2x-4y+3z}} + \frac{3}{\sqrt{2y+2z-5x}} > \frac{2}{\sqrt{3x+2y-5z-4}} + x^2 + 7x + 11.$$

6.21.7. [МАИ]

$$\sin\frac{\pi}{2} \geqslant \cos\pi + \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} + \left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\sin 5x} + \left(\sin\frac{3\pi}{10}\right)^{\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

22. Доказательство неравенств

6.22.1. [ДВГУ] Докажите неравенство $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1} < 15$, если $a+b+c=1$.

6.22.2. [МГУ, псих. ф-т] Докажите, что каждое решение неравенства $\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-1} > 2$ удовлетворяет неравенству

$$x + 2\cdot\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^4-2x^2+1} > 1 + 2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

6.22.3. [МГУ, псих. ф-т] Доказать, что все решения неравенства $\log_2(x-1) + \log_3(x^2-1) > 2$ удовлетворяют неравенству

$$\log_3(x^2-1)\cdot\log_3\Big(9(x^2-1)\Big) > 2\log_2(x-1) - \log_2^2(x-1).$$

6.22.4. [МГУ, геогр. ф-т] Доказать, что при всех $x > 0$ выполняется неравенство $x^2 + \pi x + \frac{15}{2}\pi\cdot\sin x > 0$.

23. Неравенства с параметрами

6.23.1. [МГУ, ИСАА] Найти все значения параметра a, при которых неравенство $x^2+4x+6a\cdot|x+2|+9a^2 \leqslant 0$ имеет не более одного решения.

6.23.2. [МГУ, ф-т почвовед.] Найдите все значения параметра a, при которых все числа x из отрезка $[1;5]$ удовлетворяют неравенству

$$3ax + 2\sqrt{3x+1} - 6x + a - 5 < 0.$$

6.23.3. [МГУ, ф-т почвовед.] Найти все значения параметра a, при которых все числа x из отрезка $[-1; 3]$ удовлетворяют неравенству

$$2ax + 2\sqrt{2x+3} - 2x + 3a - 5 < 0.$$

6.23.4. [СПбГУ] Найти все вещественные значения a такие, при которых неравенство $a \cdot (2 + \sin^2 x)^4 + \cos^2 x + a > 11$ выполняется для всех x.

6.23.5. [МГУ, псих. ф-т] Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leqslant -\dfrac{x^2+9}{a+\cos x} - a$ имеет единственное решение.

6.23.6. [МГУ, хим. ф-т] Найти все значения p, при которых множество решений неравенства $(p - x^2) \cdot (p + x - 2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 1$.

6.23.7. [ВА им. Дзержинского] При каких значениях параметра a неравенство $2 > |x + a| + x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение?

6.23.8. [МГУ, эк. ф-т] Найти все значения параметра a, при которых неравенство $|\sin^2 x - 2(a-1) \cdot \sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x + 2 - a| \leqslant 6$ выполняется для любых значений x.

6.23.9. [МГУ, мех.-мат.] Найти все пары чисел a и b, при которых неравенство $|2x^2 + ax + b| > 1$ не имеет решений на отрезке $[1; 3]$.

6.23.10. [МГУ, мех.-мат.] Найти все значения x, для каждого из которых неравенство $(a+2)x^3 - (1+2a)x^2 - 6x + (a^2 + 4a - 5) > 0$ выполняется хотя бы при одном значении $a \in [-2; 1]$.

6.23.11. [МГУ, геолог. ф-т] Найти все значения параметра a, при которых неравенство $9^x < 20 \cdot 3^x + a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

6.23.12. [МГУ, псих. ф-т] Найти наибольшее значение величины a, при котором неравенство $a\sqrt{a} \cdot (x^2 - 2x + 1) + \dfrac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leqslant \sqrt[4]{a^3} \cdot \left|\sin \dfrac{\pi x}{2}\right|$ имеет хотя бы одно решение.

6.23.13. [МГУ, эк. ф-т] Найти все $x \in [-3; 1]$, для которых неравенство $x \cdot \Big(\pi \cdot (x+1) - 4\,\mathrm{arctg}(3m^2 + 12m + 11)\Big) > 0$ выполняется при любых целых m.

6.23.14. [МГУ, филолог. ф-т] При каком значении параметра a система неравенств $\begin{cases} y \geqslant x^2 + 2a \\ x \geqslant y^2 + 2a \end{cases}$ имеет единственное решение?

6.23.15. [МГУ, филолог. ф-т] При каком значении параметра b система неравенств $\begin{cases} y \geqslant (x-b)^2 \\ x \geqslant (y-b)^2 \end{cases}$ имеет единственное решение?

6.23.16. [МУПОЧ «Дубна»] Найти все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases} x^2 + a^2 + a^4 \leqslant 2a^4 \\ 3^{ax+2x} - 3^{-a} \geqslant 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

6.23.17. [МГУ, эк. ф-т] Найти все значения параметра c, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства
$x^2 - 3x + 3|x + c| + c \leqslant 0$ *максимально.*

6.23.18. [МГУ, ВМиК] Найти все значения a, при каждом из которых неравенство $\pi + \frac{6}{5}(x^2 + ax) + \cos(x^2 + ax) + \sin\left(2x^2 + 2ax + \frac{\pi}{3}\right) < 0$ выполняется для каждого $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

6.23.19. [МТУСИ] Решите неравенство $x + \sqrt{a - x} > 0$, где a — параметр, удовлетворяющий условию $a \geqslant 0$.

6.23.20. [МГАПИ] Для различных значений параметра m решить неравенство $m \cdot |x - 4| > x + 1$.

6.23.21. [МИФИ] Для всех действительных значений параметра a решить неравенство $12 \cdot 11^{\sqrt{3-x}} + a \cdot 11^{x-2} > 11^{x+\sqrt{3-x}-2} + 12a$.

6.23.22. [МИФИ] Для всех действительных значений параметра c решить неравенство $c + 1 < (c + 2) \cdot 3^{\sqrt{x-1}}$.

6.23.23. [ГАУ] При каждом значении параметра a найти все решения неравенства $\frac{2}{3} \leqslant \log_{64}(x + a - 2) + \log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{x - a + 8}$.

6.23.24. [МИФИ] Для всех действительных значений параметра a решить неравенство $\log_2 ax + \log_a x \leqslant 1$.

6.23.25. [СПбГЭУ] Дана функция $f(x) = \log_a(1 - 8a^{-x})$.

а) Найти область определения функции $f(x)$;

б) При $a = \frac{1}{2}$ решить неравенство $f(x) > x + 5$;

в) Решить неравенство $f(x) + 2x > 0$ при всех допустимых a.

6.23.26. [МЭИ] Для каждого a решить неравенство $x^2 - 3 \leqslant \left(a - \frac{3}{a}\right)x$.

6.23.27. [МЭИ] Для каждого значения параметра a решить неравенство $ax^3 + 9x \geqslant -3(a + 1)x^2$.

6.23.28. [МГУ, геолог. ф-т] Для a, $b > 0$ решить неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}} > \frac{1}{x} - \frac{1}{b}.$$

6.23.29. [ГАУ] При каждом значении параметра а найти все решения неравенства $ax \leqslant |x^2 - 5x + 6|$.

6.23.30. [МГУ, ВМиК] Для каждого значения параметра а решить неравенство $\left|\dfrac{1}{x} + 2a\right| \leqslant x$.

24. Разные задачи

6.24.1. [РЭА] Найти значения x, для которых $\min\left\{1 - x^2, \dfrac{1+x}{2}\right\} \geqslant 0{,}5$. В ответе записать число, равное $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$, где a, b — границы множества решений.

6.24.2. [МГУ, мех.-мат.] Найти все значения x, при которых большее из чисел $3x - 4$ и $\log_2(5 \cdot 2^{2x-4} - 2^{x-1} + 1)$ положительно.

6.24.3. [МГУ, мех.-мат.] Найти все значения x, при которых меньшее из чисел $3x + 5$ и $\log_2(5 \cdot 2^{2x+2} - 2^{x+2} + 1)$ отрицательно.

6.24.4. [МГУ, эк. ф-т] Найти периметр фигуры, заданной системой неравенств $\begin{cases} 2 \cdot |x+2| \cdot \arcsin(y-1)^2 \leqslant \pi(x+2) \\ 2 \cdot |y-1| - x \geqslant 0. \end{cases}$

6.24.5. [МИЭМ] Пусть числа x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y - x \leqslant 5 \\ y + 4x \leqslant -5 \\ 3y + 2x \geqslant -5. \end{cases}$$

Покажите, что при этом $-4 \leqslant x \leqslant -1$ и найдите все значения, которые могут принимать: а) сумма $x^2 + y^2$; б) отношение $\dfrac{y}{x}$.

6.24.6. [НМУ] Для любых вещественных x и y выполняется неравенство $f(x) - f(y) \leqslant (x-y)^2$. Найдите все такие функции f.

7. Текстовые задачи

Группа А

1. Задачи на движение

7.1.1. [МГАЛП] Турист проехал расстояние между двумя городами за три дня. В первый день он проехал $\frac{1}{5}$ всего пути и еще 60 км, во второй —

$\frac{1}{4}$ всего пути и еще 20 км и в третий день — $\frac{23}{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найти расстояние между городами.

7.1.2. [ОмГУ] Дорога от пункта A до пункта B идет сначала по ровному месту, затем в гору. Автомобиль, выехав из A в B, двигался по ровному месту со скоростью 70 км/ч, в гору — со скоростью 60 км/ч. Доехав до пункта B, он тотчас повернул назад и двигался под гору со скоростью 80 км/ч, а по ровному участку — со скоростью 75 км/ч. Найдите длину ровного участка пути, если на весь путь от A до B и назад автомобиль затратил 3 ч 29 минут и проехал за это время 250 км.

7.1.3. [МЭСИ] Из города A в город B выезжает велосипедист, а через 3 часа после его выезда из города B навстречу ему выезжает мотоциклист, скорость которого в 3 раза больше, чем скорость велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между A и B. Сколько часов в пути до встречи был велосипедист?

7.1.4. [МПГУ] Мотоциклист задержался у шлагбаума на 24 минуты. Увеличив после этого свою скорость на 10 км/ч, он наверстал опоздание за 80 км. Определить скорость мотоциклиста до задержки.

7.1.5. [МИЭТ] Первую четверть пути поезд двигался со скоростью 80 км/ч, а оставшуюся часть — со скоростью 60 км/ч. С какой средней скоростью двигался поезд?

7.1.6. [МПУ] Самолет летел сначала со скоростью 220 км/ч. Когда ему осталось лететь на 385 км меньше, чем он пролетел, скорость его стала равной 330 км/ч. Средняя скорость самолета на всем пути 250 км/ч. Какое расстояние пролетел самолет?

7.1.7. [МЭСИ] Пассажир едет в трамвае и замечает, что параллельно трамвайной линии в противоположном направлении идет его приятель. Через минуту человек вышел из вагона и, чтобы догнать приятеля, пошел вдвое быстрее его, но в 4 раза медленнее трамвая. Через сколько минут пассажир догонит приятеля?

7.1.8. [РЭА] По графику поезд должен проходить перегон AB, равный 20 км, с постоянной скоростью. Но с заданной скоростью он прошел полпути и остановился на 3 минуты; чтобы вовремя прийти в пункт B, ему пришлось остальные полпути идти на 10 км/ч быстрее. Второй раз поезд простоял там же уже 5 минут. С какой скоростью он должен был идти оставшуюся часть пути, чтобы прибыть в пункт B по расписанию?

7.1.9. [МГГА] Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 100 км, одновременно выехали 2 велосипедиста. Первый едет со скоростью на 30 км/ч быстрее, чем второй, и приезжает в пункт B на 3 часа раньше. Найти скорость каждого.

7.1.10. [МТУСИ] Пассажир проехал на поезде 120 км, пробыв на станции 40 минут, вернулся с обратным поездом, проходившим в час на 6 км больше, чем первый. Общая продолжительность поездки составила 8 часов. Сколько километров в минуту проезжает каждый поезд?

7.1.11. [МТУСИ] Два туриста выезжают одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Первый проезжает в час на 2 км больше второго и приезжает в город B на час раньше, чем второй в A. Расстояние между городами 40 км. Какова скорость каждого туриста?

7.1.12. [МАДИ] Из города в колхоз, находящийся на расстоянии 20 км, была отправлена грузовая машина; через 8 минут вслед за ней вышел автобус, который приехал в колхоз одновременно с грузовой машиной. Сколько километров в час проходил автобус, если он шел на 5 км/ч быстрее грузовика?

7.1.13. [ВА им. Дзержинского] Путешественник предполагал пройти 30 км с некоторой скоростью. Но с этой скоростью он шел всего 1 час, а затем стал проходить в час на 1 км меньше. В результате он прибыл в конечный пункт на 1 час 15 минут позднее, чем предполагал. С какой скоростью путешественник предполагал пройти путь?

7.1.14. [РЭА] Велосипедист каждую минуту проезжает на 500 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 120 км он затрачивает времени на 2 часа больше, чем мотоциклист. Вычислить скорость велосипедиста.

7.1.15. [РЭА] Велосипедист проехал 25 км. При этом один час он ехал по ровной дороге, а один час — в гору. Какова скорость (в км/ч) велосипедиста по ровной дороге, если каждый километр по ровной дороге он проезжал на 2 минуты быстрее, чем в гору?

7.1.16. [МГТУ] Поезд вышел из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 230 км. Через час навстречу ему вышел из пункта B второй поезд, скорость которого на 15 км/ч больше, чем у первого. Определите скорости поездов, если известно, что они встретились на расстоянии 120 км от пункта A.

7.1.17. [МИЭМ] Из пунктов A и B навстречу друг другу выезжают одновременно и с одинаковыми скоростями два автомобиля и встречаются через 5 ч 30 мин после выезда в пункте C. Если бы скорость одного из этих автомобилей была бы на 10 км/ч больше, то они встретились бы в пункте, отстоящем от C на расстояние 25 км. Найти скорость автомобилей.

7.1.18. [МИФИ] Из города A в город B выезжает первая автомашина, которая проезжает расстояние от A до B за 6 часов. Затем навстречу ей из города B выезжает вторая автомашина, преодолевающая то же расстояние за 8 часов. К моменту встречи вторая автомашина преодолела расстояние в $1\frac{4}{5}$ раза меньше, чем первая. На сколько часов позже выехала вторая автомашина?

7.1.19. [МАДИ] Пешеход и велосипедист отправляются одновременно навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми 40 км, и встречаются спустя 2 часа после отправления. Затем они продолжают путь, причем велосипедист прибывает в A на 7 часов 30 минут раньше, чем пешеход в B. Найти скорость пешехода и велосипедиста (в км/ч).

7.1.20. [МЭИ] Из пунктов A и B, расстояние между которыми 24 км, вышли навстречу друг другу два пешехода и встретились через 2 часа 24 минуты. Первый пешеход проходит путь от A до B на 2 часа быстрее, чем второй. За сколько времени каждый из них пройдет расстояние между пунктом A и пунктом B? С какими скоростями двигаются пешеходы?

7.1.21. [МЭИ] Первый поезд отправляется из пункта A в пункт B. Одновременно с ним из B в A отправляется второй поезд. Встретившись через 50 минут, поезда следуют дальше, и первый поезд прибывает в пункт B на 75 минут раньше, чем второй — в пункт A. Найти расстояние между A и B, если скорость первого поезда равна 120 км/ч.

7.1.22. [МГТУ] Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу: один из пункта A в пункт B, другой — из B в A. После встречи один из них находился в пути еще 2 часа, а другой $\frac{9}{8}$ часа. Определите скорости автомобилей, если расстояние между A и B равно 210 км.

7.1.23. [МГУ, филолог. ф-т] Расстояние между городами A и B равно 80 км. Из A в B выехала машина, а через 20 минут — мотоциклист, скорость которого равна 90 км/ч. Мотоциклист догнал машину в пункте C и повернул обратно. Когда мотоциклист проехал половину пути от C к A, машина прибыла в B. Найти расстояние от A до C.

7.1.24. [МПГУ] Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно отправились пешеход и велосипедист. После встречи пешеход продолжал свой путь в B, а велосипедист доехал до A, повернул назад и тоже поехал в B. Пешеход пришел в B на 1 час позже велосипедиста. Сколько времени прошло до первой встречи, если известно, что скорость пешехода в 4 раза меньше скорости велосипедиста?

7.1.25. [РЭА] Три велосипедиста из одного поселка в одном направлении выезжают с интервалов в 1 час. Первый двигался со скоростью 12 км/ч, второй — 10 км/ч. Третий велосипедист, имея большую скорость, догнал второго, а еще через 2 часа догнал первого. Найти скорость третьего велосипедиста.

7.1.26. [РЭА] Из M в N со скоростью 80 км/ч выезжает автомобиль. Одновременно из N в M со скоростью 60 км/ч выезжает второй автомобиль. Через 1 час вслед за первым автомобилем выезжает третий автомобиль, который сначала догоняет первый автомобиль, а еще через час после этого встречается со вторым. Найти скорость третьего автомобиля, зная, что она меньше 200 км/ч, а расстояние между пунктами M и N равно 860 км.

7.1.27. [МГУ, биолог. ф-т] Из пункта A по одному и тому же маршруту одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкового автомобиля постоянна и составляет $\frac{6}{5}$ скорости грузовика. Через 30 минут вслед за ними из того же пункта выехал мотоциклист со скоростью 90 км/ч. Найти скорость легкового автомобиля, если известно, что мотоциклист догнал грузовик на 1 час раньше, чем легковой автомобиль.

7.1.28. [СПбГУ] Из пункта A в пункт B выехал грузовик. Через час из пункта A выехал легковой автомобиль. Через 2 часа после выезда он догнал грузовик и прибыл в пункт B на 3 часа раньше грузовика. Сколько времени грузовик ехал от A до B?

7.1.29. [СПбГУ] Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Спустя 3 часа из пункта A в пункт B отправился мотоциклист. После обгона велосипедиста он за один час достиг пункта B. При этом он опередил велосипедиста на 1,5 часа. Сколько времени ехал велосипедист?

7.1.30. [МГАП] Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму до конца пути осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому до конца пути осталось пройти 15 км. Сколько километров остается пройти второму пешеходу после того, как первый закончит переход?

7.1.31. [МТУСИ] Моторная лодка и парусник, находясь на озере на расстоянии 30 км друг от друга, движутся навстречу друг другу и встречаются через час. Если бы моторная лодка находилась в 20 км от парусника и догоняла его, то на это потребовалось бы 3 часа 20 минут. определить скорости лодки и парусника.

7.1.32. [МТУСИ] Одновременно начали гонки с одного старта в одном направлении два мотоциклиста: один со скоростью 80 км/ч, другой со скоростью 60 км/ч. Через полчаса с того же старта в том же направлении отправился третий гонщик. Найдите скорость третьего гонщика, если известно, что он догнал первого на 1 час 15 минут позже, чем второго.

7.1.33. [СПбГУ] Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два пешехода. Когда первый пешеход прошел четверть пути от A до B, второму до середины пути оставалось идти 1,5 км, а когда второй пешеход прошел половину пути от B до A, первый находился на расстоянии 2 км от второго. Найдите расстояние от A до B, если известно, что второй пешеход шел быстрее первого.

7.1.34. [СПбГУ] Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в пункт B. Когда первый проехал треть пути, второму оставалось до середины пути ехать 2,5 км. Когда второй проехал половину пути, первый отставал от него на 3 км. Найдите расстояние от A до B.

7.1.35. [РЭА] Из пунктов A и B одновременно отправляются два автомобиля в одном направлении. Через некоторое время они оказываются в пункте C, удаленном от B на половину расстояния AB. Найти время, которое затрачивает на прохождение расстояния AB автомобиль, имеющий большую скорость, если другому автомобилю для этого требуется на 2 часа больше.

7.1.36. [ГФА] В озеро впадают две реки. Лодка отплывает от пристани A на первой реке, плывет 36 км вниз по течению до озера, далее 19 км по озеру (в озере течения нет) и 24 км по второй реке вверх против течения до пристани B, затратив 8 часов на путь от A до B. Из этих 8 часов 2 часа лодка плывет по озеру. Скорость течения первой реки на 1 км/ч больше, чем скорость течения второй реки. Найти скорость течения каждой реки. (Собственная скорость лодки, т. е. скорость лодки в стоячей воде, постоянна.)

7.1.37. [МГАПБ] В течение 7 ч 20 мин судно прошло вверх по реке 35 км и вернулось обратно. Скорость течения равна 4 км/ч. С какой скоростью судно шло по течению?

7.1.38. [ГФА] В реку впадает приток. Пароход отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 80 км до реки, далее по реке вверх против течения до пристани B, затратив 18 часов на весь путь от A до B. Затем пароход возвращается обратно. Время обратного движения от B до A по тому же пути равно 15 часам. Собственная скорость парохода, т. е. скорость в стоячей воде, равна 18 км/ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Каково расстояние от пристани A до пристани B и какова скорость притока?

7.1.39. [МГТУ] Пароход прошел 4 км против течения реки и затем еще 33 км по течению, затратив на все 1 час. Найти скорость парохода в стоячей воде, если скорость течения реки 6,5 км/ч.

7.1.40. [РЭА] Моторная лодка спустилась вниз по течению реки на 18 км и вернулась обратно, затратив на весь путь 1 ч 45 мин. Найти собственную скорость лодки, если известно, что 6 км по течению реки лодка проплывает на 5 минут быстрее, чем против течения.

7.1.41. [РЭА] Моторная лодка спустилась вниз по течению реки на

20 км и поднялась вверх по притоку еще на 10 км, затратив на весь путь 1 ч 10 мин. На обратный путь лодке потребовалось 1 ч 20 мин. Зная, что скорость течения реки равна скорости течения притока, найти собственную скорость лодки.

7.1.42. [ГАУ] Если пароход и катер плывут по течению, то расстояние от пункта A до пункта B пароход проходит в полтора раза быстрее, чем катер; при этом катер каждый час отстает от парохода на 8 км. Если же они плывут против течения, то пароход проходит путь от B до A в два раза быстрее катера. Найти скорости парохода и катера в стоячей воде.

7.1.43. [МЭСИ] Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 сек. Если пассажир идет с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 сек. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньках движущегося эскалатора?

7.1.44. [ГАУ; СГУ] Колонна войск протяжением 2 км движется по шоссе маршем со скоростью 3 км/ч. Конный вестовой выезжает из конца колонные в ее начало, передает приказание и тотчас же отправляется обратно. На проезд туда и обратно вестовой тратит 30 минут. Определите скорость вестового, если она на всем пути была одинакова.

7.1.45. [МГТУ] Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 3 с быстрее второго и догоняет второе тело каждые полторы минуты. За какое время каждое тело проходит окружность?

7.1.46. [МГТУ] Из точки A, лежащей на окружности, выходят одновременно два тела, движущиеся равномерно по этой окружности в противоположных направлениях. Через некоторое время они встретились, и оказалось, что первое тело прошло на 10 см больше второго. После встречи тела продолжали путь, причем первое тело пришло в точку A через 9 с, а второе — через 16 с после встречи. Найдите длину окружности, по которой двигались тела.

7.1.47. [МГТУ] На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходит круг на 2 мин быстрее другого и через час обошел его ровно на круг. За какое время каждый лыжник проходил круг?

7.1.48. [МТУСИ] По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем вторая, и поэтому успевает сделать в одну минуту на 2 оборота больше. Сколько оборотов в минуту совершает каждая точка?

7.1.49. [ГАУ] Два туриста вышли из A в B одновременно, причем первый турист каждый километр проходит на 5 минут быстрее второго. Первый, пройдя пятую часть пути, вернулся в A и, пробыв там 10 минут, снова пошел в B. При этом в B оба туриста пришли одновременно.

Каково расстояние от A до B, если второй турист прошел его за 2,5 часа?

7.1.50. [РЭА] Одновременно из пунктов A и C в пункт B отправляются два туриста. Через 4 часа они прибыли в пункт B. Второй турист каждый километр проходил на 3 минуты быстрее первого, так как путь от C до B на 4 км длиннее пути от A до B. Определить скорость первого туриста.

7.1.51. [МГУ, хим. ф-т] Из пункта A в пункт B доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист; проехав $\frac{2}{3}$ расстояния от пункта A до пункта B, он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт B (время, потребовавшееся на передачу почты, считается равным 0). При этом почта была доставлена из пункта A в пункт B за промежуток времени, необходимый, чтобы проехать от пункта A до пункта B со скоростью 40 км/ч. Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от пункта A до пункта B со скоростью 100 км/ч. Найти скорость мотоциклиста, считая, что она больше скорости велосипедиста.

7.1.52. [МГУ, геогр. ф-т] Пароход, отчалив от пристани A, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани B. Весь путь от A до B пароход прошел за 7 ч. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость парохода.

7.1.53. [МГУ, ф-т почвовед.] Из пункта A в пункт B отправился скорый поезд. Одновременно ему навстречу из B в A вышел товарный поезд, который встретился со скорым через $\frac{2}{3}$ часа после отправления. Расстояние между пунктами A и B равно 80 км, поезда двигались с постоянными скоростями. С какой скоростью двигался скорый поезд, если 40 км он шел на $\frac{3}{8}$ ч дольше, чем товарный поезд шел 5 км?

7.1.54. [СГЭА] Два человека вышли одновременно. Один из пункта A в пункт B, а другой — из B в A. Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, сразу же повернул обратно. В первый раз они встретились в 12 км от B, а второй — через 6 часов после первой встречи в 6 км от A. Найдите расстояние от A до B и скорость обоих людей.

7.1.55. [МГУ, биолог. ф-т] Из двух пунктов одновременно выехали навстречу друг другу с постоянными скоростями мотоциклист и велосипедист. Они встретились через 45 мин после начала движения. Определить, сколько времени затратит на путь между исходными пунктами мотоциклист, если известно, что ему для этого потребуется на 2 часа меньше, чем велосипедисту.

7.1.56. [ГАУ] Пассажир, едущий из города A в город B, половину затраченного на путь времени ехал на автобусе, а половину — на автомашине. Если бы он весь путь от A до B проехал на автобусе, то это заняло бы у него в полтора раза больше времени. Во сколько раз быстрее проходит путь от A до B автомашина, чем автобус?

7.1.57. [ГАУ] Две автомашины, выехавшие одновременно из городов A и B навстречу друг другу, каждая со своей скоростью, встретились через 6 часов. Первой машине, чтобы пройти $\frac{2}{5}$ пути от A до B, требуется на 2 часа больше, чем второй для того, чтобы пройти $\frac{2}{15}$ пути от B до A. За сколько часов проходит расстояние между A и B каждая машина?

7.1.58. [МПГУ] Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал велосипедист, который встретил пешехода через 50 минут после своего выезда из B. Сколько времени потребовалось бы пешеходу для того, чтобы пройти весь путь из A в B, если известно, что велосипедист проделал бы тот же путь на 4 часа быстрее пешехода?

7.1.59. [ГАУ] Из пунктов A и B навстречу друг другу выехали одновременно два автобуса, причем первый, имея вдвое большую скорость, проехал весь путь на 1 час быстрее второго. На сколько минут раньше произошла бы встреча этих автобусов, если бы скорость второго автобуса увеличилась и стала бы равной скорости первого автобуса?

7.1.60. [МГТУ] Из пункта A кольцевой трассы длиной 24 км выехал велосипедист, а через 20 мин в том же направлении выехал мотоциклист. Через 10 мин после выхода он нагнал велосипедиста, а еще через 30 мин нагнал его вторично. Определить скорости велосипедиста и мотоциклиста.

2. Работа

7.2.1. [МИСиС] Двое рабочих, работая вместе, закончили работу за два дня. Если бы первый рабочий проработал 2 дня, а второй 1 день, то они вместе выполнили бы $\frac{5}{6}$ всей работы. Найти за сколько дней выполнит эту работу один первый рабочий.

7.2.2. [МЭСИ] Бассейн наполняется двумя трубами за 4 часа. Первая труба может наполнить бассейн за 5 часов. За сколько часов вторая труба, действуя отдельно, может наполнить бассейн?

7.2.3. [КФЭИ] Трактористы должны вспахать поле, площадь которого 240 га. За 2 дня работы они вспахали столько, что 80% вспаханной части в 2,5 раза меньше оставшейся. За сколько дней трактористы вспашут поле?

7.2.4. [МГТУ] Бассейн, содержавший 30 м^3 воды, сначала был опорожнен, а затем снова заполнен до прежнего уровня. На все это потребовалось 8 часов. Сколько времени шло заполнение бассейна, если при наполнении насос перекачивает в час на 4 м^3 воды меньше, чем при опорожнении?

7.2.5. [МГТУ] Два экскаватора, работая одновременно, могут вырыть котлован за 4 часа. Один первый экскаватор затратит на эту работу на 6 часов больше, чем один второй. За какое время может вырыть котлован каждый экскаватор, работая отдельно?

7.2.6. [МИРЭА] Ученик прочел книгу в 480 страниц, ежедневно читая одинаковое количество страниц. Если бы он читал каждый день на 16 страниц больше, то прочел бы книгу на 5 дней раньше. Сколько дней ученик читал книгу?

7.2.7. [РЭА] Колхоз должен был засеять поле за 4 дня. Перевыполняя ежедневно норму сева на 12 га, колхозники закончили сев за 1 день до срока. Сколько гектаров засевал колхоз ежедневно?

7.2.8. [МГТУ] Один рабочий должен был изготовить 36 деталей, второй — 20 деталей. Первый делал в день на 2 детали больше, чем второй, и затратил на изготовление своего заказа на 1 день меньше, чем второй. По сколько деталей делали в день рабочие?

7.2.9. [МГУ, ВМиК] Три сенокосилки участвовали в покосе травы с поля площадью 25 га. За 1 час первая сенокосилка скашивает 3 га, вторая — на b га меньше первой, а третья — на $2b$ га больше первой. Сначала работали одновременно первая и вторая сенокосилки и скосили 11 га, а затем оставшуюся часть площади скосили, работая одновременно, первая и третья сенокосилки. Определить значение b $(0 < b < 1)$, при котором все поле скошено за 4 часа, если работа велась без перерыва.

7.2.10. [ГАУ] Предприятие должно было изготовить за несколько месяцев 6000 насосов. Увеличив производительность труда, предприятие стало изготавливать в месяц на 70 насосов больше, и на 1 месяц раньше срока перевыполнило задание на 30 насосов. За какой срок было изготовлено 6030 насосов?

7.2.11. [МИСиС] После усовершенствования технологии цех стал выпускать на 4 изделия в час больше, чем прежде. Поэтому за 6 часов работы цех начал выполнять 1,2 прежней семичасовой нормы. Сколько изделий в час начал выпускать цех?

7.2.12. [МГАП] В одном бассейне имеется $200\,м^3$ воды, а в другом — $112\,м^3$. Открываются краны, через которые наполняются бассейны. Через сколько часов количество воды в бассейнах будет одинаковым, если во второй бассейн вливается в час на $22\,м^3$ больше воды, чем в первый?

7.2.13. [МГАП] Каждый из рабочих должен был изготовить 36 одинаковых деталей. Первый приступил к выполнению своего задания на 4 минуты позже второго, но $\frac{1}{3}$ задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив свое задание, первый рабочий после двухминутного перерыва приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым рабочим изготовил еще 2 детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

7.2.14. [РХТУ] Для перевозки 90 т груза было затребовано некоторое количество машин. В связи с тем, что на каждую машину погрузили на 0,5 т меньше, дополнительно было затребовано 6 машин. Сколько машин было затребовано первоначально?

7.2.15. [МГУК] Две машинистки за 5 часов перепечатали 27 страниц отчета. Всю рукопись объемом 60 печатных страниц отчета они печатали поровну, причем вторая машинистка работала на 2,5 часа меньше. За сколько часов каждая из них напечатала бы весь отчет?

7.2.16. [МИРЭА] На предприятии работают 3 машинистки разной квалификации. Первая печатает в час на 2 страницы больше, чем вторая; у третьей на печатание страницы уходит на 4 минуты больше, чем у первой и в $\frac{4}{3}$ раза больше, чем у второй. Сколько страниц в час печатает первая машинистка?

7.2.17. [МГАП] Каждая из двух машинисток перепечатывала рукопись в 72 страницы. Первая машинистка перепечатывала 6 страниц за то же время, за которое вторая перепечатывала 5 страниц. Сколько страниц перепечатывала каждая машинистка в час, если первая закончила работу на 1,5 часа быстрее второй?

7.2.18. [РЭА] Две трубы наполнили бассейн объемом $54\,м^3$. При этом первая труба открыта 3 часа, а вторая — 2 часа. Какова пропускная способность первой трубы, если $1\,м^3$ она заполняет на 1 минуту медленнее, чем вторая?

7.2.19. [ГАУ] Две бригады провели уборочные работы на 12 га. Сначала работала только первая бригада, затем к ней присоединилась вторая и они завершили работу вместе. Вторая бригада, убирая в час по 0,8 га, в итоге убрала такую же площадь, какую первая бригада убрала бы за 1 ч 30 мин. Сколько времени работала каждая бригада, если известно, что первая бригада работала вдвое дольше второй?

7.2.20. [МГУ, геолог. ф-т] Первый рабочий изготовил 60 деталей на 3 часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготовят за 1 час 30 деталей?

7.2.21. [МГУ, хим. ф-т] Три одинаковых комбайна, работая вместе, убрали первое поле, а затем два из них убрали второе поле (другой площади). Вся работа заняла 12 часов. Если бы три комбайна выполнили половину всей работы, а затем оставшуюся часть сделал один из них, то работа заняла бы 20 часов. За какое время два комбайна могут убрать первое поле?

7.2.22. [ГАУ] С двух участков земли собрано соответственно 140 и 550 т свеклы, причем с 1 м^2 второго участка собрано на 2 кг меньше, чем с 1 м^2 первого участка. После применения удобрений урожай на первом участке удвоился, а на втором — утроился, и с 1 м^2 второго участка собрали на 1 кг больше, чем с 1 м^2 первого участка. Определить размеры участков.

7.2.23. [МПГУ] Две машины, работающие с двух сторон тоннеля, должны закончить проходку за 60 дней. Если первая машина выполнит 30% своей работы, а вторая — $26\frac{2}{3}$% своей, то обе они пройдут 60 м тоннеля. Если бы первая машина выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы второй машины по проходке этого тоннеля, а вторая — 0,3 всей работы первой машины, то первой понадобилось бы на это на 6 дней больше, чем второй. Определите, сколько метров в день проходит каждая машина.

7.2.24. [МГТУ] Две машинистки вместе напечатали 65 страниц, причем первая работала на 1 час больше второй. Вторая машинистка печатает в час на 2 страницы больше первой; напечатала она на 5 страниц больше. Сколько страниц в час печатает каждая машинистка?

7.2.25. [РЭА] Два станка одновременно начали штамповать детали со скоростью 70 деталей в минуту каждый. Через час пустили в работу третий станок. В этот момент первый станок снизил свою скорость на 10 деталей в минуту. Через некоторое время на третьем станке было сделано столько деталей, сколько было к этому моменту на первом, а еще через 3,5 часа он сравнялся по числу сделанных деталей со вторым. Найти скорость работы третьего станка.

7.2.26. [МГОПУ] Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу за 12 часов. Если бы сначала первый сделал половину этой работы, а затем другой остальную часть, то вся работа была бы выполнена за 25 часов. За какое время мог выполнить эту работу каждый рабочий в отдельности?

7.2.27. [МГАУ] Два каменщика сложили вместе стену за 20 дней. За сколько дней выполнил бы эту работу каждый из них в одиночку, если *известно, что первому пришлось бы работать на 9 дней больше второго?*

7.2.28. [СПбГУ] Бассейн наполняется из двух труб за 7,5 часов. Если открыть только первую трубу, то бассейн наполнится на 8 часов быстрее, чем если открыть только вторую трубу. Сколько времени будет наполняться бассейн второй трубой?

7.2.29. [СПбГУ] Бригада маляров начала красить цех. Через 5 дней вторая бригада начала красить другой такой же цех и закончила покраску одновременно с первой. Если бы они стали красить первый цех вместе, то им понадобилось бы на это 6 дней. Сколько времени первая бригада красила цех?

7.2.30. [МПГУ] Бассейн наполняется водой с помощью двух труб. Наполнение бассейна только через первую трубу происходит на 22 минуты дольше, чем только через вторую трубу. Если же работают обе трубы вместе, то бассейн наполняется за 1 час. За какой промежуток времени наполняется бассейн через каждую трубу отдельно?

7.2.31. [МИЭМ] Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за 20 дней. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 30 дней скорее, чем второй рабочий, если этот последний будет работать отдельно. За сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить работу?

7.2.32. [МГАП] *Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей.* После того как первый проработал 7 часов и второй 4 часа, оказалось, что они выполнили $\frac{5}{9}$ всей работы. Проработав совместно еще 4 часа, они установили, что им осталось выполнить $\frac{1}{18}$ всей работы. За сколько часов каждый из рабочих, работая отдельно, мог бы выполнить всю работу?

7.2.33. [ВЗФЭИ] *Оператор ЭВМ, работая с учеником, обрабатывает* задачу за 2 ч 24 мин. Если оператор будет работать 2 ч, а ученик 1 ч, то будет выполнено $\frac{2}{3}$ всей работы. Сколько времени потребуется оператору и ученику в отдельности на обработку задачи?

7.2.34. [МГАП] Две бригады должны были закончить работу за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая бригада получила другое задание, поэтому вторая закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. За сколько дней могла сделать всю работу каждая бригада, работая отдельно?

7.2.35. [МГАП] Трактористы A и B вспахали поле. В первый день они вспахали $\frac{1}{3}$ поля, причем A работал 2 часа, а B — на 1 час больше.

Оставшуюся часть поля они вспахали на другой день, при этом A работал 5 часов, а B — 4,5 часов. За сколько часов работы тракторист B мог бы вспахать поле один?

7.2.36. [РЭА] Трое рабочих первого разряда и пять рабочих второго разряда выполнили работу за 2,5 дня. За один день пять рабочих первого разряда и трое рабочих второго разряда выполняют $\frac{34}{75}$ этой работы. За сколько дней выполнят работу 6 рабочих первого разряда и 15 рабочих второго разряда?

7.2.37. [МПГУ] Две бригады рабочих изготавливают партию одинаковых деталей. После того как первая бригада проработала 2 ч, а вторая 5 ч, оказалось, что выполнена половина всей работы. Проработав совместно еще 3 ч, бригады установили, что им осталось выполнить 5% первоначального задания. За какой промежуток времени каждая бригада в отдельности может выполнить всю работу?

7.2.38. [ГАУ] Двое рабочих, работая одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал в два раза быстрее, а второй в два раза медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. За сколько дней выполнил бы всю работу первый рабочий?

7.2.39. [МГТУ] Пароход грузится подъемными кранами. Начали грузить 4 крана одинаковой мощности. Когда они проработали 2 ч, к ним присоединили еще 2 крана меньшей мощности, и после этого погрузка была окончена через 3 часа. Если бы все краны начали работать одновременно, то погрузка заняла бы 4,5 часа. Определить, за сколько часов мог бы загрузить пароход один кран большей мощности.

7.2.40. [МГТУ] Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за 30 дней. После шестидневной совместной работы один из них, работая отдельно еще 40 дней, может закончить эту работу. За сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить эту работу?

7.2.41. [МЭСИ; СГУ] Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Первая и вторая бригады вместе вспахали бы это поле за 6 дней, а первая и третья вместе — за 8 дней. Во сколько раз вторая бригада вспахивает за день больше, чем третья?

3. Концентрация

7.3.1. [МИЭТ] Сплав олова с медью весом в 12 кг содержит 45% меди. Сколько чистого олова надо добавить, чтобы получить сплав, содержащий 40% меди?

7.3.2. [МГУЛ] Морская вода содержит 8% (по весу) соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составило 5% ?

7.3.3. [МТУСИ] Из 38 т сырья второго сорта, содержащего 25% примесей, после очистки получается 30 т сырья первого сорта. Каков процент примесей в сырье первого сорта?

7.3.4. [ОКИ] Определить, сколько килограммов сухарей с влажностью 15% можно получить из 255 кг хлеба с влажностью 45%.

7.3.5. [МАСИ] Сколько килограммов воды нужно выпарить из 0,5 т целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить массу с содержанием воды 75% ?

7.3.6. [РЭА; СГУ] Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие — 20%. Сколько надо собрать свежих грибов, что из них получить 4,5 кг сухих грибов?

7.3.7. [МИЭТ] Свежие грибы содержат по весу 90% воды, а сухие — 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

7.3.8. [МИСиС] Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди следует добавить к этому куску, чтобы получить сплав, содержащий 60% меди?

7.3.9. [МЭСИ] В 2 литра 10-процентного раствора уксусной кислоты добавили 8 л чистой воды. Определить процентное содержание уксусной кислоты в полученном растворе.

7.3.10. [РЭА] К раствору, содержащему 39 г соли, добавили 1000 г воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 10%. Найти первоначальную процентную концентрацию соли в растворе.

7.3.11. [МГАП] Аквариум частично заполнен водой. За месяц 40% воды испарилось. При этом объем воздуха увеличился на 60%. Какую часть объема аквариума занимала вода в конце месяца?

7.3.12. [РЭА] Имеется 200 г сплава, содержащего золото и серебро в отношении 2 : 3. Сколько граммов серебра надо добавить к этому сплаву, чтобы новый сплав содержал 80% серебра?

7.3.13. [СПбГУ] Из колбы, в которой имеется 80 г 10-процентного раствора поваренной соли, отливают некоторую часть раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится втрое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 2%. Какое количество раствора отлили из колбы в пробирку?

7.3.14. [МИФИ] В двух сосудах емкостью по 5 л каждый содержится раствор щелочи. Первый сосуд содержит 3 л p-процентного (по объему) раствора, второй — 4 л 2-процентного раствора такой же щелочи. Сколько литров из второго сосуда надо перелить в первый, чтобы получить в нем 10-процентный раствор щелочи?

7.3.15. [МГУ, геолог. ф-т] Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке — 10%, во втором — 40%. После сплавливания этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором — 30%. Определить массу полученного слитка.

7.3.16. [МПГУ] Водный раствор кислоты содержит воды на 18 г меньше, чем кислоты. Если бы к нему добавить количество концентрированной кислоты, по массе равное $\frac{1}{3}$ массы концентрированной кислоты, первоначально содержащейся в растворе, то полученный новый раствор содержал бы 80% концентрированной кислоты. Какова масса раствора и каково первоначальное процентное содержание в нем концентрированной кислоты?

7.3.17. [МГАП] Имеется три сосуда, в которых содержится, соответственно, 10, 30 и 5 литров растворов соляной кислоты. Процентное содержание кислоты во втором сосуде на 10% больше, чем в первом, а содержание кислоты в третьем сосуде равно 40%. Половину раствора из второго сосуда перелили в первый, а другую половину — в третий. После этого процентное содержание кислоты в первом и третьем сосудах оказалось одинаковым. Сколько процентов кислоты содержал вначале первый раствор?

7.3.18. [МГАЛП] Имеется лом стали двух сортов, причем первый сорт содержит 10% никеля, а второй 30%. На сколько тонн стали больше нужно взять второго сорта, чем первого, чтобы получить 200 т стали с содержанием никеля 25%?

7.3.19. [АГА] Имеются два сплава меди и цинка. В первом сплаве меди в 2 раза больше, чем цинка, а во втором в 5 раз меньше, чем цинка. Во сколько раз больше надо взять второго сплава, чем первого, чтобы получить новый сплав, в котором цинка было бы в 2 раза больше, чем меди?

7.3.20. [МИЭТ] *Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него* в отношении 1 : 2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2 : 3. В каком отношении необходимо взять эти сплавы, чтобы получить новый сплав, содержащий те же металлы в соотношении 17 : 27?

7.3.21. [ТГТУ; МПГУ] Имеются два сплава золота и серебра. В первом сплаве количества этих металлов находятся в отношении 1 : 2, а во втором сплаве — в отношении 2 : 3. Сколько граммов нужно взять первого сплава, чтобы получить 19 г сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 7 : 12?

7.3.22. [МГАПБ] Вычислить вес сплава серебра с медью, зная, что сплавив его с 3 кг чистого серебра, получат сплав 900-й пробы, а сплавив его с 2 кг сплава 900-й пробы, получат сплав 840-й пробы.

7.3.23. [МЭСИ] В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают $\frac{1}{5}$ часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 1%. Определить исходное процентное содержание соли.

7.3.24. [МПГУ] От двух кусков сплавов, весящих 12 кг и 8 кг, с процентным содержанием в них олова $p\%$ и $q\%$ соответственно ($p \neq q$), отрезали по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание олова в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

7.3.25. [НГУ] Имеются 3 куска сплава меди с никелем в отношениях 2 : 1, 3 : 1 и 5 : 1 по массе. Из них сплавлен кусок массой 12 кг с отношением меди и никеля 4 : 1. Найдите массу каждого исходного куска, если масса первого была вдвое больше массы второго.

7.3.26. [МГАП] Имеется два одинаковых по весу куска сплавов с различным процентным содержанием серебра. Если сплавить половину первого куска со вторым, то получившийся сплав будет содержать 40% серебра, а если сплавить первый кусок с половиной второго, то новый сплав будет содержать 50% серебра. Каково процентное содержание серебра в каждом из кусков?

7.3.27. [ВВИА] В двух сосудах содержатся растворы кислоты; в первом сосуде 70%-ный, во втором — 46%-ный. Из первого сосуда 1 л раствора перелили во второй, и жидкость во втором сосуде перемешали. Затем из второго сосуда 1 л раствора перелили в первый и также перемешали. После этого концентрация кислоты в первом сосуде стала равна 68%. Сколько жидкости было во втором сосуде, если известно, что в первом ее было 10 л?

7.3.28. [МПГУ] Сосуд емкостью 20 л заполнен обезвоженной кислотой. Часть этой кислоты отлили, а сосуд долили водой. Затем снова отлили столько же жидкости, сколько в первый раз кислоты, и сосуд опять долили водой, в результате этого получился 16%-ный раствор кислоты. Сколько кислоты отлили из сосуда в первый раз?

7.3.29. [МГГА] Из сосуда с кислотой отлили 60 л кислоты и долили 60 л воды. После этого отлили 60 л смеси и опять долили в сосуд 60 л воды.

После чего оказалось, что раствор содержит 10 л кислоты. Сколько литров кислоты было в сосуде первоначально?

7.3.30. [ГФА; МЭСИ] Имеются два раствора соли в воде. Для получения смеси, содержащей 10 г соли и 90 г воды, первого раствора требуется вдвое больше по массе, чем второго. Через неделю из каждого килограмма первого и второго растворов испарилось по 200 г воды и для получения той же смеси, что и раньше, требуется первого раствора уже вчетверо больше по массе, чем второго. Сколько граммов соли содержалось в 100 г каждого раствора первоначально?

7.3.31. [МГУ, псих. ф-т] В 3 сосуда налито по 1 кг различных растворов поваренной соли. Если смешать 200 г первого раствора и 100 г второго раствора, то в полученной смеси будет содержаться столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора. Количества соли в трех растворах, взятые в порядке номеров растворов, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго раствора нужно взять, чтобы в них содержалось столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора?

7.3.32. [МГУ, ф-т почвовед.] Два вида удобрений A и B отличаются весовым содержанием азота, калия и фосфора. В удобрении A азота содержится в 3 раза больше, а фосфора в 2 раза больше по весу, чем калия. В удобрении B соответственно азота в $\frac{5}{3}$ раза больше, а фосфора в 1,5 раза меньше, чем калия. Можно ли за счет смешивания удобрений A и B приготовить удобрение, в котором азота в 2, а фосфора в 3 раза больше, чем калия?

4. Другие задачи на процентные соотношения

7.4.1. [ЯВВФУ] Одно число равно 0,5, а второе число равно 0,3. Сколько процентов составляет второе число от разности первого и второго чисел?

7.4.2. [МЭСИ] Ручка до снижения цен стоила 30 копеек, а после снижения — 27 копеек. На сколько процентов снижена цена?

7.4.3. [МГАП] Из круга вырезали концентрический с ним круг, площадь которого составляет 81% от площади исходного круга. Какой процент от радиуса первоначального круга составляет толщина кольца?

7.4.4. [ВлПУ] Производительность труда в январе оказалась выше плановой на 5%, а в феврале снизилась на 5% по сравнению с январской. Сравните ее с плановой.

7.4.5. [СмПИ] Себестоимость продукции сначала повысилась на 10%, а затем понизилась на 20%. На сколько процентов понизилась себестоимость продукции?

7.4.6. [КГУ] На сколько процентов увеличится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 20%, а другое — на 40%?

7.4.7. [МГАП] Длину участка увеличили на 10%, а ширину уменьшили на какое-то число процентов. В результате площадь участка уменьшилась на 1% . На сколько процентов уменьшили ширину участка?

7.4.8. [МЭИ] Студент купил 2 книги, уплатив за них 6 рублей. Если бы первая стоила на 25% меньше, а вторая — на 50% больше, то цены книг были бы одинаковые. Сколько денег уплатил студент за каждую книгу?

7.4.9. [МГУ, геолог. ф-т] Технология изготовления дискет состоит из четырех этапов. На каждом из них увеличивается содержание кремния на определенное число процентов по отношению к результату предыдущего этапа: на первом этапе — на 25%, на втором этапе — на 20%, на третьем этапе — на 10%, на четвертом этапе — на 8% . На сколько процентов в результате увеличится содержание кремния?

7.4.10. [МГУ, геолог. ф-т] Процесс очищения воды в водохранилище от содержания в ней тяжелых металлов состоял из четырех этапов. На каждом из этапов содержание уменьшалось на определенное количество процентов по отношению к их количеству на предыдущем этапе: на первом этапе — на 25% , на втором — на 20%, на третьем — на 15%, на четвертом — на 10%. На сколько процентов в результате уменьшилось их содержание?

7.4.11. [МТУСИ] В первую поездку автомобиль израсходовал 10% бензина, имеющегося в баке, затем во вторую поездку — 25% остатка. После этого в баке осталось на 13 л меньше, чем было первоначально. Сколько *литров бензина находилось в баке первоначально*?

7.4.12. [МГАП] К 22 часам 20% непроголосовавших к 18 часам человек проголосовало, после чего процент непроголосовавших людей составил 32%. На сколько процентов увеличилось количество проголосовавших к 22 часам по сравнению с проголосовавшими к 18 часам?

7.4.13. [ВЗФЭИ] Трое изобретателей получили за свое изобретение премию в размере 1410 тысяч рублей, причем второй получил $33\frac{1}{3}\%$ того, что получил первый, и еще 60 тысяч рублей, а третий получил $33\frac{1}{3}\%$ денег второго и еще 30 тысяч рублей. Какую премию получил каждый?

7.4.14. [ТбГУ] На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число верно решивших все задачи относится к числу не решивших вовсе как 5 : 3. Сколько человек экзаменовалось по математике в этот день?

7.4.15. [ЯВВФУ] В библиотеке имеются книги на английском, французском и немецком языках. Английские книги составляют 36% всех книг на иностранных языках, французские — 75% английских, а остальные 185 книг — немецкие. Сколько книг на иностранных языках в библиотеке?

7.4.16. [МЭСИ] Букинистический магазин продал книгу со скидкой 10% с назначенной цены и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли первоначально полагал получить магазин?

7.4.17. [МУПОЧ «Дубна»] Количество студентов в университете увеличилось за первый год на 2500 человек, за второй год — на $p\%$, за третий год — на $2p\%$ и возросло за 3 года с 20000 до 25272 человек. На сколько процентов увеличивалось число студентов ежегодно?

7.4.18. [МИЭТ] За год работы предприятия объем дневной выработки продукции вырос на $p\%$, а за следующий год — еще на $(p+50)\%$. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за 2 года она возросла в общей сложности втрое.

7.4.19. [РЭА] *Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых.* Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк $\frac{3}{4}$ от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

7.4.20. [МПГУ] После двух последовательных повышений зарплата увеличилась в $1\frac{7}{8}$ раза. На сколько процентов повысилась зарплата в первый раз, если второе повышение по количеству процентов было вдвое больше, чем первое?

7.4.21. [ГФА] В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что в начале года завод выпускал ежемесячно 600 изделий, а в конце года стал выпускать ежемесячно 726 изделий.

7.4.22. [МЭСИ] Цена товара снижена на 40%, а зарплата дважды увеличивалась на 20%. На сколько процентов больше можно купить товара после снижения цен и повышения зарплаты?

7.4.23. [ГФА] За килограмм одного продукта и 10 кг другого заплачено 2 рубля. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15%, а второй подешевеет на 25%, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 1 рубль 82 копейки. Сколько стоит 1 кг каждого продукта?

7.4.24. [МГАП] Завод изготовляет некоторые детали, среди которых 5% составляют бракованные. При проверке ОТК отбраковала 6% деталей. Сколько процентов качественных изделий были признаны ОТК бракованными, если 2% всех бракованных изделий ОТК признало качественными?

7.4.25. [МГАП] За наблюдаемый период на 90% всех дней приходилась ясная погода. Гидрометцентр в тот же период предсказывал верную погоду в 74 случаях из 100, причем в 80% всех случаев, когда на день приходилась ясная погода, предсказания Гидрометцентра сбывались. Какую долю среди пасмурных дней составляют те, в которых Гидрометцентр предсказал правильную погоду?

7.4.26. [МГУК] Фирма продала 3 партии автомобилей. Во второй партии автомобиль стоил на 50% дороже, чем в первой партии, но продать удалось на 3 автомобиля меньше, так что выручка от продажи соответственно увеличилась всего на 20%. В третьей партии автомобиль стоил на 1 млн рублей дешевле по сравнению с первой партией, и продано было на 20% автомобилей больше, чем в первой партии. При этом выручка уменьшилась на 10%. Определить число автомобилей и цену автомобиля в первой партии.

7.4.27. [МАДИ] В магазин привезли сахар и сахарный песок в 63 мешках, всего 4,8 т, причем мешков с сахарным песком было на 25% больше, чем с сахаром. Масса каждого мешка с сахаром составила $\frac{3}{4}$ массы мешка с сахарным песком. Сколько привезли килограммов сахара и сахарного песка?

7.4.28. [МГАП] Антикварный магазин, купив два предмета за 225 руб., продал их, получив 40% прибыли. Что стоил магазину каждый предмет, если на первом прибыли получено 25%, а на другом — 50%?

7.4.29. [МПГУ] Спустя год после того, как некоторая сумма внесена на сберегательную книжку, вклад за счет процентов увеличился на 20 рублей 16 копеек. Добавив еще 79 рублей 84 копейки, вкладчик оставил свой вклад в сберегательной кассе еще на 1 год. По истечении этого периода общая сумма на сберегательной книжке стала равна 628 рублей 16 копеек. Какой процент годовых выплачивался сберегательной кассой, если первоначальный взнос должен был быть не менее 5 рублей?

7.4.30. [МГУ, эк. ф-т] В банк помещен вклад в размере 3900 тыс. руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после вычисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начала начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

5. Задачи, связанные с цифровой записью чисел

7.5.1. [МГАПБ] Найти двузначное число, если известно, что при делении этого числа на сумму его цифр в частном получится 4 и в остатке 3; если же из искомого числа вычесть удвоенную сумму его цифр, то получится 25.

7.5.2. [РЭА] Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 6 и в остатке 2. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 5 и в остатке 2. Найти это число.

7.5.3. [МИФИ] Четырехзначное натуральное число A оканчивается цифрой 1. Двузначное число, образованное цифрами в разряде тысяч и сотен, цифра десятков и цифра единиц числа A представляют три последовательных члена арифметической прогрессии. Из всех чисел A, удовлетворяющих указанным условиям, найдите то, у которого разность между цифрой десятков и цифрой сотен имеет наименьшее возможное значение.

7.5.4. [ГФА] Сумма цифр двузначного числа A равна 14. Если к этому числу прибавить 46, то получится число, произведение цифр которого равно 6. Найдите число A.

7.5.5. [ГФА; НижГУ] Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если цифру перенести в первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

7.5.6. [СПбГУ] Определить год рождения одного из основоположников науки нового времени, если известно, что сумма цифр его года рождения равна 21, а если к году рождения прибавить 5355, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

7.5.7. [МАСИ] Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 7. Если затем взять сумму квадратов цифр этого числа и вычесть из нее произведение тех же цифр, то получится первоначальное число. Найти это число.

7.5.8. [ТГТУ] Известно, что сумма двух чисел равна 1244. Если в конце обозначения первого числа приписать цифру 3, а в конце обозначения второго числа отбросить цифру 2, то образуются два равных числа. Найти большее из этих чисел.

7.5.9. [ТГТУ] Сумма двух трехзначных чисел, написанных одинаковыми цифрами, но в обратном порядке, равна 1252. Найти наибольшее из этих чисел, если сумма цифр каждого из них равна 14, а сумма квадратов цифр равна 84.

7.5.10. [ГАУ] Сумма цифр трехзначного числа равна 11, а сумма квадратов цифр этого числа равна 45. Если от искомого числа отнять 198, то получается число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Найти это число.

7.5.11. [МГУ, ИСАА] При перемножении двух натуральных чисел, разность которых равна 7, была допущена ошибка: цифра сотен в произведении увеличена на 4. При делении полученного (неверного) произведения на меньший сомножитель получилось в частном 52 и в остатке 26. Найти множители.

7.5.12. [МГУ, физ. ф-т] Сумма квадратов цифр некоторого двузначного числа на 1 больше утроенного произведения этих цифр. После деления этого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. Найти это двузначное число.

6. Разные задачи

7.6.1. [МЭСИ] Для экскурсии нужно собрать деньги. Если каждый экскурсант внесет по 75 коп., то на расходы не хватит 4,4 руб., если каждый внесет по 80 коп., то останется 4,4 руб. Сколько человек принимает участие в экскурсии?

7.6.2. [СПбААП] Найти число, которое превышало бы свой квадрат на максимальное значение.

7.6.3. [МГАП] Среди решений неравенства $\sqrt{x-5}+\sqrt{\pi} \geqslant 0$ найти наименьшее число x такое, что и при уменьшении его на 50% и при увеличении его на 100% значения косинуса двух полученных величин совпадают.

7.6.4. [МГАП] На множестве решений неравенства $3 \leqslant x(4-x)$ найти такое число x, что при увеличении его на 200% значение функции $y=\sin x$ возрастает на 100%.

7.6.5. [МГУЛ] Найдите число, 30% которого равны сумме наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел 60, 48, 45.

7.6.6. [МГУ, ИСАА] Биржа запланировала провести торги в июле и августе. Если объем торгов в июле оставить на запланированном уровне, а план на август превысить в 3 раза, то суммарный объем торгов, проводимых в течение этих двух месяцев, возрастет в 2 раза. Найти отношение объемов торгов, запланированных на июль и на август, и выяснить, во сколько раз надо увеличить план на июль, оставляя неизменным план на август, чтобы суммарный объем торгов, проводимых за эти два месяца, вырос в 3 раза.

7.6.7. [МГУ, ИСАА] Суммарный доход двух предприятий возрастет втрое, если доход первого предприятия останется неизменным, а доход второго увеличится в 4 раза. Найти отношение первоначальных доходов этих предприятий и выяснить, во сколько раз надо увеличить доход первого предприятия, оставляя первоначальным доход второго, чтобы их суммарный доход возрос в 4 раза.

7.6.8. [МГГУ] За 4 карандаша и 3 тетради заплатили 70 копеек, а за 2 карандаша и 1 тетрадь заплатили 28 копеек. Сколько стоит одна тетрадь и один карандаш?

7.6.9. [МИИ] Группу школьников нужно рассадить в столовой. За стол можно усадить 3 человека. Если сажать за стол по 2 девочки, то окажется 3 стола, где сидят одни мальчики, а если сажать за стол по 2 мальчика, то будет 2 стола с одними девочками. Сколько было девочек в группе?

7.6.10. [ВА им. Дзержинского] Поезд, следующий из пункта A в пункт B, делает в пути некоторое количество остановок. На первой остановке в поезд садятся 5 пассажиров, а на каждой следующей — на 3 пассажира больше, чем на предыдущей. На каждой остановке 30 пассажиров выходят. Сколько было остановок, если из пункта A выехало 1978, а в пункт B прибыло 2048 пассажиров?

7.6.11. [МГУ, ф-т почвовед.] Шофер грузовика, занятого на строительстве, при постоянной продолжительности рабочего дня перевозит грузы трех типов: щебень, песок и кирпич, соответственно по-разному расходуя горючее. В первый день половину рабочего времени он возил щебень, а половину — песок; во второй день $\frac{1}{7}$ времени он возил щебень, $\frac{4}{7}$ времени — песок и $\frac{2}{7}$ времени — кирпич; в третий день $\frac{1}{4}$ времени — щебень, $\frac{3}{8}$ времени — песок и столько же — кирпич. На сколько процентов израсходует шофер дневной норматив горючего, возя целый день щебень, если в первый день он израсходовал его на 95%, во второй — на $101\frac{3}{7}\%$, а в третий — на 101,25%?

7.6.12. [МГУ, геолог. ф-т] В первый год разработки месторождения было добыто 400 тыс. т нефти. В течение ряда последующих лет объем добычи увеличивался ежегодно на 50%, а затем в течение 9 лет не менялся. Общий объем добытой нефти составил 35 млн 650 тыс. т. Сколько всего лет разрабатывалось месторождение?

7.6.13. [ГАУ] Колхозный сад разбит на несколько участков. На каждом участке работает одинаковое число колхозников. Известно, что число колхозников, находящихся на одном участке, превышает число участков на 14. Когда еще 15 человек пришли на первый участок, а с остальных участков ушло по 15 человек, число колхозников на первом участке стало равным числу колхозников, оставшихся на всех остальных участках. Сколько колхозников было первоначально на каждом участке?

7.6.14. [МПГУ] Два сосуда с раствором соли поставлены для выпаривания. Ежедневные выпариваемые порции соли постоянны для каждого сосуда. Из первого сосуда получено 48 кг соли, а из второго, стоявшего на 6 дней меньше, — 27 кг. Если бы первый сосуд стоял столько же дней, сколько второй, а второй — столько, сколько первый, то из обоих растворов получилось бы одинаковое количество соли. Сколько дней стоял каждый раствор?

7.6.15. [МГУ, биолог. ф-т] Саша и Сережа дважды обменивались марками, причем каждый раз $\frac{1}{7}$ количества марок, имевшихся (на момент обмена) у Саши, обменивалась на половину количества марок, имевшихся у Сережи. Сколько марок было у Саши и сколько у Сережи до первого обмена, если после первого обмена у Саши было 945 марок, а после второго обмена у Сережи — 220?

7.6.16. [ГАУ] В двух автоколоннах, по 28 автомобилей в каждой, было 11 «Жигулей», остальные — «Москвичи». Сколько «Москвичей» было в каждой автоколонне, если известно, что в первой автоколонне на каждую машину «Жигули» приходилось в два раза больше «Москвичей», чем во второй?

7.6.17. [ГАУ] Два стрелка сделали по 30 выстрелов каждый; при этом было 44 попадания, остальные — промахи. Сколько раз попал каждый, если известно, что у первого стрелка на каждый промах приходилось в 2 раза больше попаданий, чем у второго?

7.6.18. [МЭСИ] Знаменатель несократимой дроби на 2 больше числителя. Если у дроби, обратной данной, уменьшить числитель на 3, и вычесть из полученной дроби данную дробь, то получится $\frac{1}{15}$. Найти знаменатель данной дроби.

7.6.19. [МТУСИ] Найти два числа, если их среднее арифметическое на 16 меньше большего из этих чисел, а среднее геометрическое на 8 больше меньшего из них.

Группа Б

7. Смешанные задачи на движение, работу, процентные соотношения и прочее

7.7.1. [МПГУ] Средняя скорость победителя автомобильных гонок оказалась на 20 км/ч выше средней скорости автомобиля, занявшего последнее место. Если бы последний участник преодолевал каждый километр на 1 секунду быстрее, то он сократил бы разрыв от времени победителя вдвое. Найти скорость победителя.

7.7.2. [СПбГУ] Велосипедист едет по шоссе. Через каждые 4,5 км его обгоняет рейсовый автобус, а каждые 9 минут мимо него проезжает встречный автобус. С какой скоростью едет велосипедист, если известно, что интервал движения автобусов (в двух направлениях) равен 12 минутам?

7.7.3. [СПбГУ] Пешеход идет по обочине дороги со скоростью 5 км/ч. Каждые 27 минут его обгоняет рейсовый автобус, а каждые 1,8 км мимо него проезжает встречный автобус. Найдите интервал движения автобусов, если известно, что он одинаков в обоих направлениях.

7.7.4. [МЭСИ] Смешав по 2 см^3 трех веществ, получили 16 г смеси. Известно, что 4 г второго из этих веществ заполняют объем на $\frac{1}{2}$ см^3 больший, чем 4 г третьего вещества. Найти плотность третьего вещества, если известно, что масса второго вещества в смеси вдвое больше массы первого вещества.

7.7.5. [МТУСИ] Если некоторое двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же к сумме квадратов цифр этого числа прибавить произведение его цифр, то получится искомое число. Найти это число.

7.7.6. [МГАП] Курс рубля по отношению к доллару падает на $28\frac{4}{7}\%$ в квартал. Что выгоднее: а) сделать валютный вклад на год с начислением 60% годовых или б) конвертировать доллары в рубли и сделать рублевый вклад с начислением 510% годовых?

7.7.7. [МГАП] Курс доллара по отношению к рублю ежемесячно растет на 25%, а курс рубля по отношению к немецкой марке падает на 20% ежемесячно. Как изменяется курс доллара по отношению к немецкой марке? Выгодно ли вкладчику сделать рублевый вклад в банк с ежеквартальным начислением 94% от суммы вклада (по сравнению с конвертацией в доллары)?

7.7.8. [МГАП] Курс рубля в течение двух месяцев уменьшался на одно и то же, не превышающее 22, число процентов. В начале первого месяца господин К. имел некоторую сумму (в долларах), которую он тогда же конвертировал в рубли. Двое других господ, имея каждый рублевые суммы в 6,25 раза больше, чем та, которую получил господин К. от совершенной им валютной операции, конвертировали их в доллары: один — в конце первого месяца, а другой — в конце второго. При этом у одного из них долларов оказалось больше ровно на столько, сколько господин К. имел в начале первого месяца. На сколько процентов за два месяца вырос курс доллара?

7.7.9. [МИФИ] Имеются два сосуда с раствором щелочи разных концентраций (по объему). Первый сосуд содержит 4 л раствора, второй — 6 л раствора. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35% щелочи. Если же слить вместе по 3 л из каждого сосуда, то получится раствор, содержащий a% щелочи. Сколько литров щелочи содержит второй сосуд? Какие значения может принимать величина a?

7.7.10. [ВШЭ] Сколько соленой воды, имеющей концентрацию соли по массе, равную q%, надо добавить к 90 кг соленой воды, имеющей концентрацию соли по массе, равную 15%, чтобы концентрация соли по массе составила p%. Исследовать решение при различных значениях q и p. Считать, что : 1) $p \neq q$, $p \neq 0$; 2) в 100 г пресной воды при температуре 20°C можно растворить не более 35 г соли; 3) температура поддерживается постоянной и равна 20°C.

7.7.11. [СПбГУ] Частоты x, y генов a, b соответственно преобразуются в результате одного тура отбора в новые частоты

$$x' = \frac{x(kx + y)}{kx^2 + 2xy + ky^2}, \quad y' = \frac{y(x + ky)}{kx^2 + 2xy + ky^2}$$

генов a, b следующего поколения. Определить первоначальные частоты, если известно, что коэффициент приспособленности $k = \frac{1}{2}$, а в следующем поколении на каждые 40 генов a приходится 33 гена b.

7.7.12. [ГФА] Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

7.7.13. [ГФА] Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был на расстоянии 10 км впереди них. В тот момент, когда мотоциклист догнал пешехода, велосипедист отставал от них на 5 км. На сколько километров мотоциклист будет обгонять пешехода в тот момент, когда пешехода настигнет велосипедист?

7.7.14. [ГАУ] Из пункта A по одному шоссе выезжают одновременно два автомобиля, а через час вслед за ними выезжает третий. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилями уменьшилось в полтора раза, а между третьим и вторым — в два раза. Во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго? (Известно, что третий автомобиль не обогнал первых двух.)

7.7.15. [СПбГУ] Предприниматель положил в коммерческий банк некоторую сумму денег под фиксированный процент годового дохода (более 60%). За первые два года сумма вклада возросла на 300 тыс. руб., а к концу третьего года составила 800 тыс. руб. Определите сумму исходного вклада.

7.7.16. [СПбГУ] Гражданин положил в банк определенную сумму денег под постоянный месячный процент, рассчитывая получить за год доход 900 тыс. руб. Через полгода ему пришлось снять со счета 400 тыс. руб. Какова была величина исходного вклада, если в конце года сумма на счете составила 2 млн руб.?

8. Работа с неизвестными в системе

7.8.1. [РЭА] Три комбайна типа A и пять комбайнов типа B убрали поле за 25 часов. За один час 5 комбайнов типа A и 3 комбайна типа B убирают $\frac{17}{375}$ этого поля. За сколько часов уберут поле 6 комбайнов типа A и 15 комбайнов типа B?

7.8.2. [ОИАЭ] Каждому из трех экскаваторов для того, чтобы вырыть котлован, требуется определенное время, причем третий экскаватор вырыл бы котлован на 1 ч 36 мин быстрее второго. Работая вместе, они выполняют работу за 1 час. Если первый экскаватор проработает 1 час, а затем третий еще 1,6 часа, то они вместе отроют весь котлован. За какое время может вырыть весь котлован каждый из экскаваторов, работая самостоятельно?

7.8.3. [МГУ, ВМиК] Из города B в город A вылетел самолет. Спустя некоторое время из A в B вылетел вертолет. Скорости самолета и вертолета на всем пути постоянные, и они летят по одной трассе. Самолет до встречи с вертолетом находился в полете 6 часов, а вертолет до встречи летел 3 часа. Самолет прибыл в A в 13 ч 30 мин, а вертолет прибыл в B в 20 ч 30 мин. Найти время вылета самолета из города B.

7.8.4. [ГАУ] Торговая фирма получила две партии некоторого товара. Если продавать весь товар по цене 800 рублей за килограмм, то выручка от продажи будет на 15% ниже выручки, которую фирма получила бы, продав первую партию по названной цене, а вторую — по цене, превышающей ее на 25%. Какую часть (по массе) составляет первая партия товара в общем количестве товара этих двух партий?

7.8.5. [МАИ] Имеется сплав, состоящий из никеля, меди и марганца. Масса никеля составляет 40% массы меди и марганца, а масса меди составляет 60% массы никеля и марганца. Каково отношение массы марганца к сумме масс никеля и меди?

7.8.6. [МГОПУ] Найти три числа, из которых второе больше первого настолько, насколько третье больше второго, если известно, что произведение двух меньших чисел равно 85, а произведение двух больших чисел равно 115.

7.8.7. [МЭСИ] Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву за 96 дней? (Предполагается, что коровы поедают траву равномерно.)

7.8.8. [ГФА] Три каменщика (разной квалификации) выложили кирпичную стену, причем первый проработал 6 часов, второй — 4 часа и третий — 7 часов. Если бы первый каменщик работал 4 часа, второй — 2 часа, а третий — 5 часов, то было бы выполнено $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали одно и то же время?

7.8.9. [МГАП] В экзаменационной комиссии 5 преподавателей. 1-ый, 2-ой и 4-ый преподаватели могут проверить работы за 20 часов. 2-ой, 3-ий и 5-ый — за 15 часов. Если в проверке участвуют все, кроме 2-ого, то на проверку требуется всего 10 часов. Во сколько раз быстрее будет выполнена проверка работ всей комиссией по сравнению с проверкой работ только 2-ым преподавателем?

7.8.10. [МЭСИ] В бассейн проведены 4 трубы. Через первые 2 трубы вода втекает в бассейн, через 2 другие вытекает. Если работают все 4 трубы, то бассейн наполняется за 2,5 часа; если работают 1-ая, 2-ая и 3-я — бассейн заполняется за 1,5 часа; если работают 1-ая, 3-я и 4-ая, то бассейн заполняется за 15 часов. За сколько часов заполнится бассейн, если будут работать только 1-ая и 3-я трубы?

7.8.11. [МГАП] Шестеро фермеров совместно владеют некоторыми пахотными землями. Все шестеро, исключая пятого, в состоянии обработать земли за 6 дней. Если бы они работали вчетвером без 1-ого и 3-его, то все земли были бы обработаны за 10 дней. Поскольку 2-ой, 4-ый и 6-ой были заняты на другой работе, то земли были обработаны оставшимися за 12 дней. Какой процент всех земель был бы обработан 1-ым и 3-им фермерами за 4 дня?

7.8.12. [МГАП] В отстойник может поступать по трем каналам вода, которая испаряется с некоторой постоянной скоростью, не зависящей от количества воды в отстойнике. При отсутствии испарения отстойник мог бы быть заполнен водой, поступающей по всем трем каналам, а 2 недели. При введении в строй отстойника были задействованы только первые два канала. При этом через 6 недель его емкость была заполнена полностью. После этого вода поступала только по 3-ему каналу и через

12 недель количество воды в отстойнике уменьшилось вдвое. Насколько должен быть заполнен отстойник, чтобы за 4 дня при перекрытых каналах вся вода испарилась?

7.8.13. [МГУ, геолог. ф-т] 4 бригады разрабатывали месторождение горючих сланцев в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На втором году в течение 4 месяцев работа не производилась, а все остальное время работала только одна из бригад. Отношение времен работы первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:

в первый год $4 : 1 : 2 : 5$ и 10 млн т

во второй год $2 : 3 : 2 : 1$ и 7 млн т

в третий год $5 : 2 : 1 : 4$ и 14 млн т.

Сколько млн т сланцев выработали бы за 4 месяца четыре бригады, работая все вместе?

7.8.14. [МГУ, геолог. ф-т] 4 бригады разрабатывали месторождение железной руды в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. По одному месяцу на первом и третьем году работа не велась, а все остальное время работала только одна из бригад. Отношения времен работ первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:

в первый год $3 : 2 : 4 : 2$ и 10 млн т

во второй год $4 : 2 : 5 : 1$ и 9 млн т

в третий год $4 : 3 : 3 : 1$ и 8 млн т. Сколько железной руды выработали бы за 7 месяцев четыре бригады, работая все вместе?

7.8.15. [ГФА] На складе имеется некоторое число бочек двух образцов общей емкостью 7000 л. Если бы все бочки были первого образца, то суммарная емкость всех бочек увеличилась бы на 1000 л. Если бы все бочки были второго образца, то суммарная емкость уменьшилась бы на 4000 л. Вычислить суммарную емкость бочек каждого образца в отдельности.

7.8.16. [МАИ] Расстояние между двумя городами A и B пассажирский поезд проходит на 4 часа быстрее товарного. Если бы каждый поезд шел со своей скоростью то время, которое тратит на путь от A до B другой поезд, то пассажирский поезд прошел бы на 280 км больше, чем товарный. Если бы скорость каждого поезда была увеличена на 10 км/ч, то пассажирский поезд прошел бы расстояние AB на 2 ч 24 мин быстрее, чем товарный. Найти расстояние от A до B.

7.8.17. [СПбГУ] Гражданин положил в сберегательный банк некоторую сумму денег под фиксированный процент годового дохода. За первые два года сумма вклада возросла на 60 тыс. руб., а за третий год — еще на 49 тыс. руб. Какова была первоначальная сумма вклада?

7.8.18. [ГАУ] Из пункта A в пункт B против течения выехала моторная лодка. В пути сломался мотор, и пока его 20 минут чинили, лодку снесло вниз по реке. Определить, насколько позднее приплыла лодка в пункт B, если известно, что обычно путь из A в B лодка проходит в полтора раза дольше, чем путь из B в A.

9. Использование неравенств

7.9.1. [ТвГУ] Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 м?

7.9.2. [МИФИ] Из точек A и B, расстояние между которыми равно 1 м, по прямой начинают одновременно двигаться два тела. Первое тело начинает движение с постоянной скоростью из точки A по направлению к точке B, а второе — в том же направлении с начальной скоростью 16 м/с и с некоторым постоянным ускорением. Известно, что через 1 с после начала движения второе тело находилось от точки A на расстоянии, не большем, чем 15 м, а еще через 1 с — не меньшем, чем 25 м. Определите скорость первого тела, если через 3 с после начала движения расстояние между телами составляло 2 м.

7.9.3. [МГАП] Курс доллара в течение двух месяцев увеличивается на одно и то же число процентов ежемесячно, но не более, чем в 1,5 раза. За сумму, вырученную от продажи в начале первого месяца одного доллара, к концу второго месяца можно было купить на 9 центов меньше, чем в конце первого месяца. На сколько процентов уменьшился курс рубля за два месяца?

7.9.4. [МГАП] В течение двух месяцев цены увеличивались на одно и то же число процентов, но не более, чем в 3 раза за два месяца. На сколько процентов уменьшилась покупательная способность рубля за два месяца, если на сумму, которую платили в начале первого месяца за 1000 бутылок «Херши», в конце второго месяца можно было купить на 240 бутылок меньше, чем в конце первого месяца?

7.9.5. [МИФИ] От пристани A вниз по течению реки отправилась моторная лодка. Одновременно от пристани B отправился катер. Через некоторое время они встретились. В момент их встречи из B отплыл второй катер и в некоторый момент времени встретился с моторной лодкой. Расстояние между пунктами первой и второй встреч равно $\frac{35}{144}AB$. Скорость моторной лодки, катеров и течения реки постоянны, причем собственная скорость моторной лодки вдвое меньше собственной скорости каждого из катеров. Какую часть расстояния AB проплыла моторная лодка к моменту встречи со вторым катером? Известно, что в момент встречи с лодкой первый катер преодолел более половины расстояния AB.

7.9.6. [МАТИ] Двое рабочих выполнили работу менее чем за 4 часа. Если бы первый выполнял ее в одиночку, он сделал бы работу на 6 часов быстрее, чем один только второй рабочий. Какие значения может принимать время выполнения работы первым из рабочих, работающим отдельно?

7.9.7. [МАТИ] Две машинистки, работая одновременно, могут перепечатать рукопись не менее, чем за 2 часа. Если же будет работать только первая машинистка, то ей потребуется на перепечатку рукописи на 3 часа меньше, чем работающей в одиночку второй машинистке. Какие значения может принимать время перепечатки рукописи второй машинисткой, работающей самостоятельно?

7.9.8. [МГУ, геолог. ф-т] Поезд, идущий с постоянной скоростью из пункта A в пункт B, был задержан у семафора на 16 мин. Расстояние от семафора до пункта B равно 80 км. При каких значениях первоначальной скорости поезд прибудет в пункт B не позже запланированного срока, если после задержки он увеличил скорость на 10 км/ч.

7.9.9. [ЛГПИ; МЭСИ] Какие значения может принимать скорость точки, движущейся равномерно по прямой, если известно, что при увеличении скорости на 3 м/с эта точка проходит расстояние в 630 м скорее, причем не менее, чем на 1 секунду, и не более, чем на 4 мин 40 с.

7.9.10. [МГУ, филолог. ф-т; КГТУ] Двум бригадам общей численностью 18 человек было поручено организовать в течение 3 суток непрерывное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив между собой это время поровну. Известно, что во второй бригаде 3 девушки, а остальные — юноши, причем девушки дежурили по 1 часу, а все юноши распределили между собой остаток дежурства поровну. При подсчете оказалось, что сумма продолжительностей дежурств каждого юноши второй бригады и любого члена первой бригады меньше 9 ч. Сколько человек в каждой бригаде?

7.9.11. [МГУ, геолог. ф-т] Для приготовления смеси из двух жидкостей A и B были взяты два сосуда емкостью по 15 л каждый, в которых находилось всего 15 л жидкости A. Затем первый сосуд доверху долили жидкостью B и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд дополнили доверху смесью из первого сосуда. Затем из второго сосуда отлили в первый 6 л получившейся смеси. После этого в первом сосуде оказалось жидкости A на 1 л больше, чем во втором. Сколько литров жидкости A было первоначально во втором сосуде?

7.9.12. [МГУ, геолог. ф-т] Из пункта A в пункт B можно доехать тремя маршрутами: или через п. C, или через п. D, или напрямую, минуя промежуточные пункты. Известны расстояния $AB = 80$ км, $AC = 40$ км, $AD = 30$ км, $CB = 60$ км, $DB = 100$ км. Известно, что пункты A и

B, A и C, A и D связывают грунтовые дороги, а пункты C и B, D и B — шоссейные дороги. Скорость на шоссе на 40 км/ч больше, чем на грунтовой дороге. Какой маршрут следует выбрать, чтобы скорейшим образом добраться из п. A в п. B, если скорость на грунтовой дороге более 15 км/ч, но не превышает 30 км/ч?

7.9.13. [МГУ, геолог. ф-т] Бассейны объемами 1200 м^3, 1400 м^3 и 1600 м^3 можно наполнить: первый — одной первой трубой, второй — сначала 800 м^3 первой трубой, затем 600 м^3 второй трубой, третий — сначала 700 м^3 первой трубой, а затем 900 м^3 второй трубой. Производительность первой трубы на 400 м^3/час меньше, чем второй трубы. Какой из бассейнов наполняется быстрее, если производительность второй трубы не менее 700 м^3/час, но менее 1100 м^3/час?

7.9.14. [МЭСИ] Знаменатель положительной несократимой дроби больше квадрата ее числителя на единицу. Если к числителю и знаменателю прибавить по 5, то значение дроби будет больше $\frac{1}{2}$, если от числителя и знаменателя отнять по 2, то значение дроби будет больше $\frac{1}{10}$. Найти числитель дроби.

7.9.15. [МТУСИ] В зале расставлены стулья в 13 рядов, причем на последний ряд не хватило нескольких стульев. Потом их переставили в 27 рядов, при этом в каждом ряду поставили на 7 стульев меньше, чем при первоначальной расстановке, и на последний ряд не хватило 3 стульев. Сколько всего было стульев?

7.9.16. [МГУ, геолог. ф-т] Двое рабочих изготовили по 60 одинаковых деталей. Первые 30 деталей каждый из них делал с постоянной производительностью, которая у второго рабочего была на 20% выше. Затем первый рабочий стал делать больше на 2 детали в час, а второй — на 3 детали в час. Первый рабочий затратил на выполнение всего задания не менее 5 часов 30 минут, а второй — не более 4 часов 30 минут. Сколько деталей в час делал второй рабочий при выполнении первой половины задания?

10. Задачи с целочисленными переменными

7.10.1. [МГУ, эк. ф-т] Две бригады землекопов вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она могла бы закончить работу на 2 ч раньше. Определить число землекопов в каждой бригаде, если производительность у них одинакова.

7.10.2. [МГУ, мех.-мат.] Мастер делает за 1 ч целое число деталей, большее 5, а ученик — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а 2 ученика — на 1 ч быстрее. Из какого количества *деталей состоит заказ?*

7.10.3. [МГУ, эк. ф-т] Линию, связывающую города А и Б, обслуживают не более восьми самолетов трех типов. Каждый самолет первого, второго и третьего типов может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найти число действующих на линии самолетов.

7.10.4. [МГУ, геолог. ф-т] Трое мальчиков хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, дети не могли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку игрушек не хватило бы 34 копеек. Когда третьему мальчику добавили денег в размере в два раза большем, чем у него было, то после покупки игрушек у детей оставалось 6 копеек. Сколько стоили игрушки, если первоначально у второго мальчика было на 9 копеек больше, чем у первого?

7.10.5. [ГАУ] На празднике каждому ребенку было подарено по одинаковому количеству игрушек. Число игрушек, подаренных каждому ребенку, было на 9 меньше общего числа детей, присутствовавших на празднике. Если бы на празднике было 9 детей и каждому ребенку дарили бы на одну игрушку больше, чем раньше, то прежнего количества игрушек не хватило бы. Сколько игрушек было подарено, если известно, что число детей, присутствовавших на празднике, было нечетно?

7.10.6. [МИЭМ] За 5 лет со дня основания отдела число научных сотрудников увеличилось в 7 раз, а число лаборантов — в 10 раз, при этом общее число работников отдела осталось меньше 45. Еще через 5 лет число научных сотрудников увеличилось в 2 раза, а число лаборантов сократилось в 2 раза и общее число работников стало больше 42. Сколько научных сотрудников и лаборантов было в отделе при его основании, если научных сотрудников было меньше, чем лаборантов?

7.10.7. [ГАУ] Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляла ровно 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки ровно на 23% от числа машин, производимых на первом заводе, и стал выпускать их более 1000 штук. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое количество машин.

7.10.8. [МГУ, эк. ф-т] Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 т, но один вагон оказался загруженным не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 т, однако понадобилось на 8 вагонов больше и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 т, однако понадобилось еще на 5 вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

7.10.9. [ГАУ; МГУ, филолог. ф-т] В двух бригадах более 27 человек. Число членов первой бригады более чем в 2 раза превышает число членов второй бригады, уменьшенное на 12. Число членов второй бригады более чем в 9 раз превышает число членов первой бригады, уменьшенное на 10. Сколько человек в каждой бригаде?

7.10.10. [МГУ, филолог. ф-т] В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее, чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

7.10.11. [МГУ, эк. ф-т] В учебном корпусе на каждом этаже находится одинаковое количество аудиторий. Всего в корпусе 96 аудиторий, и площадь каждой из них равна 46 м^2. При строительстве корпуса суммарные затраты на земляные, отделочные работы и оборудование аудиторий не превысили 252720 рублей, причем на отделочные работы было израсходовано по 2760 рублей на каждый этаж постройки, на оборудование аудиторий — по 2000 рублей на каждую аудиторию, и на земляные работы на отведенном под строительство участке земли — по 14 рублей на 1 м^2 земельного участка. Известно, что площадь участка земли не превосходит 2250 м^2, а общая площадь всех аудиторий одного этажа в 5 раз меньше площади земельного участка. Сколько этажей в корпусе?

11. Вопросы делимости целых чисел

7.11.1. [МГУ, ВМиК] Число двухкомнатных квартир в доме в 4 раза больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных увеличить в 5 раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если известно, что их не меньше 100?

7.11.2. [МГУ, эк. ф-т] На факультет от школьников подано на 600 заявлений больше, чем от производственников. Девушек среди школьников в 5 раз больше, чем девушек среди производственников, а юношей среди школьников больше, чем юношей среди производственников, в n раз, причем $6 \leqslant n \leqslant 12$ (n — целое число). Определить общее количество заявлений, если среди производственников юношей на 20 больше, чем девушек.

7.11.3. [МГУ, ф-т почвовед.] Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

7.11.4. [ГФА] Число научно-технических книг в библиотеке равно $\frac{11}{13}$ от числа художественных. При переезде библиотеке книги погрузили в два вагона. В первый вагон погрузили $\frac{1}{15}$ часть научно-технических книг и $\frac{18}{19}$ частей художественных. Во второй вагон погрузили $\frac{1}{19}$ часть художественных и $\frac{14}{15}$ научно-технических. Сколько книг каждого вида было в библиотеке, если в первом вагоне оказалось более 10000 книг, а во втором — менее 10000 книг?

7.11.5. [МГУ, псих. ф-т] В первой коробке находилось некоторое количество красных шаров, а во второй — синих, причем число красных шаров составляло $\frac{15}{19}$ от числа синих шаров. Когда из коробок удалили $\frac{3}{7}$ красных шаров и $\frac{2}{5}$ синих, то в первой коробке осталось менее 1000 шаров, а во второй — более 1000. Сколько шаров было первоначально в каждой коробке?

7.11.6. [МГУ, филолог. ф-т] Пусть m и n — натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

7.11.7. [МГУ, псих. ф-т] Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся в каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равным числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести за 2 дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу используемых аудиторий. Найти минимальное возможное число абитуриентов, которое могло бы быть проэкзаменовано при этих условиях.

7.11.8. [МГУ, псих. ф-т] Собранные на бахче арбузы уложили в одинаковые контейнеры, положив в каждый контейнер одинаковое число арбузов. Когда третью часть всех контейнеров погрузили в автомобили, то число погруженных контейнеров оказалось равным числу арбузов в одном контейнере. Пятая часть всех собранных арбузов была продана магазином в течение нескольких дней, причем каждый день продавалось одно и то же число арбузов, равное квадрату числа дней продажи. Какое минимальное количество арбузов могло быть собрано?

12. Наибольшие и наименьшие значения

7.12.1. [ГАУ] На собрании акционеров было решено увеличить прибыль предприятия за счет расширения ассортимента продукции. Экономический анализ показал, что 1) дополнительные доходы, приходящиеся на каждый новый вид продукции, окажутся равными 75 млн руб. в год; 2) дополнительные расходы при освоении одного нового вида продукции составят 13 млн руб. в год, а освоение каждого последующего вида потребует на 7 млн руб. в год больше расходов, чем освоение предыдущего. Найти значение максимального возможного прироста прибыли.

7.12.2. [МГУ, псих. ф-т] Две бригады трактористов одновременно начали пахать 2 участка земли, причем участок второй бригады вдвое больше участка первой. Во второй бригаде было на 10 трактористов больше, чем в первой. Когда первая бригада еще работала, вторая уже вспахала свой участок. Какое наибольшее число трактористов могло быть в первой бригаде, если все трактористы работали с одинаковой скоростью?

7.12.3. [МЭСИ] Два тела начинают одновременно двигаться равномерно по прямым Ox и Oy, пересекающимся под прямым углом. Первое тело движется со скоростью 3 км/ч по прямой Ox от точки A к точке O, находящейся на расстоянии 2 км от точки A. Второе тело движется со скоростью 4 км/ч по прямой Oy от точки B к точке O, находящейся на расстоянии 3 км от точки B. Найти наименьшее расстояние (в км) между этими телами во время движения.

7.12.4. [СГУ] От пристани оторвалась баржа и поплыла вниз по течению, скорость которого равна v км/ч. Когда баржа проплыла 3 км, от пристани вдогонку за ней отплыл катер, скорость которого в стоячей воде равна 9 км/ч. Катер догнал баржу и отбуксировал ее назад на пристань со скоростью 4 км/ч. а) Через сколько времени баржа была возвращена на пристань? б) При какой скорости v это время было бы наименьшим?

7.12.5. [СПбГУ] Трем бригадам поручена некоторая работа. Известно, что 1-ая и 2-ая бригады, работая вместе, могут выполнить ее за 55 дней. Известно также, что 3-я бригада затратила бы на эту же работу на 11 дней больше, чем 2-ая. Найдите наименьший возможный срок, за который выполнят эту работу три бригады, работая вместе.

7.12.6. [СПбГУ] Вода в резервуар поступает по трем трубам. Если открыты первые две из них, то этот резервуар наполнится за 45 часов. Известно также, что через третью трубу он наполнится на 9 часов быстрее, чем через вторую. Найдите наименьшее возможное время, за которое наполнится резервуар, если открыты все три трубы.

7.12.7. [МГУ, ИСАА] На счет, который вкладчик имел в начале первого квартала, начисляется в конце этого квартала r_1 процентов, а на тот счет, который вкладчик имел в начале второго квартала, начисляется в конце этого квартала r_2 процентов, причем $r_1 + r_2 = 150$. Вкладчик положил на счет в начале первого квартала некоторую сумму и снял в конце того же квартала половину этой суммы. При каком значении r_1 счет вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?

7.12.8. [МАДИ] Одна и та же резина на передних колесах автомобиля выходит из строя через 24000 км, а на задних — через 36000 км. Каково максимальное расстояние, которое автомобиль может пройти на этой резине, если передние и задние колеса можно менять местами?

7.12.9. [МЭСИ] Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v км/ч составляет $(90 + 0{,}4v^2)$ рублей в час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость 1 км пути была наименьшей?

7.12.10. [МЭСИ] Пункты A и B расположены на прямолинейной магистрали в 9 км друг от друга. Из пункта A в направлении пункта B выходит автомашина, двигающаяся равномерно со скоростью 40 км/ч. Одновременно из пункта B в том же направлении с постоянным ускорением 32 км/ч^2 выходит мотоцикл. Найти наибольшее расстояние между автомашиной и мотоциклом в течение первых двух часов движения.

13. Логические трудности в задачах

7.13.1. [МГУ, мех.-мат.] Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 120 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них уменьшил свою скорость на 12 км/ч, а другой — на 9 км/ч, то они также прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 ч позже. Найти скорость поездов.

7.13.2. [МПГУ] Из пункта A в пункт B вышел пешеход и выехал велосипедист, а из B в A выехал верховой. Все трое отправились в путь одновременно. Через 2 ч велосипедист и верховой встретились на расстоянии 3 км от середины AB, а еще через 48 мин встретились пешеход и верховой. Найдите скорость каждого и расстояние AB, если известно, что пешеход движется вдвое медленнее велосипедиста.

7.13.3. [МГТУ] По плану одной бригаде нужно изготовить на 600 изделий больше, чем другой за то же время. Чтобы каждая бригада выполнила свой план на 2 дня раньше, в первую бригаду добавили 4 человека, а во вторую — 3. Сколько рабочих было в каждой бригаде во время работы, если каждый из них изготовлял в среднем по 15 изделий в день?

7.13.4. [УрГУ] На рынке 1 кг апельсинов и 3 кг грейпфрутов вместе стоят столько же, сколько 4 кг мандаринов, а по 1 кг самого дорогого и самого дешевого из этих продуктов да еще 1 кг грейпфрутов и 2 кг мандаринов — столько же, сколько 6 кг апельсинов. Сколько стоит 1 кг каждого из этих фруктов, если 1 кг самого дорогого из них стоит на 1 рубль больше, чем 1 кг самого дешевого?

7.13.5. [МГУ, эк. ф-т] Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Не позже чем через 40 мин вслед за ним вышел второй. Известно, что в пункт B один из них пришел раньше другого не менее, чем на 1 час. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они бы пришли в пункт B с интервалом не более чем в 20 мин. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B, если скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого.

7.13.6. [МГУ, эк. ф-т] Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Не позже, чем через 1 ч 20 мин вслед за ним вышел второй. В пункт B сначала пришел один из пешеходов, а другой достиг B не раньше, чем через 2 ч после этого. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они прибыли бы в пункт B с интервалом не более, чем в 40 мин. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B, если скорость одного из них в 2 раза больше скорости другого.

7.13.7. [МГУ, мех.-мат.] Два бегуна стартовали раздельно в одной точке стадиона в беге на 25 кругов, причем второй начал движение, когда первый прошел полкруга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда бегуны были рядом. Когда через 13 мин он вернулся, бегуны снова были рядом. Если бы первый бегун после третьего круга увеличил скорость в 2 раза, а второй бегун после десятого круга — в 3 раза, то оба бегуна финишировали бы одновременно. Определить, с какой разницей во времени финишировали бегуны, если закончивший бег вторым пробегал за минуту менее круга.

Группа В

14. Разные задачи

7.14.1. [МЭСИ] Три брата, возраст которых образует геометрическую прогрессию, делят между собой некую сумму денег пропорционально своему возрасту. Если бы они сделали это через 3 года, когда самый младший окажется вдвое моложе самого старшего, то младший получил бы на 105, а средний на 15 рублей больше, чем сейчас. Сколько лет старшему брату?

7.14.2. [МГУ, мех.-мат.] Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 7 ч утра выехал автомобилист и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Мотоциклист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге в $\frac{5}{3}$ раза, а автомобилист — в $\frac{3}{2}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге равномерное). Они встретились в 9 ч 15 мин; автомобилист приехал в город в 11 ч, а мотоциклист приехал в село в 12 ч 15 мин. Определить, сможет ли автомобилист приехать в город до 11 ч 15 мин, если весь путь из села в город он будет ехать с первоначальной скоростью.

7.14.3. [МФТИ] Автомобили «Рено» и «Крайслер» движутся по кольцевой дороге, $\frac{1}{4}$ часть которой проходит по городу. Скорость «Рено» в городе равна $2v$, а за пределами города равна $\frac{9v}{4}$. Скорость «Крайслера» в городе равна v, а за пределами города равна $3v$. Автомобили одновременно въезжают в город. Через какое время один из них совершит обгон другого, если длина городского участка кольцевой дороги равна S?

7.14.4. [МГУ, геолог. ф-т] Четыре цеха изготавливают детали прессованием. В двух из них установлены прессы нового типа, а в двух — старого. Всего прессов каждого типа имеется не менее 5. Количество прессов во всех цехах одинаково. Изготовление 400 деталей на новом прессе занимает на 3 ч меньше времени, чем 420 деталей — на старом. На новых прессах изготовили по 200 деталей, а на старых — по 300. Если сложить время работы всех прессов, то окажется, что за получившееся суммарное время цех, оборудованный тремя новыми и двумя старыми прессами, работающими одновременно, может изготовить 17640 деталей. Найти производительность каждого пресса.

7.14.5. [МГУ, эк. ф-т] В 6 часов утра из пункта A в пункт B по течению реки отправились лодка и катер. Лодка прибыла в пункт B в 16 часов того же дня. Катер, дойдя до пункта B, сразу повернул и на своем пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов, а прибыл в пункт A не ранее 22 часов того же дня. Найти время прибытия катера в пункт B, если его собственная скорость (скорость в стоячей воде) вдвое больше собственной скорости лодки.

7.14.6. [ВШЭ] На базе имелось 3 вида наборов флажков: белых, красных и синих (в набор каждого вида входят флажки одного цвета). Спортивный лагерь купил для игры «Зарница» по одному набору белых и красных флажков и 4 набора синих (из расчета по одному флажку на каждого ребенка). При этом оказалось, что общее количество флажков больше, чем количество детей, на 2. Если бы было куплено 4 набора белых и 1 набор синих флажков, то 55 детям флажков бы не досталось. Если купить 4 набора красных флажков и 1 синих, то общее количество флажков будет на 39 меньше числа детей. Сколько детей было в лагере, если купив по 3 набора флажков каждого цвета, лагерь не обеспечил бы всех детей флажками?

7.14.7. [МГУ, геолог. ф-т] По расписанию автобус должен проходить путь AD, состоящий из отрезков AB, BC, CD длиной 5, 1, 4 км соответственно, за 1 ч. При этом, выезжая из пункта A в 10 ч, он проходит пункт B в 10 ч 10 мин, пункт C — в 10 ч 34 мин. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус, чтобы время, за которое автобус проходит половину пути от A до D (со скоростью v), сложенное с суммой абсолютных величин отклонений от расписания при прохождении пунктов B и D, превышало абсолютную величину отклонения от расписания при прохождении пункта C не более, чем на 28 мин?

7.14.8. [МГУ, геолог. ф-т] Автобус проходит путь AE, состоящий из участков AB, BC, CD, DE длиной 10, 5, 5, 6 км соответственно. При этом согласно расписанию, выезжая из пункта A в 9 ч, он проходит пункт B в $9\frac{1}{5}$ ч, пункт C — в $9\frac{3}{8}$ ч, пункт D — в $9\frac{2}{3}$ ч. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения пунктов B, C, D и времени движения автобуса от A до E при скорости v не превосходила 51,7 мин?

7.14.9. [МГУ, геолог. ф-т] Согласно расписанию катер проходит по реке, скорость течения которой 5 км/ч, путь из A в D длиной 15 км за 1 час. При этом, выходя из пункта A в 12 ч, он прибывает в пункты B и C, отстоящие от A на расстояние 11 км и 13 км соответственно, в 12 ч 20 мин и в 12 ч 40 мин. Известно, что если бы катер двигался из A в D без остановок с постоянной скоростью v (относительно воды), то сумма абсолютных величин отклонений от расписания прибытия в пункты B, C, D не превышала бы уменьшенного на полчаса времени, необходимого катеру для прохождения 5 км со скоростью v в стоячей воде. Какой из пунктов находится выше по течению: A или D?

7.14.10. [МГУ, геолог. ф-т] Согласно расписанию пароход проходит по реке, скорость течения которой 6 км/ч, путь из A в D длиной 18 км, за 1 ч. При этом, выходя из пункта A в 10 ч, он прибывает в пункты B и C, отстоящие от A на расстоянии 14 и 17 км соответственно, в 10 ч 12 мин и в 10 ч 18 мин. Известно, что если бы пароход двигался из A в D без остановок с постоянной скоростью v (относительно воды), то сумма абсолютных величин отклонений от расписания прибытия в пункты B, C и D не превышала бы уменьшенного на полчаса времени, необходимого пароходу для прохождения 6 км со скоростью v в стоячей воде. Какой из пунктов находится выше по течению: A или D?

7.14.11. [ГФА; МЭСИ] Имеются 3 сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди; второй — 10% меди и 90% марганца; третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

7.14.12. [МГУ, хим. ф-т] Даны три сплава. Состав первого сплава: 60% алюминия и 40% хрома. Состав второго сплава: 10% хрома и 90% титана. Состав третьего сплава: 20% алюминия, 50% хрома и 30% титана. Из них нужно приготовить новый сплав, содержащий 45% титана. Какие значения может принимать процентное содержание хрома в этом новом сплаве?

7.14.13. [ГФА] Имеется три сплава. Первый сплав содержит 70% олова и 30% свинца, второй — 80% олова и 20% цинка, третий — 50% олова, 10% свинца и 40% цинка. Из них необходимо приготовить сплав, содержащий 15% свинца. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание олова может быть в этом сплаве?

7.14.14. [МИЭТ] Турист идет из пункта A, находящегося на шоссе, в пункт B, расположенный в 8 км от шоссе. Расстояние от A до B равно 17 км. В каком месте туристу следует свернуть с шоссе, чтобы в кратчайшее время прийти в пункт B, если скорость туриста по шоссе 5 км/ч, а по бездорожью 3 км/ч?

7.14.15. [МГУ, эк. ф-т] Предприятие производит детские велосипеды и является убыточным. Известно, что при изготовлении m велосипедов в месяц расходы предприятия на выпуск одного велосипеда составляют не менее $\frac{168000}{m}+36-\left|12-\frac{72000}{m}\right|$ тыс. руб., а цена реализации каждого велосипеда при этом не превосходит $72-\frac{3}{1000}m$ тыс. руб. Определить ежемесячный объем производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключен.

7.14.16. [МГУ, эк. ф-т] Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\frac{40500}{n}+270-\left|90-\frac{40500}{n}\right|$ тыс. руб., а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $540-\frac{3}{10}n$ тыс. руб. Определить ежемесячный объем производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль.

7.14.17. [МЭСИ] Когда пароходы были еще несовершенны, считалось, что количество расхода в час топлива пропорционально кубу скорости парохода. При скорости 15 км/ч тратили 1,5 т угля в час по цене 18 рублей за тонну, а другие расходы составляли 16 рублей в час. Найти в рублях наименьшую стоимость прохождения пути в 2000 км.

7.14.18. [МГУ, эк. ф-т] Из строительных деталей двух видов можно собрать 3 типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для сборки 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго вида, соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее число квартир в них было наибольшим?

7.14.19. [МГУ, мех.-мат.] В двух различных емкостях содержались смеси воды и песка, причем в первой емкости было 1000 кг смеси, а во второй — 1960 кг. В обе емкости добавили воды. Причем процентное содержание песка в смесях уменьшилось в k раз в первой емкости и в n раз во второй. О числах k и n известно только, что $k \cdot n = 9 - k$. Найти наименьшее количество воды, которое могло быть долито в обе емкости вместе.

7.14.20. [МГУ, эк. ф-т] В магазине продаются красные и синие карандаши. Красный карандаш стоит 17 копеек, синий карандаш — 13 копеек. На покупку карандашей можно затратить не более 4 рублей. При покупке число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более чем на 5. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество красных и синих карандашей, при этом красных карандашей нужно купить как можно меньше. Сколько красных и сколько синих карандашей можно купить при указанных условиях?

7.14.21. [ГФА] Группа студентов сдавала экзамен по математике. Число студентов, сдавших экзамен, оказалось в интервале от 96,8% до 97,6%. Каково наименьшее возможное число студентов в такой группе?

7.14.22. [МГУ, геогр. ф-т] При подведении итогов соревнования вычислено, что процент числа членов бригады, перевыполнивших план, заключен в пределах от 92,5% до 93,5%. Определить минимально возможное число членов такой бригады.

7.14.23. [ГФА] Процент учеников некоторого класса, не повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 96,9% до 97,1%. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.

7.14.24. [МГУ, филолог. ф-т] В коробке находятся 13 красных и 17 белых шаров. Разрешается проводить в любом порядке и в любом количестве следующие операции:

а) увеличить на 2 число красных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых шаров;

б) увеличить на 1 число красных шаров и одновременно увеличить на 2 число белых шаров;

в) уменьшить на 2 число красных шаров и одновременно увеличить на 1 число белых;

г) уменьшить на 1 число красных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых.

Можно ли, совершая такие действия, добиться того, чтобы в ящике оказалось 37 красных и 43 белых шара? Ответ обосновать.

7.14.25. [МГУ, псих. ф-т] Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

– первая цифра числа в 3 раза меньше последней его цифры;

– сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой второй и третьей цифр, делится на 8 без остатка.

7.14.26. [МГУ, псих. ф-т] Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

– первая цифра в 3 раза меньше суммы двух других его цифр;

– разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81 без остатка.

7.14.27. [МГУ, эк. ф-т] Строительный отряд состоит из 32 бойцов, каждый из которых владеет одной или двумя строительными специальностями: каменщик, бетонщик, плотник. Бойцов, владеющих профессией плотника, в отряде в 2 раза больше, чем бойцов, владеющих профессией бетонщика, и в n раз меньше, чем бойцов, владеющих профессией каменщика, причем $3 \leqslant n \leqslant 20$ (n — целое число). Сколько бойцов в отряде владеет только одной профессией, если число бойцов, владеющих двумя профессиями, на 2 больше, чем число бойцов, владеющих профессией плотника?

7.14.28. [МГУ, эк. ф-т; ГФА] Две бригады землекопов вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она могла бы закончить работу на 2 часа раньше. Определить число землекопов в каждой бригаде, если производительность у всех одинакова.

7.14.29. [МГУ, псих. ф-т] Найти все тройки целых чисел u, v, w, для которых выполняется условие $3(u-3)^2 + 6v^2 + 2w^2 + 3v^2 \cdot w^2 = 33$.

7.14.30. [МГУ, филолог. ф-т] Через некоторое время после начала работы первая бригада собрала на 2 автомобиля больше, чем вторая. Затем вторая бригада увеличила производительность труда в 1,1 раза и, собрав на втором этапе работы целое число автомобилей n, догнала первую, работавшую все время с постоянной производительностью. Найти наименьшее возможное целое число n.

7.14.31. [ГФА] В вазе лежат конфеты двух сортов, причем число конфет первого сорта более, чем на 20 штук, превышает число конфет второго сорта. Одна конфета первого сорта весит 2 г, а конфета второго сорта — 3 г. Из вазы взяли 15 конфет одного сорта, вес которых составил $\frac{1}{5}$ часть от веса всех конфет, лежавших в вазе. Затем было взято еще 20 конфет другого сорта; их вес оказался равным весу оставшихся в вазе конфет. Сколько конфет каждого сорта лежало первоначально в вазе?

7.14.32. [МГУ, эк. ф-т] На прямой дороге расположены последовательно пункты A, B, C, D. Расстояние от пункта A до пунктов B, C и D находятся в отношении $1:2:4$. В направлении от A к D по дороге через равные промежутки времени с одной и той же скоростью едут автобусы. Из A в D вышли в разное время 3 пешехода и пошли по дороге с одной и той же скоростью. Первого пешехода после выхода из пункта A и до прихода в пункт B обогнали 3 автобуса. Второго пешехода после выхода из пункта A и до прихода в пункт C обогнали 4 автобуса. Известно, что когда он выходил из пункта A, через пункт A не проезжал очередной автобус. Третий пешеход вышел из A и пришел в D, когда через эти пункты проезжали очередные автобусы. Сколько автобусов обогнали третьего пешехода в пути между A и D?

7.14.33. [ГФА] Два брата продали стадо овец, выручив за каждую овцу столько рублей, сколько было в стаде овец. Желая разделить выручку поровну, они поступили следующим образом: каждый брат, начиная со старшего, брал из общей суммы по 10 рублей. После того, как в очередной раз старший брат взял 10 рублей, остаток от выручки оказался меньше 10 рублей. Желая его компенсировать, старший брат отдал младшему свой нож. Во сколько рублей был оценен этот нож? (Все суммы денег — целое количество рублей.)

7.14.34. [МГУ, ВМиК] На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на 3. Завод стал выпускать в день 11200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

7.14.35. [ГФА] Автобаза выделила автобусы для перевозки детей в два пионерских лагеря. Часть этих автобусов перевезла детей в один лагерь, а другая часть, в которой было на 4 автобуса больше, — во второй. В первом пионерлагере было 195 пионеров, а во втором — 255. Известно, что для любых двух автобусов, везших детей в один пионерский лагерь, количество перевозимых детей отличалось не более, чем на 1, а наибольшая разница в количестве перевезенных детей в двух автобусах для разных лагерей равна 5. Сколько было автобусов?

7.14.36. [МГУ, эк. ф-т] Фабрика получила заказ на изготовление 6000 деталей типа P и 2000 деталей типа Q. Каждый из 214 рабочих фабрики затрачивает на изготовление 5 деталей типа P время, за которое он мог бы изготовить 3 детали типа Q. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на 2 бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступают к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

7.14.37. [МГУ, эк. ф-т] Сорок девять колхозников, работающих с одинаковой производительностью, были разбиты на две бригады, каждая из которых собрала одинаковое количество картофеля. Первая бригада закончила работу на 1 час позже второй. Обе бригады работали с перерывами на отдых, причем вторая бригада отдыхала не менее $\frac{8}{9}$ часа и не более $\frac{8}{6}$ часа. Если бы обе бригады работали без перерывов, то первая бригада могла бы собрать картофеля в $\frac{7}{4}$ раза больше, а вторая — в $\frac{5}{3}$ раза больше. Сколько колхозников в каждой бригаде?

7.14.38. [МГУ, ВМиК] Из пункта A в пункт B по железной дороге нужно перевезти 20 больших и 250 малых контейнеров. Один вагон вмещает 30 малых контейнеров, вес каждого из которых 2 тонны. Большой контейнер занимает место 9 малых и весит 30 тонн. Грузоподъемность вагона 80 т. Найти минимальное число вагонов, достаточное для перевозки всех контейнеров.

8. Прогрессии

Основные сведения и формулы

1. *Арифметической прогрессией* с разностью d называется последовательность чисел (конечная или бесконечная), каждый член a_{n+1} которой равен предыдущему — a_n, сложенному с d, т. е. $a_{n+1} = a_n + d$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Сумма $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ первых n членов арифметической прогрессии находится по формулам: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

При решении задач на арифметическую прогрессию полезно записать все данные из условия, выразив их через a_1, d и (при необходимости) n.

Если три числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то выполняется равенство: $a + c = 2b$.

2. *Геометрической прогрессией* со знаменателем $q \neq 0$ называется последовательность чисел (конечная или бесконечная), каждый член b_{n+1} которой равен предыдущему — b_n, умноженному на q, т. е. $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Сумма $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ первых n членов геометрической прогрессии при $q \neq 1$ находится по формуле $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Если же $q = 1$, то $S_n = b_1 \cdot n$. При $q \in (-1; 1)$ сумма $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ всех членов геометрической прогрессии находится по формуле: $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

При решении задач на геометрическую прогрессию полезно записать все данные из условия, выразив их через b_1, q и (при необходимости) n.

Если три числа a, b, c являются последовательными членами геометрической прогрессии, то выполняется равенство: $ac = b^2$.

Группа А

1. Арифметическая прогрессия

8.1.1. [МВВДИУ] Второй и четвертый члены арифметической прогрессии равны 6 и 16 соответственно. Найти пятый член прогрессии.

8.1.2. [ГФА] Найти сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, если известно, что ее второй член равен 8, а десятый — сорока.

8.1.3. [МГУ, геолог. ф-т] Четвертый член арифметической прогрессии равен 16, а сумма седьмого и десятого 5. Найдите сумму первых восемнадцати членов прогрессии.

8.1.4. [МГУ, физ. ф-т] Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что пятый и девятый члены дают в сумме 40, а сумма седьмого и тринадцатого членов равна 58.

8.1.5. [ВАХЗ] Сумма четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 14. Найти сумму первых девяти членов прогрессии.

8.1.6. [МГУ, ВМиК] Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

8.1.7. [МАИ] Сумма второго, третьего и четвертого членов убывающей арифметической прогрессии в три раза больше квадрата разности этой прогрессии. Сумма третьего и шестого ее членов равна двум. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

8.1.8. [МИСиС] Найдите сумму девяти первых членов арифметической прогрессии, если разность между седьмым и третьим членами равна 8, произведение второго и седьмого членов равно 75, причем известно, что все члены прогрессии положительны.

8.1.9. [РЗИТЛП] В арифметической прогрессии член a_9 в 3 раза больше члена a_3, а при делении a_7 на a_3 получается частное 2 и остаток 1. Найти сумму первых десяти членов прогрессии.

8.1.10. [РГАЗУ] Найти сумму всех трехзначных натуральных чисел, кратных трем.

8.1.11. [РГГУ] Найти сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 11 дают в остатке 9.

8.1.12. [МПУ] При свободном падении тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую секунду на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Сколько времени будет падать тело с высоты 4410 м?

8.1.13. [МГАЛП] В арифметической прогрессии 20 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 250, а на нечетных — 220. Найти десятый член прогрессии.

8.1.14. [МАМИ] Сумма третьего и седьмого членов арифметической прогрессии равна 24, а их произведение равно 128. Найти разность прогрессии.

2. Геометрическая прогрессия

8.2.1. [РЭА] S_n — сумма первых n членов геометрической прогрессии. Найти знаменатель прогрессии, если при любом n выполняется равенство: $\log_3\left(\dfrac{S_n}{2}+1\right)=n$.

8.2.2. [МГУ, псих. ф-т] Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на $\dfrac{3}{2}$ больше, чем сумма ее первых трех членов. Пятый член прогрессии равен ее третьему члену, умноженному на 4. Найти четвертый член прогрессии, если известно, что ее знаменатель положителен.

8.2.3. [МГУ, геогр. ф-т] Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 12. Частное от деления второго члена на четвертый равно 3. Найти второй член прогрессии.

8.2.4. [БГАРФ] Определить три положительных числа, которые образуют геометрическую прогрессию, если их сумма равна 21, а сумма обратных величин равна $\dfrac{7}{12}$.

8.2.5. [МГТУГА] Найти геометрическую прогрессию, если сумма первых трех членов равна 7, а их произведение равно 8.

8.2.6. [МГАХМ] Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 12, а сумма первых шести членов равна −84. Найти третий член прогрессии.

8.2.7. [МЭИ] Частное от деления 4-го члена геометрической прогрессии на ее первый член равно 64, третий член прогрессии равен 8. Найти 1-й член прогрессии.

8.2.8. [МАИ] Найдите знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, если разность пятого и первого членов прогрессии в пять раз больше разности третьего и первого ее членов.

8.2.9. [ВГУ] В геометрической прогрессии сумма первых трех членов равна 9, а сумма первых шести членов равна -63. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

8.2.10. [МТУСИ] В геометрической прогрессии первый член равен 1, а сумма первых пяти членов в восемь раз превосходит сумму обратных величин этих же членов. Найдите знаменатель прогрессии.

8.2.11. [МАДИ] В геометрической прогрессии сумма первого и пятого членов равна 51, а сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов этой прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

8.2.12. [МЭИ] Сумма первого, удвоенного второго и утроенного четвертого членов геометрической прогрессии равна 2; ее первый член, знаменатель и второй член образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель и первый член геометрической прогрессии.

8.2.13. [МГГУ] Поместить между числами 7 и 56 два числа, которые образовывали бы вместе с данными числами геометрическую прогрессию.

8.2.14. [ГАНГ] Произведение восемнадцатого и двадцать третьего членов геометрической прогрессии равно 1,9. Найти произведение двенадцатого и двадцать девятого членов этой прогрессии.

8.2.15. [МГАХМ] Найти третий член геометрической прогрессии, если ее знаменатель равен 3, а сумма первых четырех членов равна -40.

3. Арифметическая и геометрическая прогрессии

8.3.1. [МТУСИ] Три числа x, y, z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а числа x, $2y$, $3z$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найти знаменатель геометрической прогрессии, отличный от единицы.

8.3.2. [МЭСИ] Три числа, сумма которых равна 78, образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Их можно рассматривать также как первый, третий и девятый члены арифметической прогрессии. Найти большее число.

8.3.3. [МГСУ] Три числа, третьим из которых является 12, составляют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то получившиеся числа составляют арифметическую прогрессию. Найти исходные числа.

8.3.4. [СПбГУ] Три числа являются первым, вторым и третьим членами арифметической прогрессии и, соответственно, первым, третьим и вторым членами геометрической прогрессии. Найдите эти числа, если известно, что сумма квадрата первого из них, удвоенного второго и утроенного третьего равна $\frac{3}{4}$.

8.3.5. [МИЭМ] Найти арифметическую прогрессию, если известно, что сумма первых десяти членов равна 300, а первый, второй и пятый члены прогрессии, кроме того, образуют геометрическую прогрессию.

8.3.6. [МГСУ] Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если от 1-го числа отнять 1, второе оставить без изменений, а от третьего отнять 19, то получатся числа, составляющие арифметическую прогрессию. Найти первоначальные три числа.

8.3.7. [ОмГТУ] 5 различных чисел являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если удалить ее 2-й и 3-й члены, то три оставшиеся числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найти ее знаменатель.

Группа Б

4. Арифметическая прогрессия

8.4.1. [ВАХЗ] Решить уравнение, в котором x — натуральное число:

$$\frac{x-1}{x^2}+\frac{x-2}{x^2}+\frac{x-3}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^2}=\frac{7}{15}.$$

8.4.2. [МИЭТ] При каких значениях α числа $2\cos\frac{\pi}{6}$, $4\sin\alpha$, $6\sin(\pi-\alpha)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

8.4.3. [МПУ] Даны три последовательных члена арифметической прогрессии $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$. Найти x.

8.4.4. [СПбГУ] Корни уравнения $x^3-6x^2+3x+a=0$ при некотором a образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.

8.4.5. [СПбГТУ] Найдите сумму первых 50 совпадающих членов двух арифметических прогрессий 2; 7; 12;... и 3; 10; 17;...

5. Геометрическая прогрессия

8.5.1. [МАДИ] В геометрической прогрессии сумма первого и пятого членов равна 51, а сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов этой прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

8.5.2. [МГУ, ИСАА] Найти x, если известно, что числа -1, $x+2$, $\sin(\arcsin x)$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессии.

8.5.3. [МГАПБ] Найти отношение третьего члена убывающей геометрической прогрессии к ее пятнадцатому члену, если сумма двенадцати членов этой прогрессии, начиная с тринадцатого, составляет 40% суммы ее первых двенадцати членов.

8.5.4. [МТУСИ] Найти три числа, образующие геометрическую прогрессию, зная, что сумма их равна 62, а сумма их квадратов равна 2604.

8.5.5. [МИСиС] Сумма первых трех членов убывающей геометрической прогрессии равна 14, а сумма их квадратов равна 84. Найдите первый член прогрессии.

8.5.6. [МАИ] Три числа a, b, c являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите

$$\frac{\log_b 3(\log_{a^2} c - \log_c \sqrt{a})}{\log_a 9 - 2\log_c 3}.$$

6. Арифметическая и геометрическая прогрессии

8.6.1. [МГУ, геогр. ф-т] Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел составляют геометрическую прогрессию. Найти a_1, a_2, a_3, если известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = 21$.

8.6.2. [МГСУ] Найти 4 положительных числа, из которых первые 3 составляют арифметическую прогрессию, а последние 3 — геометрическую прогрессию. Сумма первых трех чисел равна 12, а сумма последних трех равна 19.

8.6.3. [МГУ, ф-т почвовед.] Первый член арифметической прогрессии в два раза больше первого члена геометрической прогрессии и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвертый член арифметической прогрессии составляет 50% от второго ее члена. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй ее член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.

Группа В

7. Арифметическая прогрессия

8.7.1. [МГУ, геолог. ф-т] Длины сторон AB, BC и AC треугольника ABC образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найти отношение высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A на сторону BC, к радиусу вписанной окружности.

8.7.2. [МИФИ] При каких $y \in R$ числа $\sqrt{y^2+2y+1}$, $\dfrac{y^2+3y-1}{3}$, $y-1$, взятые в указанном порядке, являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

8.7.3. [ВШЭ] Найти такую арифметическую прогрессию, чтобы между суммой ее первых x членов и суммой kx следующих за ними членов существовало постоянное соотношение, не зависящее от x.

8.7.4. [МГУ, геогр. ф-т] При каких значениях параметра a четыре корня уравнения $x^4+(a-3)x^2+(a+10)^2=0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

8.7.5. [СПбГТУ] Найдите положительные a, для которых все различные неотрицательные x, удовлетворяющие уравнению $\cos\big((8a-3)x\big) = \cos\big((14a+5)x\big)$ и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

8.7.6. [МАИ] Найдите все целые числа, каждое из которых является первым членом арифметической прогрессии с разностью, равной 7, и суммой первых нескольких членов, равной 2744.

8. Геометрическая прогрессия

8.8.1. [СПбГТУ] Числа $1-\cos 2x$, $\cos x - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sin^{-2} x$ являются членами геометрической прогрессии с номерами k, $k+1$, $k+2$ соответственно. Найдите все значения x и k, если известно, что 15-й член этой прогрессии равен $\dfrac{27}{8}$.

8.8.2. [СПбГТУ] Решить уравнение $x^3+3x^2-6x+a=0$, зная, что есть три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию.

8.8.3. [МГУ, биолог. ф-т] Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна -4. Известно, что сумма шестых членов прогрессий равна -724. Найти сумму пятых членов прогрессий.

8.8.4. [МГУ, эк. ф-т] Натуральные числа a, b, c, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найти числа a, b и c, если известно, что при указанных условиях сумма $a+b+c$ максимальна.

9. Производная

Основные свойства и формулы

1. *Таблица производных простейших функций*

$$c' = 0 \quad \text{для любой константы } c;$$

$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad \text{для любого числа } \alpha \in R;$$

$$\left[\text{в частности,} \quad x' = 1,\ \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\right];$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a \quad \text{для любого } a > 0 \quad \left[\text{в частности,} \quad \left(e^x\right)' = e^x\right];$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{для любого } a > 0,\ a \neq 1$$

$$\left[\text{в частности,} \quad \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}\right];$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x; \quad \left(\cos x\right)' = -\sin x;$$

$$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

2. *Правила дифференцирования*

Для любых функций $u(x)$ и $v(x)$ и для любого числа $\alpha \in R$ справедливы формулы

$$\left(\alpha u(x)\right)' = \alpha u'(x); \quad \left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Если, кроме того, $v(x) \neq 0$ для всех допустимых x, то

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

3. *Правило дифференцирования сложной функции*

Если $f\left(u(x)\right)$ — сложная функция, то

$$\left(f\left(u(x)\right)\right)' = f'\left(u(x)\right) \cdot u'(x).$$

4. *Условия возрастания и убывания функции*

Если во всех точках некоторого интервала производная функции $f(x)$ больше (соответственно меньше) нуля, то $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) на этом интервале.

5. *Точки экстремума функции*

Точка x_0 называется точкой *максимума* (соответственно *минимума*) функции $f(x)$, если найдется некоторый интервал (a, b), содержащий точку x_0 и такой, что $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$) для всех $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$.

Точки максимума и минимума данной функции называются ее *точками экстремума*; значения функции в точках экстремума называются *экстремумами* этой функции.

6. *Необходимое условие экстремума (теорема Ферма)*

Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Точки из ОДЗ функции $f(x)$, в которых производная этой функции равна нулю или не существует, называются *критическими точками* $f(x)$.

7. *Уравнение касательной*

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) существует тогда и только тогда, когда в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$. В этом случае уравнение касательной имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ (или, эквивалентно, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, где $f(x_0) = y_0$).

Группа А

1. Вычисление производной

Найти производную функции $f(x)$:

9.1.1. [РЗИТЛП] $f(x) = x^2 \ln x$.

9.1.2. [НГТУ] $f(x) = 1 + x + \operatorname{tg} 2x$.

9.1.3. [МТУСИ] $f(x) = ax^2 + bx + c$.

9.1.4. [МТУСИ] $f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{x}$.

9.1.5. [МТУСИ] $f(x) = 0{,}8\sqrt[4]{x} - \dfrac{x^3}{0{,}3} + \dfrac{1}{5x^2}$.

9.1.6. [МТУСИ] $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$.

9.1.7. [РЗИТЛП] $f(x) = \dfrac{\sin 5x}{x^5 + 5}$.

9.1.8. [МТУСИ] $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^3$.

9.1.9. [МТУСИ] $f(x) = x(2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3}) + 3$.

2. Вычисление производной в заданной точке

Найти производную функции $f(x)$ в точке x_0:

9.2.1. [МАДИ] $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+3}$, $x_0 = 1$.

9.2.2. [МТУСИ] $f(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}$, $x_0 = 3$.

9.2.3. [МТУСИ] $f(x) = \cos x - \dfrac{2}{\pi}x^2 + 1$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

9.2.4. [ГУЗ] $f(x) = (x^3 - 2x + 1)\cos x$, $x_0 = 0$.

9.2.5. [СПбИЭА] $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)\cos x$, $x_0 = 0$.

Выбрать один из ответов: 1) -3; 2) 0; 3) 1; 4) $-\dfrac{\pi}{2}$; 5) 3; 6) 2.

9.2.6. [МГГУ] $f(x) = \dfrac{2\lg x}{\lg e} - \dfrac{1}{4}x - \log_2 5$, $x_0 = 2$.

9.2.7. [МТУСИ] $f(x) = (2-x)\cos x$, $x_0 = \pi$.

9.2.8. [МГТА] $f(x) = \dfrac{1}{\pi}x^2 \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

9.2.9. [МТУСИ] $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} - \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

9.2.10. [МТУСИ] $f(x) = (x^2 - 4x + 4)\operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$.

9.2.11. [КГАЦМЗ] $f(x) = 2\sin 2x + 3\cos x + \dfrac{\pi}{2}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

9.2.12. [ГУЗ] $f(x) = \dfrac{x^2 + 1 + \sin x}{\cos x}$, $x_0 = 0$.

9.2.13. [МТУСИ] $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x \cdot \operatorname{tg} 2x + \dfrac{5}{2}\cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

9.2.14. [МГАХМ] $f(x) = \ln(6x - x^2)$, $x_0 = 1$.

9.2.15. [МГАХМ] $f(x) = e^{2\sin x + x^3}$, $x_0 = 0$.

9.2.16. [МГАПП] $f(x) = \sin^2 3x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

9.2.17. [МИИ] $f(x) = \sqrt[4]{3 - 2x^2} + 3^x \cdot \dfrac{2}{\ln 3}$, $x_0 = 1$.

3. Промежутки монотонности

В задачах 9.3.1–9.3.11 найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$:

9.3.1. [КПИ] $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$.

9.3.2. [МПГУ] $f(x) = 3x^3 - \dfrac{9}{2}x^2$.

9.3.3. [МПГУ] $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 + 15x$.

9.3.4. [МПГУ] $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

9.3.5. [МГЗИПП] $f(x) = -x^3 + 3x$.

9.3.6. [МГЗИПП] $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$.

9.3.7. [МГУГиК] $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2}}$.

9.3.8. [МГУГиК] $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{3-x^2}}$.

9.3.9. [МАИ] $f(x) = 2^x + 4^{-x}$.

9.3.10. [МАИ] $f(x) = 9^{-x} + 3^x$.

9.3.11. [МАТИ] $f(x) = x^2 - 4x - 2\ln(x-2) + 7$.

В задачах 9.3.12–9.3.13 найти середину промежутка убывания функции $f(x)$:

9.3.12. [МГАПБ] $f(x) = x - \ln x$.

9.3.13. [МГАПБ] $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

9.3.14. [МПГУ] Найти промежутки возрастания функции

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1.$$

4. Экстремумы

В задачах 9.4.1–9.4.3 найти максимум функции $f(x)$:

9.4.1. [РЭА] $f(x) = -0{,}5x^4 + 2x^3$.

9.4.2. [МГУЛ] $f(x) = (x-4)^2(x-1)$.

9.4.3. [МГУК] $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.

В задачах 9.4.4–9.4.6 найти минимум функции $f(x)$:

9.4.4. [РЭА] $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

9.4.5. [МГАПБ] $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

9.4.6. [МГУ, геогр. ф-т] $f(x) = 6x + e^{-6x}$.

9.4.7. [МГАПБ] Найти точку минимума функции $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 2}$.

В задачах 9.4.8–9.4.13 найти экстремумы функции $f(x)$:

9.4.8. [МПГУ] $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x.$

9.4.9. [МГУГиК] $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x.$

9.4.10. [МТУСИ] $f(x) = x\ln x.$

9.4.11. [ГФА] $f(x) = x \cdot e^{-3x}.$

9.4.12. [ОмГТУ] $f(x) = -x^2 + 2\ln x.$

9.4.13. [ГФА] $f(x) = \left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^2.$

9.4.14. [МГУГиК] Найти точки экстремума функции $f(x) = x^5 - 5x^4$.

5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

В задачах 9.5.1–9.5.22 найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на заданном отрезке:

9.5.1. [МГТУ] $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3,\ [-2;2].$

9.5.2. [КПИ] $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1,\ [-2;6].$

9.5.3. [МПГУ] $f(x) = x^2(x-3) + 5,\ [0;3].$

9.5.4. [МГАУ] $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5,\ [1;4].$

9.5.5. [МГТУГА] $f(x) = x^2(x-2),\ [1;2]$. Сделать чертеж.

9.5.6. [МПГУ] $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 1,\ [-1;1].$

9.5.7. [МТУСИ] $f(x) = x^3 - 3x^2,\ [1;3].$

9.5.8. [ЛГПИ] $f(x) = 4x^4 - 2x^2 - 5,\ [0;2].$

9.5.9. [КПИ] $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 2x + \dfrac{3}{2},\ [-1;2].$

9.5.10. [МАИ] $f(x) = x^4 - 4x^2,\ [-3;3].$

9.5.11. [РХТУ] $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5,\ [-2;3].$

9.5.12. [КПИ] $f(x) = x^5 - x^3 + x + 2,\ [-1;1].$

9.5.13. [МГУГиК] $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x},\ [-5;-1].$

9.5.14. [МПГУ] $f(x) = \dfrac{(x-1)^4}{x+1},\ [0{,}5;1].$

9.5.15. [МПГУ] $f(x) = \dfrac{x}{x - x^2 - 1},\ [-2;2].$

9.5.16. [ГФА] $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-9}$, $[4;6]$.

9.5.17. [ГФА] $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x-2}$, $[-1;1]$.

9.5.18. [МПГУ] $f(x) = x \cdot \ln 5 - x\ln x$, $\left[\dfrac{5}{3}; 2{,}5\right]$.

9.5.19. [МГТУ] $f(x) = \ln(2x) - x^2 + x$, $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

9.5.20. [МГТУ] $f(x) = \ln(2x) - 6x^2 + 11x$, $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

9.5.21. [МГСоцУ] $f(x) = 2x - \operatorname{tg} x$, $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

9.5.22. [РГМУ] $f(x) = x^2 - 6x + 10 - 9\sqrt[3]{(x-3)^4} + 27\sqrt[3]{(x-3)^2}$, $[-5;4]$.

В задачах 9.5.23–9.5.31 найти наименьшее значение функции $f(x)$ на заданном отрезке:

9.5.23. [МГУЛ] $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $[-1;5]$.

9.5.24. [РЭА] $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 5$, $[-1;8]$.

9.5.25. [РЭА] $f(x) = 3x + \dfrac{9}{x} + \dfrac{4}{x^3}$, $[1;3]$.

9.5.26. [МИИ] $f(x) = \dfrac{3}{2}x^4 - 6x + 3$, $[-1;2]$.

9.5.27. [РЭА] $f(x) = x^2 - 4\sqrt{x} + 2$, $\left[\dfrac{1}{4}; 4\right]$.

9.5.28. [РЭА] $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}}$, $[-1;0]$.

9.5.29. [РЭА] $f(x) = 4x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 3$, $\left[\dfrac{1}{9}; 1\right]$.

9.5.30. [РЭА] $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$, $[1;9]$.

9.5.31. [РЭА] $f(x) = 2\log_2^3 x - 15\log_2^2 x + 36\log_2 x$, $[4;16]$.

В задачах 9.5.32–9.5.38 найти наибольшее значение функции $f(x)$ на заданном отрезке:

9.5.32. [МГАПБ] $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, $[-2;2]$.

9.5.33. [МГАПБ] $f(x) = x^5 - x^3 + x + 2$, $[-1;1]$.

9.5.34. [ГАУ] $f(x) = x^{\frac{5}{2}} - 20x$, $[1;9]$.

9.5.35. [МГАПБ] $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 16}$, $[1;6]$.

9.5.36. [МТУСИ] $f(x) = \dfrac{1}{-2x^3 + 3x^2 + 12x + 8}$, $[-3; 3]$.

9.5.37. [МТУСИ] $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$, $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

9.5.38. [МГУ, геогр. ф-т] $f(x) = \dfrac{x}{2} + \sin^2 x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

6. Касательная

В задачах 9.6.1–9.6.11 найти уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

9.6.1. [МАИ] $f(x) = 0{,}5x^2 + x + 1$, $x_0 = 2$.

9.6.2. [МАИ] $f(x) = 2 + x - x^2$, $x_0 = 2$.

9.6.3. [МПГУ] $f(x) = \dfrac{x^2}{6}$, $x_0 = 2$.

9.6.4. [МПГУ] $f(x) = x - x^2 + 3$, $x_0 = 2$.

9.6.5. [МТУСИ] $f(x) = x^4 - 2x^2$, $x_0 = 0{,}5$.

9.6.6. [БСА] $f(x) = \sqrt{x} + 1$, $x_0 = 4$.

9.6.7. [БСА] $f(x) = e^x + 2$, $x_0 = 0$.

9.6.8. [МАИ] $f(x) = \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

9.6.9. [МАИ] $f(x) = \sin(x + \pi) + 1$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

9.6.10. [ГАУ] $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$, $x_0 = 2\ln 2$.

9.6.11. [МТИ] $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

В задачах 9.6.12–9.6.14 найти уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс:

9.6.12. [ЛГПИ] $y = 6x^2 - 5x + 1$.

9.6.13. [ГАСБУ] $y = x^2 - 2x$.

9.6.14. [МТУСИ] $y = 8x^3 - 1$.

В задачах 9.6.15–9.6.16 найти уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точках пересечения этого графика с осью ординат:

9.6.15. [МТУСИ] $y = 3x^3 + 2x + 5$.

9.6.16. [МГГА] $y = 4 + \sqrt[3]{x^5} + \operatorname{ctg}\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

В задачах 9.6.17–9.6.19 найти угол касательной к графику функции $y = f(x)$ с осью Ox в точке с абсциссой x_0:

9.6.17. [МПГУ] $y = \frac{1}{2}x^2,\ x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

9.6.18. [МПГУ] $y = 5 - 0{,}5x^2,\ x_0 = -\sqrt{3}$.

9.6.19. [МПГУ] $y = x^3,\ x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

В задачах 9.6.20–9.6.23 найти абсциссу x_0 точки графика функции $y = f(x)$, в которой касательная к нему параллельна заданной прямой:

9.6.20. [МГУЛ] $y = x^2 - 3x + 2$, прямая $2x + y = 5$.

9.6.21. [МГГУ] $y = x^2 - 2x + 5$, прямая $y = 2x$.

9.6.22. [МГУГиК] $y = 2e^{-x} + 1$, прямая $y = -2x + 4$.

9.6.23. [РЭА] $y = 8\sin x + \sqrt{27}\,\mathrm{tg}\,x + x$, прямая $y = x + 3$; $x_0 \in [-\pi; 0]$.

9.6.24. [ГАСБУ] В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол в $135°$?

9.6.25. [МАИ] Найти координаты точек пересечения с осями координат тех касательных к графику функции $y = \frac{2x-2}{x+1}$, у которых угловой коэффициент равен 4.

9.6.26. [РЭА] В точке $A(5,\ 0)$ проведена касательная к графику функции $y = \frac{30}{x} - \frac{6x}{5}$. Найти длину отрезка касательной, заключенного между осями координат.

9.6.27. [ГАНГ] Найти длину отрезка, отсекаемого осями координат на касательной к кривой $y = 12\sqrt{x - 44}$, проведенной в точке с абсциссой $x = 108$.

В задачах 9.6.28–9.6.30 найти площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

9.6.28. [РЭА] $y = \frac{2}{x} - \frac{8}{x^3} + x,\ x_0 = 2$.

9.6.29. [МГГА] $y = \frac{1 - x^3}{x^2},\ x_0 = -1$.

9.6.30. [МГУ, псих. ф-т] $y = \frac{x}{2x-1},\ x_0 = 1$.

9.6.31. [РЭА] К графику функции $f(x) = 2x^4 - x^3 - \frac{4}{3}x + 1$ в точке $x = 0$ проведена касательная. Найти расстояние от начала координат до этой касательной.

7. Задачи на применение производной

9.7.1. [РЭА] В прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и углом 60° вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе. Определить большую из сторон прямоугольника.

9.7.2. [РЭА] В шар вписан цилиндр наибольшего объема. Найти отношение объема шара к площади основания цилиндра, если радиус шара равен 5 см.

9.7.3. [РЭА] В конус радиуса 4 дм и высотой 6 дм вписан цилиндр наибольшего объема. Определить высоту цилиндра.

9.7.4. [ГФА] Из всех треугольников с одинаковым основанием a и одним и тем же углом при вершине α найти треугольник с наибольшим периметром.

9.7.5. [МГСоцУ] Найти наименьшее значение суммы трех сторон прямоугольника при заданной площади S.

9.7.6. [МГСоцУ] Найти наименьшую сумму трех сторон параллелограмма с острым углом α и при заданной площади S.

9.7.7. [ГАУ] В шар радиуса R вписан цилиндр, имеющий наибольшую боковую поверхность. Найти объем этого цилиндра.

9.7.8. [МГТУ] Представить число 20 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

9.7.9. [МГТУ] Сумма квадратов двух положительных чисел равна 300. Подобрать эти числа так, чтобы произведение одного из них на квадрат другого было наибольшим.

9.7.10. [МГСоцУ] Найти такое положительное число a, которое сложенное с обратным ему числом дает экстремальную сумму. Что это будет: максимум или минимум?

9.7.11. [МТУСИ] Найти число, утроенный квадрат которого превышает его куб на максимальное значение.

9.7.12. [МАДИ] Число 64 разбейте на два слагаемых так, чтобы сумма первого слагаемого с квадратом второго была бы наименьшей.

8. Прочие

9.8.1. [МВИПВ] Вычислить $f'(0)-g'(2)$, если $f(x)=3x^3-4{,}5x^2+2x+5$, $g(x)=\dfrac{2x}{x-1}$.

9.8.2. [МГТА] Найти (в градусах) решение x уравнения

$$\cos^2 x - 2f'(x) = \sin x \cdot f'(x),$$

удовлетворяющее условию $180° < x < 270°$, если $f(x)=\cos x$.

9.8.3. [МТУСИ] Решить уравнение $f'(x)+[f(2x)]'=0$, если $f(x)=$ $=4x^2+2x+27$.

9.8.4. [МТУСИ] Дано: $F(x)=\dfrac{x}{2-x}+2$. Найти сумму корней уравнения $F(x)=F'(x)$.

9.8.5. [МАИ; МГАПБ] На отрезке $[-2;2]$ найти наименьшее значение производной функции $y=-\dfrac{1}{3}x^3+x+1$.

9.8.6. [УГГА] Решить неравенство $f'(x)<0$, если $f(x)=-3x^3+2x^2+4$.

В задачах 9.8.7–9.8.10 исследовать функцию $f(x)$ с помощью производной и построить ее график:

9.8.7. [МГГА] $f(x)=2-3x^2-x^3$.

9.8.8. [МАСИ] $f(x)=(x-1)^2(x+3)$.

9.8.9. [ВГПИ] $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x$.

9.8.10. [МАСИ] $f(x)=x^4-5x^2+4$.

9.8.11. [МГУ, геогр. ф-т] Найти все точки, где производная функции $y=3-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{8}\right)$ равна $2\sqrt{2}$.

9.8.12. [МГУ, ВМиК] Найти координаты точки, лежащей на прямой $-4x-3y=25$ и наименее удаленной от начала координат.

Группа Б

9. Вычисление производной от громоздких выражений

В задачах 9.9.1–9.9.4 найти $f'(x)$, предварительно упростив выражение для $f(x)$:

9.9.1. [МУПОЧ «Дубна»]

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^6+6x^3+9}+\sqrt{x^2+6x+9}-6}{4(x^4+x^2)}\cdot\left(16^{\log_2 x}+9^{\log_3 x}\right).$$

9.9.2. [МЭИ]

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^{-0,5}\frac{x^4+\sqrt{x^9}}{\sqrt{6}-\sqrt{10-\sqrt{96}}}.$$

9.9.3. [МЭИ]

$$f(x)=\frac{\left[(x-2)^2+(x+1)^2\right]^2-\left[(x-2)^2-(x+1)^2\right]^2}{4(x^2-x-2)}-4^{\log_4(x-3)}.$$

9.9.4. [МЭИ] $f(x)=\left[x\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{(x+1)^2}}+\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right]^{-\frac{3}{5}}\cdot(x^2-1)^{-\frac{4}{5}}\times$
$\times\left(1+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{10+7\sqrt{2}}{10-7\sqrt{2}}}\right)^{\log_2(x^2-1)}.$

В задачах 9.9.5–9.9.7 найти $f'(x_0)$:

9.9.5. [МИСиС] $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-12x+4x^2}}{\sqrt{9+12x+4x^2}}-\dfrac{24x}{9-4x^2}+\dfrac{2x}{3-2x},\ x_0=2{,}5.$

9.9.6. [МИСиС] $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}:\dfrac{\sqrt{x}+x}{x+\sqrt{x}+1},\ x_0=\dfrac{1}{3}.$

9.9.7. [МТУСИ]

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\left[\left(1+\frac{4}{x-2}\right)(x-4+4x^{-1})-3\right]\cdot\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-1}}{(\sqrt{x}+2)^{-1}}\right]^{-1},\quad x_0=1.$$

10. Расстояние от точки до кривой

9.10.1. [РГМУ] На графике функции $y=\dfrac{9}{x-3}$ при $x\in[4;7]$ найти точку, расстояние от которой до точки $A(3;0)$ является наименьшим.

В задачах 9.10.2–9.10.6 найти кратчайшее расстояние от точки M до точек графика функции $y=f(x)$:

9.10.2. [ГАНГ] $y=x^2$, M$(0;2{,}81)$.

9.10.3. [МГУ, хим. ф-т] $y=x^2+\dfrac{1}{2}$, $M\left(\dfrac{1}{4};1\right)$.

9.10.4. [МГУЛ] $y=\sqrt{x+e^{-x}}$, $M(0;0)$.

9.10.5. [МПГУ] $y=|x|\cdot\sqrt{4-x}$, $M(-4;0)$.

9.10.6. [МПГУ] $y=\sqrt{10+x-2x^2}$, $M(0;0)$.

11. Задачи с параметрами

9.11.1. [РЭА] Найти наибольшее значение a, при котором $x = 6$ является точкой экстремума функции $y = (x-a)^3 - 3x + a$.

9.11.2. [РЭА] При каком значении a максимум функции

$$f(x) = 3ax^2 - 12ax + a^2 - 11$$

равен 2?

9.11.3. [МПГУ] Каким должно быть выбрано a, чтобы точка 1 была точкой максимума функции $f(x) = ax^2 - \dfrac{1}{x}$ при $x > 0$?

9.11.4. [ГАНГ] При каком значении параметра a прямая $y = ax + 4$ касается графика функции $y = -\dfrac{10}{x}$?

9.11.5. [РЭА] Найти значение a, при котором касательная к параболе $y = 2x^2 + 3x + 5$ в точке $x_0 = -2$ является касательной к параболе $y = -x^2 + 4x + a$.

9.11.6. [ГАНГ] При каком значении c функция $y = x^3 - 2{,}4x^2 + cx - 8{,}4$ не имеет экстремума в критической точке?

9.11.7. [ЛГПИ] Найти значения p, при которых прямая $y = 7x + p$ будет касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 5x - 7$.

9.11.8. [ВГПИ] При каких значениях m функция

$$f(x) = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 48mx + 6x - 3$$

возрастает на всей числовой прямой?

9.11.9. [МГУ, ИСАА] При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения $x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8 = 0$ является наименьшей? Чему равна эта сумма?

12. Прочие

9.12.1. [МГУЛ] Найти значение производной функции $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ в точке $a = \alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$.

9.12.2. [МГГА] К графику функции $y = 8x - x^2 - 10$ проведены две касательные. Первая проводится в точке $x_0 = 3$, вторая — в точке максимума этой функции. Найти площадь треугольника, образованного этими касательными и осью ординат.

9.12.3. [ЛГПИ] Дана функция $f(x) = |x-1| + \dfrac{x^2}{2}$, построить график функции $f'(x)$.

9.12.4. [МГУ, филос. ф-т] Найти наибольшее значение функции $y(x) = x^3 - \dfrac{4}{3}|x|$ на отрезке $[-1{,}1; +1{,}1]$.

9.12.5. [МГТУ] Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -x^2 + 7|x| - 12$ на отрезке $[-4; 3]$.

9.12.6. [МПГУ] Найти промежутки возрастания функции $y = 6x^3 - -3|x-1|$.

9.12.7. [МПГУ] Найти наибольшее значение функции $y = |x^2 - x - 6| - x^3$ на промежутке $[-4; 4]$.

9.12.8. [МГТУ] Найти площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы объема V, имеющей наименьшую сумму длин всех ее ребер.

9.12.9. [ЛГПИ] Найти критические точки функции

$$y = \sqrt{1 + 2x + x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

и построить ее график.

9.12.10. [РЭА] Найти наименьшее значение функции $f(x) = 3x + \dfrac{27}{x}$ на множестве решений системы неравенств $\begin{cases} \dfrac{9}{x+3} \geqslant 1, \\ |x-4| \leqslant 3. \end{cases}$

9.12.11. [ГАУ] Найти наибольшее значение функции $y = \dfrac{\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{4\cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1}$.

9.12.12. [МГГА] Исследовать функцию и построить график

$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1.$$

Группа В

13. Разные задачи

9.13.1. [МГУ, ф-т почвовед.] Для каждого положительного числа a найти наибольшее значение функции $y = \dfrac{1}{3}(x-a)^3 + (x-a)^2$ на промежутке $-2 \leqslant x \leqslant 0$.

9.13.2. [ГАУ] При каких значениях параметра a уравнение $ax^6 = e^x$ имеет одно положительное решение?

9.13.3. [МАИ] На оси координат Oy найти точку, из которой можно провести две взаимно перпендикулярные касательные к графику функции $y = x^2 - 2x + 3$.

9.13.4. [МГТУ] На прямой $2x - 3y = 6$ найти точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y = \dfrac{x^2}{4}$.

9.13.5. [ГФА] Пусть M — точка на прямой $y = -x + 1$, а N — точка на параболе $y = x^2 - 5x + 6$. Чему равно наименьшее значение длины отрезка MN?

9.13.6. [МГТУ] Точка A лежит на графике функции $y = \dfrac{1}{8}(x^2 - 12x)$, точка B — на кривой $x^2 + y^2 - 18x - 12y + 97 = 0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка AB?

9.13.7. [МАИ] Какой наибольший объем может иметь правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой имеет длину 1 см?

Часть II
Геометрия

10. Планиметрия

Основные формулы планиметрии

1. *Произвольный треугольник*

Обозначения: a, b, c — стороны; α, β, γ — величины противолежащих им углов; $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; S — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне a.

$$\text{Теорема синусов:} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

$$\text{Теорема косинусов:} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона)}, \quad S = pr, \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

2. *Прямоугольный треугольник*

Обозначения: a, b — катеты, c — гипотенуза.

$$\text{Теорема Пифагора:} \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c, \quad R = \frac{c}{2}.$$

3. *Равносторонний треугольник*

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{1}{2}R = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

4. *Параллелограмм*

Обозначения: a и b — смежные стороны, α — угол между ними, h_a — высота, проведенная к стороне a.

$$S = ah_a = ab\sin\alpha.$$

5. *Ромб*

$$S = ah_a = a^2\sin\alpha.$$

6. *Трапеция*

Обозначения: a и b — основания, h — высота.

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

7. *Окружность*

Длина дуги окружности радиуса R равна αR, где α — радианная мера центрального угла, соответствующего этой дуге. Длина всей окружности радиуса R равна $2\pi R$.

8. *Круг*

Площадь сектора с углом, радианная мера которого α, равна $\frac{\alpha}{2}R^2$, где R — радиус круга. Площадь всего круга радиуса R равна πR^2.

Группа А

1. Треугольник

10.1.1. [МАТИ] Две стороны треугольника равны соответственно 6 см и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, перпендикулярны. Найти площадь треугольника.

10.1.2. [МАТИ] Основание треугольника равно 26 см. Медианы боковых сторон равны 30 см и 39 см. Найти площадь треугольника.

10.1.3. [МАТИ] Медианы треугольника равны 3 см, 4 см, 5 см. Найти площадь треугольника.

10.1.4. [МАТИ] Основание треугольника равно 14 см, а медианы, проведенные к боковым сторонам — $3\sqrt{7}$ см и $6\sqrt{7}$ см. Найти боковые стороны треугольника.

10.1.5. [МГУ, филолог. ф-т] Есть ли тупой угол у треугольника со сторонами 10, 14 и 17?

10.1.6. [МАИ] В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, а биссектриса внутреннего угла A пересекается со стороной BC в точке D такой, что $DA = DB$. Найти длину стороны BC.

10.1.7. [МАТИ] Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 35 см и 14 см, а биссектриса угла между ними содержит 12 см.

10.1.8. [МИРЭА] В треугольнике ABC на основании BC или на его продолжении взята произвольным образом точка D и около треугольников ACD и BAD описаны окружности. Доказать, что отношение радиусов этих окружностей есть величина постоянная. Найти такое положение точки D, для которого эти радиусы будут иметь наименьшую величину.

10.1.9. [МФТИ] В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D и стороны BC в точке E. Найти углы треугольника, если $BD : AD = 1 : 2$, $BE : CE = 1 : 3$.

10.1.10. [МИИТ] Найти площадь треугольника, вписанного в окружность, если концы его стороны, равной 20 см, отстоят от касательной, проведенной через противолежащую вершину на 25 см и 16 см.

10.1.11. [МАТИ] Высота, основание и сумма боковых сторон треугольника равны соответственно 12 см, 14 см, и 28 см. Найти боковые стороны.

10.1.12. [МАТИ] В треугольник со сторонами 10 см, 17 см и 21 см вписан прямоугольник с периметром 24 см так, что одна его сторона лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника.

10.1.13. [СПбГУ] К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18 см, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами 2 см. Найти основание треугольника.

10.1.14. [НГУ] Треугольник ABC вписан в окружность радиуса R. Точка D лежит на дуге BC, а хорды AD и BC пересекаются в точке M. Найти длину стороны BC, если $\angle BMD = 120°$, $AB = R$, $BM : MC = 2 : 3$.

10.1.15. [МИСиС] В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна медиане BN. Найти площадь треугольника ABC, если длина AM равна 3, а длина BN равна 4.

10.1.16. [МИРЭА] В окружность вписан треугольник ABC. Расстояние от точек A и C до прямой, касающейся окружности в точке B, равны 4 см и 9 см. Найти высоту треугольника, проведенную из вершины B.

10.1.17. [МГУ, физ. ф-т; МИРЭА] Даны углы B и C треугольника ABC ($\angle B \neq \angle C$). Найти котангенс острого угла x, который образует медиана, выходящая из вершины A, со стороной BC.

10.1.18. [НГУ] В остроугольном треугольнике ABC длины медиан BM, CN и высоты AH равны соответственно 4, 5 и 6. Найти площадь треугольника.

10.1.19. [МАТИ] В треугольнике основание равно 6 см, а высоты, опущенные на боковые стороны — 2 см и $2\sqrt{3}$ см. Найти боковые стороны треугольника.

10.1.20. [МАТИ] Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{13}$, а медиана третьей стороны равна 2.

10.1.21. [МИЭТ] В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом, $AC = 3$, $BC = 4$. Найти сторону AB этого треугольника.

10.1.22. [ЛГПИ] Основание треугольника равно a. Найти длину отрезка прямой, параллельной основанию и делящей площадь треугольника пополам.

10.1.23. [НижГУ] *Точка N лежит на стороне BC треугольника ABC,* точка M — на продолжении стороны AC за точку A, при этом $AM = AC$, $BN : NC = 3 : 4$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB?

10.1.24. [МАТИ] Пусть BD — высота треугольника ABC, точка E — середина стороны BC. Вычислить радиус круга, описанного около треугольника BDE, если длины сторон треугольника ABC: $AB = 30$ см, $BC = 26$ см и $AC = 28$ см.

10.1.25. [МАТИ] Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 1 см и $\sqrt{15}$ см, а медиана третьей стороны равна 2 см.

10.1.26. [ГАНГ] В треугольнике ABC из вершины B проведены высота BD и биссектриса BL. Найти площадь треугольника BLD, если известны длины сторон треугольника ABC: $AB = 6{,}5$; $BC = 7{,}5$; $AC = 7$.

10.1.27. [МТУСИ] В треугольник вписана окружность с радиусом 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки, длины которых 6 и 8. Найти длины сторон треугольника.

10.1.28. [ВГУ] В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D, находящейся между точками B и C, причем $CD : BC = \alpha$ $(\alpha < \frac{1}{2})$. На стороне BC между точками B и D взята точка E так, что $CD = DE$, и через нее проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найти отношение площадей трапеции $ACEF$ и треугольника ADC.

10.1.29. [МПГУ] Одна сторона треугольника равна a, другая — b. Найти третью сторону, если известно, что она равна медиане, проведенной к ней.

10.1.30. [СГПИ] Найти площадь треугольника по стороне a и прилежащим к ней углам α и β.

10.1.31. [МАДИ] В треугольнике ABC даны длины трех сторон BC, AC и AB, равные соответственно числам 41, 51 и 58. Вычислить площадь этого треугольника и длину высоты, опущенной из вершины B.

10.1.32. [РГПУ] Длины двух сторон треугольника равны 27 и 29. Длина медианы, проведенной к третьей стороне, равна 26. Найти высоту треугольника, проведенную к стороне длиной 27.

10.1.33. [МГУП] В треугольнике ABC высота AD на 4 см меньше стороны BC. Сторона AC равна 5 см. Найти периметр треугольника ABC, если его площадь равна 16 см^2.

10.1.34. [Институт наук о материалах] Точки M и N, D и E, K и L лежат соответственно на сторонах AB, AC и BC треугольника ABC, при этом $AM = MN = NB$, $BK = KL = LC$, $AD = DE = EC$. Вычислить площадь четырехугольника, образованного пересечениями прямых ML, NK, BD, BE, если площадь треугольника ABC равна S.

10.1.35. [ЛГПИ] Найти площадь треугольника, если основание равно a, углы при основании равны $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$.

10.1.36. [МТУСИ] В треугольнике с основанием 15 см проведен отрезок, параллельный основанию. Площадь полученной трапеции составляет 75% площади треугольника. Найти длину этого отрезка.

10.1.37. [МТУСИ] В треугольнике ABC величина угла C равна $60°$, а длина стороны $AB = \sqrt{31}$. На стороне AC отложен отрезок $AD = 3$. Найти длину BC, если $BD = 2\sqrt{7}$.

10.1.38. [МФТИ] Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает сторону AB в точке D так, что $AD = \frac{1}{3}AB$. Найти площадь треугольника ABC, если $AC = 1$.

10.1.39. [МГУЛ] В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, причем длина AD равна 5 см, длина CE равна 3 см, а угол между AD и CE равен $60°$. Найти длину стороны AC.

10.1.40. [ГАУ] Дан треугольник ABC, в котором угол B равен $30°$, $AB = 4$, $BC = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определить площадь треугольника ABD.

10.1.41. [ГАУ] Дан треугольник ABC, в котором $AC = 5$, $AB = 6$, $BC = 7$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Определить площадь треугольника ADC.

10.1.42. [ГАУ] На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки K и N так, что $CK : KA = 2 : 3$, $CN : NB = 4 : 3$. В каком отношении точка пересечения отрезков AN и BK делит отрезок KB?

10.1.43. [ГАУ] Точка N делит сторону RQ треугольника RPQ в отношении $RN : NQ = 2 : 7$; точка F делит сторону RP в отношении $RF : FP = 3 : 1$. Прямые QF и PN пересекаются в точке M. Найти длину MN, если $PM = 12$.

10.1.44. [ГАУ] Точки F и N делят стороны треугольника ABC в отношении $FA : FC = 3 : 1$ и $CN : NB = 2 : 3$. Прямые AN и BF пересекаются в точке M. Найти отношение площадей треугольников AMB и ANB.

10.1.45. [МАИ] Длины сторон AB, BC и CA треугольника равны соответственно 3 см, 20 см, 41 см. Найти расстояние от точки C до прямой, перпендикулярной AB и проходящей через середину AC.

10.1.46. [МГУ, псих. ф-т] В тупоугольном треугольнике ABC на стороне AB длины 14 выбрана точка L, равноудаленная от прямых AC и BC, а на отрезке AL — точка K, равноудаленная от вершин A и B. Найти синус угла ACB, если $KL = 1$, $\angle CAB = 45°$.

10.1.47. [МГУ, физ. ф-т] В треугольнике ABC медианы AD и CE взаимно перпендикулярны, $AB = c$, $BC = a$. Найти AC.

10.1.48. [МГУ, мех.-мат.] В треугольнике ABC проведены высоты AE и CD. Найти AB, если $BD = 18$, $BC = 30$, $AE = 20$.

10.1.49. [МГУ, мех.-мат.] В треугольнике ABC проведена биссектриса BE, которую центр O вписанной окружности делит в отношении $BO : OE = 2$. Найти AB, если $AC = 7$, $BC = 8$.

10.1.50. [МГУ, геогр. ф-т] В треугольник со сторонами $AB = 4$, $BC = 2$, $AC = 3$ вписана окружность. Найти площадь треугольника AMN, где M, N — точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

10.1.51. [МГУ, геогр. ф-т] В треугольник со сторонами $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 4$ вписана окружность. Найти длину отрезка DE, где D, E — точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

10.1.52. [МГУ, псих. ф-т] В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1. Известно, что $AC = 1$ и $\angle C_1CA_1 = \alpha$. Найти площадь круга, описанного около треугольника C_1BA_1.

10.1.53. [МГУ, псих. ф-т] В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CH и AH_1. Известно, что $AC = 2$ и площадь круга, описанного около треугольника HBH_1, равна $\frac{\pi}{3}$. Найти угол между высотой CH и стороной BC.

10.1.54. [МГУ, геолог. ф-т] На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол 15°. Найти углы треугольника ABC.

10.1.55. [МГУ, геолог. ф-т] Точка M, лежащая вне круга с диаметром AB, соединена с точками A и B. Отрезки MA и MB пересекают окружность в точках C и D соответственно. Площадь круга, вписанного в треугольник AMB, в 4 раза больше, чем площадь круга, вписанного в треугольник CMD. Найти меры углов треугольника AMB, если известно, что один из них в 2 раза больше другого.

10.1.56. [МГУ, физ. ф-т] В треугольнике ABC: $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $AB = c$. Найти площадь треугольника ABC.

10.1.57. [МГУ, физ. ф-т] Радиус окружности, описанной около треугольника KLM, равен R. Через вершину L проведена прямая, перпендикулярная стороне KM. Эту прямую пересекают в точках A и B серединные перпендикуляры к сторонам KL и LM. Известно, что $AL = a$. Найти BL.

10.1.58. [МГУ, физ. ф-т] Площадь треугольника ABC равна S, $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$. Найти BC.

10.1.59. [МГУ, физ. ф-т] Через центр окружности, описанной около треугольника ABC, проведены прямые, перпендикулярные сторонам AC и BC. Эти прямые пересекают высоту CH треугольника или ее продолжение в точках P и Q. Известно, что $CP = p$, $CQ = q$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

10.1.60. [МГУ, геогр. ф-т] В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найти площадь треугольника ABC.

10.1.61. [МГУ, ИСАА] Дан треугольник со сторонами 4, 8, 9. Найти длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

10.1.62. [МГУ, мех.-мат.] Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Из точки D радиусом равным AD, описана окружность, пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Вычислить длину стороны AC, если заданы длины отрезков $AB = c$, $AM = n$ и $AN = m$.

10.1.63. [МГУ, физ. ф-т] В треугольнике ABC угол C — тупой, D — точка пересечения прямой DB, перпендикулярной к AB, и прямой DC, перпендикулярной к AC. Высота треугольника ADC, проведенная из вершины C, пересекает AB в точке M. Известно, что $AM = a$, $MB = b$. Найти AC.

10.1.64. [МГУ, геолог. ф-т] Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке E и сторону BC в точке F. Угол AEC в 5 раз больше угла BAF, а угол ABC равен 72°. Найти радиус окружности, если $AC = 6$.

10.1.65. [РЭА] В треугольнике ABC: $AB = 4\sqrt{7}$, $AC = 5\sqrt{7}$, $BC = 6\sqrt{7}$. Найти расстояние от вершины B до точки пересечения высот треугольника ABC.

10.1.66. [РЭА] В треугольнике ABC угол A относится к углу C как $3:2$, $AB = 28\,\text{см}$, $BC = 33\,\text{см}$. Найти $\cos\frac{C}{2}$.

10.1.67. [РЭА] Площадь треугольника ABC равна 12. Из вершины тупого угла B проведена медиана BD, длина которой равна 3. Найти сторону AC, если угол ABD — прямой.

10.1.68. [РЭА] На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB в точке D так, что $AD : DB = 12 : 5$. Найти площадь треугольника ABC, если $AC = 26$, а $\angle ABC = 45°$.

10.1.69. [ГАНГ] В треугольник вписана окружность радиуса 2. Одна из сторон треугольника делится точкой касания на отрезки 7 и 2. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

10.1.70. [МИЭТ] Площадь треугольника ABC равна $16\,\text{см}^2$. Найти длину стороны AB, если $AC = 5\,\text{см}$, $BC = 8\,\text{см}$ и угол C тупой.

10.1.71. [МИРЭА] В треугольнике ABC со сторонами $AB = 12\,\text{см}$, $BC = 15\,\text{см}$, $AC = 9\,\text{см}$ проведена биссектриса BB_1. Пусть C_1 — точка касания AB с вписанной в треугольник окружностью, отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P, продолжение AP пересекает BC в точке A_1. Найти отношение $\dfrac{AP}{PA_1}$.

10.1.72. [МЭСИ] В треугольнике ABC: $\angle BAC = 30°$. Определить сторону BC, если $AB = \sqrt{3}$, $AC = 1$.

2. Равнобедренный треугольник

10.2.1. [МАТИ] Высота AD, опущенная на боковую сторону BC равнобедренного треугольника ABC, делит его на треугольники ABD и ADC площадью $4\,\text{см}^2$ и $2\,\text{см}^2$ соответственно. Найти стороны треугольника, если AC — его основание.

10.2.2. [МАТИ] Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC делит его на треугольники ABD и ACD площадью $4\,\text{см}^2$ и $2\,\text{см}^2$ соответственно. Найти стороны треугольника, если AC — его основание.

10.2.3. [МИЭТ] Дан равнобедренный треугольник с основанием $2a$ и высотой h. В него вписана окружность и к ней проведена касательная, параллельная основанию. Найти радиус окружности и длину отрезка касательной, заключенного между сторонами треугольника.

10.2.4. [МИИТ] В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AD. Площади треугольников ABD и ADC равны S_1 и S_2. Найти длину основания.

10.2.5. [СПбГУ] В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена медиана AD. Найти угол BAD, если угол при вершине B равен α.

10.2.6. [МАТИ] В равнобедренном треугольнике основание равно a, боковая сторона — b. Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне треугольника.

10.2.7. [УрГУ] В равнобедренном треугольнике с углом при основании, равном α, высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на m. Определить радиус описанного круга.

10.2.8. [МГУ, геогр. ф-т, физ. ф-т; СПбГУ] В равнобедренном треугольнике KLM $(KL = LM)$ угол KLM равен φ. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей для треугольника KLM.

10.2.9. [МАТИ] В равнобедренный треугольник с основанием a вписана окружность радиуса r. Определить периметр треугольника.

10.2.10. [СПбГУ] Даны равнобедренный треугольник с основанием a и окружность с центром в одной из вершин треугольника. Известно, что одна из боковых сторон треугольника делится окружностью на три равные части. Найти радиус окружности.

10.2.11. [МПГУ] В равнобедренном треугольнике длина основания равна 30 см, длина высоты, проведенной к основанию, — 20 см. Определить длину высоты, проведенной к боковой стороне.

10.2.12. [МИСиС] Вершины правильного треугольника лежат на трех параллельных прямых, причем внутренняя прямая находится на расстояниях $\sqrt{21}$ и $\sqrt{84}$ от крайних прямых. Найти длину стороны треугольника.

10.2.13. [СПбГУ] Найти длину стороны квадрата, вписанного в равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b так, что две его вершины лежат на основании, а две другие вершины — на боковых сторонах.

10.2.14. [МАТИ] В равнобедренном треугольнике с углом при вершине α найти угол между основанием и медианой, проведенной к боковой стороне.

10.2.15. [МИЭТ] Основание равнобедренного треугольника $\sqrt{32}$, медиана боковой стороны 5. Найти длины боковых сторон.

10.2.16. [СГАПС] В равнобедренном треугольнике высота равна 8, а основание относится к боковой стороне как 6 : 5. Найти радиус вписанного круга.

10.2.17. [МАДИ] Вершины B и C при основании равнобедренного треугольника ABC соединены с серединой M его высоты, проведенной из вершины A. Эти прямые пересекают боковые стороны AC и AB треугольника в точках D и E соответственно. Найти площадь четырехугольника $AEMD$, если площадь треугольника ABC равна 93.

10.2.18. [КГУ] В равносторонний треугольник ABC вписана окружность и проведен отрезок MN, который касается ее и параллелен стороне AB. Определить периметр трапеции $AMNB$, если длина стороны AB равна 18.

10.2.19. [НижГУ] Из точки, расположенной внутри правильного треугольника ABC, длина стороны которого равна a, опущены перпендикуляры на стороны AB, BC, CA. Длины перпендикуляров соответственно равны m, n, k. Найти отношение площади треугольника ABC, к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

10.2.20. [МАТИ] Найти углы равнобедренного треугольника, у которого точка пересечения высот делит пополам высоту, проведенную к основанию.

10.2.21. [СПбГТУ] Прямая делит пополам основание AB равнобедренного треугольника ABC с боковой стороной 3 и отсекает на лучах CA и CB отрезки CM и CN соответственно. Найти длину CM, если длина CN равна 2.

10.2.22. [МАТИ] Найти углы равнобедренного треугольника, если основание относится к биссектрисе угла при основании как $5:6$.

10.2.23. [МАТИ] Стороны треугольника относятся как $1:2:2$. Вычислить его площадь, если радиус окружности, описанной вокруг треугольника равен R.

10.2.24. [МАТИ] В равнобедренном треугольнике основание равно a, боковая сторона b. Найти высоту, опущенную на боковую сторону треугольника.

10.2.25. [МАТИ] В равнобедренный треугольник вписана окружность радиуса r. Высота, проведенная к основанию, делится окружностью в отношении $1:2$, считая от вершины. Найти площадь треугольника.

10.2.26. [МАДИ] Дан равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами $AB = BC = 10$ и основанием $AC = \sqrt{80}$. Найти радиус окружности, проходящей через вершины B и C, центр которой находится на высоте CD.

10.2.27. [МАДИ] В равнобедренном треугольнике проведены биссектриса угла при основании и биссектриса угла при вершине. Найти косинус тупого угла между ними, если синус угла при основании треугольника равен p $\left(p = \frac{\sqrt{975}}{32}\right)$.

10.2.28. [МАТИ] В равнобедренном треугольнике ABC с вершиной в точке B основание высоты AD делит сторону BC так, что $BD : DC = \sqrt{2} : (2 - \sqrt{2})$. Найти углы треугольника.

10.2.29. [СПбГЭУ] Длина основания равнобедренного треугольника равна 10, а его площадь равна 60. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне.

10.2.30. [МТУСИ] Длина основания равнобедренного треугольника равна 12. Радиус вписанного в треугольник круга равен 3. Найти площадь треугольника.

10.2.31. [МТУСИ] В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна $4\sqrt{10}$, а длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $3\sqrt{10}$. Найти длину основания треугольника.

10.2.32. [МТУСИ] Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC составляет с основанием AC угол, тангенс которого равен 0,5. Найти косинус угла ABC.

10.2.33. [МТУСИ] Основание равнобедренного треугольника равно 30, а высота, проведенная к боковой стороне, равна 24. Найти длину боковой стороны.

10.2.34. [ГАУ] В равнобедренный треугольник с углом при вершине 120° и боковой стороной, равной a, вписана окружность. Найти радиус окружности.

10.2.35. [ГАУ] В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 5, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 6. Найти площадь треугольника.

10.2.36. [ГАУ] Найти площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

10.2.37. [МГУ, ИСАА] В треугольнике ABC ($AB = 4$, $BC = AC = 12$) проведена биссектриса AD. Найти угол ADC.

10.2.38. [МГУ, физ. ф-т] В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и на боковую сторону, равны соответственно m и n. Найти стороны треугольника.

10.2.39. [МГУ, физ. ф-т] В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AD. Известно, что $BC : DC = k$. Найти отношение длины отрезка DC к радиусу окружности, описанной около треугольника ADC.

10.2.40. [МГУ, ВМиК] В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении $2 : 1$, считая от вершины B, а точка E — середина стороны AB. Известно, что медиана CQ треугольника CED равна $\frac{\sqrt{23}}{2}$ и $DE = \frac{\sqrt{23}}{2}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

10.2.41. [МГУ, ИСАА] В треугольнике ABC угол BAC равен $30°$, $AB = BC$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AC в точке D. Найти расстояние от вершины C до центра этой окружности, если $CD = 1$.

10.2.42. [МГУ, ИСАА] На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D. Найти расстояние от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$, а угол ABC равен $120°$.

10.2.43. [РЭА] В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 6 см, а высота, опущенная на основание, равна 4 см. Найти периметр треугольника CDB, где CD — высота, опущенная на боковую сторону.

10.2.44. [РЭА] На основании AC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая боковую сторону BC в точке D так, что $BD : DC = 3 : 2$. Найти площадь треугольника ABC, если $AD = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

10.2.45. [РЭА] Вершины B и C основания равнобедренного треугольника ABC соединены в точке M с серединой высоты, опущенной из вершины A на основание BC. Продолжение отрезка BM пересекает сторону AC в точке D, а продолжение отрезка CM пересекает сторону AB в точке E. Найти площадь треугольника BMA, если площадь четырехугольника $AEMD$ равна 16.

10.2.46. [РЭА] Найти площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание равна 10 см, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12 см.

10.2.47. [РЭА] В равнобедренный треугольник ($AB = BC$) вписана окружность радиуса 3. Точка M — точка касания боковой стороны BC и окружности такая, что $BM = 4$. Найти расстояние от вершины A до точки M.

10.2.48. [МУПОЧ «Дубна»] Площадь равнобедренного треугольника равна S, угол при вершине треугольника равен α. Найти длины высот треугольника.

10.2.49. [МГГА] В окружность радиуса r вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма длин основания и высоты равна диаметру окружности. Найти высоту треугольника.

10.2.50. [СТАНКИН] Длина основания равнобедренного треугольника равна 12. Длина боковой стороны равна 10. Найти расстояние между точками касания вписанной окружности с боковыми сторонами.

10.2.51. [МГТУГА] Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 6 см, а медиана боковой стороны 5 см. Найти длину основания.

10.2.52. [МГАХМ] В равнобедренном треугольнике основание 6 см, а боковая сторона 5 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

10.2.53. [ГАСБУ] CE — высота равнобедренного треугольника ABC ($AC = CB$). Центр О вписанной в треугольник ABC окружности делит высоту треугольника CE на отрезки $CO = 13$ и $OE = 5$. Найти длины сторон треугольника ABC.

10.2.54. [МГАЛП] В равнобедренном треугольнике основание равно $\sqrt{84}$, а угол при основании равен 30°. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне.

10.2.55. [МГАПП] В равнобедренном треугольнике основание и опущенная на него высота равны 4. Найти радиус описанной окружности.

10.2.56. [МГТА] Медиана, проведенная к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит его периметр на части длиной 15 и 6. Найти длину боковой стороны.

10.2.57. [ВЗФЭИ] Около равностороннего треугольника описана окружность радиуса $2\sqrt{3}$ см, через центр которой проведена прямая, параллельная одной из сторон треугольника. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между двумя другими сторонами треугольника.

10.2.58. [МВВДИУ] В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна 5, а длина высоты, опущенной на основание, равна 4. Найти длину основания.

3. Прямоугольный треугольник

10.3.1. [МАТИ] Медианы прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, относятся как $\sqrt{2} : 1$. Найти углы треугольника.

10.3.2. [МАТИ] Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если проекции катетов на гипотенузу равны $m = 9$ см и $n = 16$ см.

10.3.3. [МАТИ] Найти стороны прямоугольного треугольника, если точка касания вписанной в него окружности делит один из катетов на отрезки длины m и n.

10.3.4. [МАТИ] Вписанная окружность касается гипотенузы прямоугольного треугольника в точке, делящей гипотенузу на отрезки, длины которых равны $m = 2$ см, $n = 3$ см. Найти радиус этой окружности.

10.3.5. [МГТА] Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, вдвое больше площади последнего. Определить углы прямоугольного треугольника.

10.3.6. [МАДИ] Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

10.3.7. [МАДИ] Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, а площадь его равна 24 см^2. Найти площадь описанного круга.

10.3.8. [МГТА] Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 14 см, а радиус описанной окружности равен 5 см. Найти площадь круга, вписанного в данный треугольник.

10.3.9. [МИЭТ] Острый угол прямоугольного треугольника равен α, радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений двух катетов, равен R. Найти длину гипотенузы этого треугольника.

10.3.10. [МИИТ] В прямоугольном треугольнике даны острый угол α и расстояние a от вершины другого острого угла до центра вписанного круга. Определить площадь треугольника.

10.3.11. [НГУ] В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и BC относятся как $1 : 2$. На гипотенузе AC выбраны точки M и N так, что отрезки BM и BN делят угол на три равные части. Найти отношение отрезков BM и BN.

10.3.12. [МПУ; СПбГУ] Определить острые углы прямоугольного треугольника, длины сторон которого образуют геометрическую прогрессию.

10.3.13. [МАТИ] В прямоугольном треугольнике катеты относятся как $3 : 2$, а высота делит гипотенузу на отрезки, из которых один на 2 см больше другого. Определить длину гипотенузы.

10.3.14. [ВГУ] В прямоугольном треугольнике ABC, где $\angle C = 30°$, из вершины прямого угла B проведена медиана BK. Найти площадь треугольника BCK, если длина катета AB равна 4 см.

10.3.15. [СПбГУ] Наименьший из углов прямоугольного треугольника равен α. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведен круг, касательный к гипотенузе. Найти отношение площадей круга и треугольника.

10.3.16. [СПбГУ] В треугольнике ABC угол B — прямой. Точки D и E на катете CB расположены так, что отрезки AD и AE делят угол A на три равные части, $AD = a$, $AE = b$. Найти отношение площадей треугольников ADB и AEB.

10.3.17. [СПбГУ] Прямоугольный треугольник, периметр которого равен 10, разбит высотой, опущенной на гипотенузу, на два треугольника. Периметр одного из них равен 6. Найти периметр другого треугольника.

10.3.18. [МАТИ] Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами p_1 и p_2. Найти стороны треугольника.

10.3.19. [МАТИ] Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника удалена от катетов на расстояния соответственно 3 и 4. Найти расстояние от этой точки до гипотенузы.

10.3.20. [РЭА] Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 12. Расстояние от центра описанной около треугольника окружности до этого катета равно 2,5. Найти длину гипотенузы треугольника.

10.3.21. [МЭИ] Длины катетов прямоугольного треугольника равны 20 и 21. Найти длину окружности, описанной около данного треугольника.

10.3.22. [МАДИ] В прямоугольном треугольнике ABC даны: длина катета BC, равная 36, и косинус угла BAC, равный $\frac{8}{17}$. Найти длину другого катета AC и площадь треугольника.

10.3.23. [МАТИ] В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведена полуокружность радиусом 2, центр которой лежит на стороне AC и которая касается сторон AB и BC. Полуокружность радиусом 1 касается этой полуокружности и стороны AB, а центр ее также лежит на стороне AC. Найти длины сторон треугольника.

10.3.24. [МИЭТ] В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.

10.3.25. [РГПУ] Катеты прямоугольного треугольника равны a и $2a$. Середина катета $2a$ служит центром окружности с радиусом, равным a. На какие отрезки делится этой окружностью гипотенуза треугольника?

10.3.26. [МПГУ] Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC с прямым углом C, если $\angle B = 30°$, $BC = 6$ см.

10.3.27. [МПГУ] Найти радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см.

10.3.28. [КПИ] В прямоугольном треугольнике сумма катетов равна 17 см, а длина гипотенузы — 13 см. Найти катеты и площадь треугольника.

10.3.29. [МПГУ] В прямоугольном треугольнике катет равен 24 см, а гипотенуза — 25 см. Найти биссектрису треугольника, проведенную из вершины меньшего угла.

10.3.30. [МПГУ] Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5, а высота, проведенная к ней, равна 2. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей.

10.3.31. [МАТИ] В прямоугольном треугольнике отношение высоты к медиане, проведенным из вершины прямого угла, равно $\frac{2}{3}$. Найти острые углы треугольника.

10.3.32. [МТУСИ] В прямоугольном треугольнике отношение катетов равно $\frac{1}{2}$. Найти тангенс острого угла между медианами, проведенными к катетам.

10.3.33. [МТУСИ] Найти синус большего острого угла прямоугольного треугольника, если радиус окружности, описанной около треугольника, в 2,5 раза больше радиуса вписанной окружности.

10.3.34. [МТУСИ] В прямоугольном треугольнике ABC длины катетов AC и BC соответственно равны 12 и 8. Точка K — середина медианы BD. Найти длину отрезка CK.

10.3.35. [ГАНГ] Окружность, радиус которой $\frac{8}{\pi}$, касается гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника в вершине его острого угла и проходит через вершину прямого угла. Найти длину дуги, заключенной внутри треугольника.

10.3.36. [МГУЛ] В прямоугольном треугольнике медианы острых углов равны $\sqrt{89}$ и $\sqrt{156}$. Найти длину гипотенузы.

10.3.37. [ГАУ] Найти катеты прямоугольного треугольника, у которого высота, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки длиной 6 и 18.

10.3.38. [ГАУ] Окружность касается одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника и проходит через вершину противоположного острого угла. Центр окружности лежит на гипотенузе треугольника, длина которой равна c. Найти радиус окружности.

10.3.39. [ГАУ] В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Известно, что $BD = 4$, $DC = 6$. Определить площадь треугольника ADC.

10.3.40. [МИСиС] В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки длиной 9 и 16. Найти радиус вписанной в треугольник окружности.

10.3.41. [ГАУ] Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найти расстояние от высоты, опущенной из вершины прямого угла до центра вписанной окружности.

10.3.42. [МГУ, хим. ф-т] Прямоугольные треугольники ABC и ABD имеют общую гипотенузу $AB = 5$. Точки C и D расположены по разные стороны от прямой, проходящей через точки A и B, $BC = BD = 3$. Точка E лежит на AC, $EC = 1$. Точка F лежит на AD, $FD = 2$. Найти площадь пятиугольника $ECBDF$.

10.3.43. [МГУ, геогр. ф-т] Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найти длину CN, если длины катетов равны 1 и 4.

10.3.44. [МГУ, физ. ф-т] В прямоугольном треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно $\frac{2}{5}$. Найти острые углы треугольника.

10.3.45. [МГУ, ИСАА] Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC соответственно в точках E и D. Найти величину угла ABC, если известно, что $AE = 1$, $BD = 3$.

10.3.46. [МГУ, ИСАА] В треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла ACB, DM и DN являются соответственно высотами треугольников ADC и BDC. Найти AC, если известно, что $AM = 4$, $BN = 9$.

10.3.47. [МПГУ] В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36, вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2 : 3. Найти длину гипотенузы.

10.3.48. [РЭА] В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены высота и медиана. Найти отношение большего катета к меньшему, если отношение высоты к медиане равно $\frac{12}{13}$.

10.3.49. [РЭА] В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки 3 см и 4 см. Найти площадь треугольника.

10.3.50. [РЭА] В прямоугольный треугольник вписан квадрат, вершина которого совпадает с вершиной прямого угла треугольника. Найти площадь треугольника, если один из его катетов равен 42 см, а сторона квадрата — 24 см.

10.3.51. [РЭА] Точка на гипотенузе прямоугольного треугольника, равноудаленная от катетов, делит ее на отрезки 30 см и 40 см. Найти периметр треугольника.

10.3.52. [РЭА] В прямоугольном треугольнике известны гипотенуза 125 см и меньший катет 75 см. Основание высоты, проведенной из вершины прямого угла, делит гипотенузу на два отрезка. На меньшем из отрезков как на диаметре построена полуокружность по одну сторону с данным треугольником. Определить длину отрезка катета, заключенного внутри этого полукруга.

10.3.53. [РЭА] В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $BC = 20$, а катет $AB = 16$. Найти квадрат расстояния от вершины A до биссектрисы угла C.

10.3.54. [МГУЛ] Найти сумму длин катетов прямоугольного треугольника, если длина его гипотенузы 20 см, а радиус вписанной окружности 4 см.

10.3.55. [МАСИ] Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если высота, проведенная к гипотенузе, делит последнюю на отрезки длиной 25,6 и 14,4 см.

4. Трапеция

10.4.1. [МАТИ] Площадь равнобочной трапеции равна S, угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найти высоту трапеции.

10.4.2. [МАТИ] В равнобочную трапецию вписана окружность радиуса r. Верхнее основание трапеции в два раза меньше ее высоты. Найти площадь трапеции.

10.4.3. [МАИ] В трапеции $ABCD$ сумма углов при основании AD равна $90°$. Нижнее и верхнее основания равны соответственно 7 и 3. Определить отрезок, соединяющий середины оснований.

10.4.4. [МГУ, эк. ф-т; МИФИ; МЭИ; СПбГУ; МПУ; РГПУ; МИСиС] В трапеции, основания которой a и b, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти длину отрезка этой прямой, отсекаемого боковыми сторонами трапеции.

10.4.5. [МГУ, геогр. ф-т; РЭА; МЭИ] Около круга описана трапеция с углами при основании α и β. Найти отношение площади трапеции к площади круга.

10.4.6. [РУДН] Периметр равнобедренной трапеции вдвое больше длины вписанной окружности. Найти угол при основании трапеции.

10.4.7. [МАИ] В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD, пересекающиеся в точке F. Из вершины C проведена прямая CK, параллельная боковой стороне AD, которая пересекает продолжение BD в точке L так, что $DF = BL$. Найти отношение $AB : CD$.

10.4.8. [МАТИ] Определить площадь круга, вписанного в прямоугольную трапецию с основаниями a и b.

10.4.9. [МАТИ] Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 1 см и 2 см. Найти площадь трапеции.

10.4.10. [СПбГУ] Определить площадь трапеции, если ее основания равны 6 см и 11 см, одна из боковых сторон — 4 см, а сумма углов при нижнем основании равна $\frac{\pi}{2}$.

10.4.11. [РЭА; МПУ; МПГУ] Около круга радиуса R описана трапеция с острыми углами α и β при большем основании. Найти площадь этой трапеции.

10.4.12. [МПУ] Меньшее основание равнобедренной трапеции равно высоте и равно h. Острый угол трапеции равен α. Найти периметр трапеции.

10.4.13. [МГУ, геолог. ф-т; СПбГУ; ЛГПИ] Найти площадь равнобочной трапеции, основания которой равны a и b, а диагонали взаимно перпендикулярны.

10.4.14. [МПУ] Периметр равнобедренной трапеции с острым углом α равен p. Высота трапеции равна h. Найти площадь этой трапеции.

10.4.15. [МЭИ] В круг вписана равнобедренная трапеция так, что диаметр круга служит основанием трапеции. Найти отношение площадей круга и трапеции, если тупой угол трапеции равен α.

10.4.16. [МАТИ] В равнобочной трапеции $ABCD$ длины боковой стороны AB и меньшего основания BC равны $a = 2$ см и BD перпендикулярна AB. Найти площадь трапеции.

10.4.17. [МИСиС] В равнобедренной трапеции даны длины оснований 21 и 9 и длина высоты 8. Найти радиус описанной окружности.

10.4.18. [МИСиС] В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 2. Найти площадь трапеции, если длина боковой стороны равна 10.

10.4.19. [МЭИ] Около круга радиуса 2 см описана равнобедренная трапеция с острым углом 30°. Найти длину средней линии трапеции.

10.4.20. [МАТИ] Найти площадь трапеции, диагонали которой равны 7 см и 8 см, а основания — 3 см и 6 см.

10.4.21. [МИСиС] Длины оснований трапеции равны 10 и 24, длины боковых сторон равны 13 и 15. Найти площадь трапеции.

10.4.22. [СПбГУ] В равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса R, отношение длин боковой стороны и большего основания есть заданное число k. Найти длину меньшего основания.

10.4.23. [СПбГУ] В равнобедренной трапеции боковая сторона равна c, а диагональ, равная l, делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Найти основания трапеции.

10.4.24. [МАИ] Боковые стороны AB и CD трапеции продолжены до пересечения в точке E. Точка O — центр описанной около треугольника ADE окружности. Найти величину острого угла A трапеции, если известно, что точки A, B, C, D, O лежат на окружности, радиус которой в $\sqrt{3}$ раз меньше радиуса окружности, описанной около треугольника ADE.

10.4.25. [МАТИ] Основания трапеции равны 4 см и 16 см. Найти ее площадь, если известно, что в трапецию можно вписать и вокруг нее можно описать окружность.

10.4.26. [РЭА] Вокруг окружности описана равнобочная трапеция, средняя линия которой равна 5, а синус острого угла при основании равен 0,8. Найти площадь трапеции.

10.4.27. [МИЭТ] Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Найти длины оснований этой трапеции.

10.4.28. [МАТИ] Найти площадь трапеции, у которой длины оснований равны a и b ($a > b$), а острые углы между большим основанием и боковыми сторонами α и β.

10.4.29. [МАТИ] Около круга радиуса $r = 2$ см описана равнобочная трапеция с площадью $S = 20\,\text{см}^2$. Найти длины сторон трапеции.

10.4.30. [МАТИ] Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния $l_1 = 4$ см и $l_2 = 8$ см. Найти длину средней линии трапеции.

10.4.31. [МАТИ] Около круга радиуса $r = 4$ см описана равнобочная трапеция, средняя линия которой $l = 10$ см. Определить длины сторон трапеции.

10.4.32. [ЛГПИ] В равнобедренную трапецию, основания которой 8 см и 2 см, вписана окружность. Найти длину окружности.

10.4.33. [ЛГПИ] В равнобедренной трапеции средняя линия равна d, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

10.4.34. [СГУ] В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB равна 4. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E. В треугольник ABE вписана окружность с центром в точке O, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке N. Найти величину угла MON, если длина отрезка MN равна 2.

10.4.35. [МИСиС] Найти радиус окружности, вписанной в равнобочную трапецию, если периметр трапеции равен 2, а острый угол составляет 30°.

10.4.36. [РГПУ] Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4, а длины непараллельных сторон — 20 и 13. Найти высоту трапеции.

10.4.37. [РГПУ] Найти площадь равнобочной трапеции, у которой высота равна 10, а диагонали взаимно перпендикулярны.

10.4.38. [МТУСИ] Площадь прямоугольной трапеции равна S, а острый угол равен α. Найти высоту трапеции, если меньшая диагональ равна большему основанию.

10.4.39. [ВГУ] Около круга с радиусом 2 описана равнобочная трапеция с площадью 20. Найти стороны трапеции.

10.4.40. [МПГУ] Основания трапеции 4 см и 10 см, одна из боковых сторон составляет с меньшим основанием угол 150°. Найти эту боковую сторону, если площадь трапеции равна 21 см.

10.4.41. [МАИ] В прямоугольной трапеции большая диагональ, имеющая длину 24, является биссектрисой острого угла. Найти площадь трапеции, если расстояние от вершины тупого угла до диагонали равно 9.

10.4.42. [МАИ] В прямоугольной трапеции средняя линия равна 13,5. Меньшая диагональ является биссектрисой тупого угла и имеет длину 12. Найти стороны трапеции.

10.4.43. [МПГУ] Диагональ равнобедренной трапеции равна 5 см, а площадь равна 12 см. Найти высоту трапеции.

10.4.44. [МПГУ] В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD: $\angle ACD = \angle ABC$, $BC = 12$ см, $AD = 27$ см. Найти диагональ AC.

10.4.45. [МПГУ] Найти площадь трапеции, у которой основания 15 см и 5 см, а боковые стороны 8 см и 6 см.

10.4.46. [СПбГУ] Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$, в которой обе диагонали равны основанию AD. Найти углы при основании.

10.4.47. [МАТИ] В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как $5 : 1$, а площадь равна 32 см^2. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD соответственно соединены с концами противоположной боковой стороны, причем отрезки AN и DM пересекаются в точке K, а отрезки BN и CM — в точке E. Определить площадь четырехугольника $MENK$.

10.4.48. [МГУ, мех.-мат.; МТУСИ; МАТИ] Длины боковых сторон трапеции равны 6 см и 10 см. В трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найти длины оснований трапеции.

10.4.49. [МГУ, мех.-мат.; МТУСИ; МАТИ] Средняя линия равнобедренной трапеции равна 5 см и она делит трапецию на части, отношение площадей которых равно $\frac{7}{13}$. Найти длину высоты трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

10.4.50. [МТУСИ] В равнобедренной трапеции боковая сторона равна средней линии, а периметр равен 48 см. Найти длину боковой стороны.

10.4.51. [МТУСИ] *Площадь равнобедренной трапеции, описанной около* окружности, равна 32 см^2. Найти длину боковой стороны, если угол при основании равен 30°.

10.4.52. [МТУСИ] В равнобедренную трапецию, верхнее основание которой равно 1, вписана окружность радиуса 1. Найти площадь трапеции.

10.4.53. [МТУСИ] Боковая сторона равнобедренной трапеции в 3 раза длиннее меньшего основания. Биссектрисы тупых углов этой трапеции пересекаются в точке, лежащей на основании. Найти отношение площади трапеции к площади треугольника, образованного меньшим основанием и биссектрисами.

10.4.54. [МТУСИ] В равнобедренную трапецию с основаниями $BC = 18$ и $AD = 32$ вписан круг. Найти площадь трапеции и площадь круга.

10.4.55. [МТУСИ] Около круга радиуса $\sqrt{3}$ описана равнобедренная трапеция с острым углом 60°. Найти длину средней линии трапеции.

10.4.56. [МТУСИ] Разность длин оснований трапеции равна 14 см, длины боковых сторон равны 13 см и 15 см. Вычислить площадь трапеции при условии, что в эту трапецию можно вписать окружность.

10.4.57. [МТУСИ] Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Найти среднюю линию трапеции, если острый угол при основании равен α.

10.4.58. [МТУСИ] Найти диагональ и боковую сторону равнобочной трапеции с основаниями 20 см и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

10.4.59. [МТУСИ] Около окружности с диаметром в 15 см описана равнобочная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найти основания трапеции.

10.4.60. [МТУСИ] Высота и диагональ равнобедренной трапеции равны соответственно 5 и 13. Найти площадь трапеции.

10.4.61. [МГУЛ] Около круга радиуса 6 см описана равнобочная трапеция, у которой основания относятся как 9 : 16. Определить боковую сторону трапеции.

10.4.62. [ГАУ] Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, *удален от концов боковой стороны на расстояния* 8 см и 4 см. *Найти* среднюю линию трапеции.

10.4.63. [ГАУ] В трапеции $ABCD$ точка M лежит на боковой стороне AB, O — пересечение диагонали BD и отрезка CM. Найти площадь треугольника COD, если $AM = MB$, $CO = 4 \cdot OM$, а площадь треугольника BOM равна 1.

10.4.64. [ГАУ] Около трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC описана окружность радиуса 6 см. Центр описанной окружности лежит на основании AD. Основание BC равно 4 см. Определить площадь трапеции.

10.4.65. [ГАУ] Трапеция $KLMN$ с основаниями LM и KN вписана в окружность, центр которой лежит на основании KN. Диагональ LN трапеции равна 4 см, а угол MNK равен 60°. Определить длину основания LM трапеции.

10.4.66. [ГАУ] Трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM вписана в окружность, центр которой лежит на основании KN. Диагональ KM трапеции равна 4 см, а боковая сторона KL равна 3 см. Определить длину основания LM.

10.4.67. [ГАУ] В прямоугольную трапецию вписана окружность. Найти ее радиус, если основания равны 2 и 3.

10.4.68. [МГУ, мех.-мат.] В трапеции с основаниями 3 и 4 диагональ имеет длину 6 и является биссектрисой одного из углов. Может ли эта трапеция быть равнобокой?

10.4.69. [МГУ, мех.-мат.] В равнобокой трапеции диагональ имеет длину 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, если другое равно 5?

10.4.70. [МГУ, физ. ф-т] В трапеции средняя линия, равная 20, делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Найти основания трапеции.

10.4.71. [МГУ, ф-т почвовед.] Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F. Длина отрезка EF равна 2. Определить длины оснований трапеции, если их отношение равно 4.

10.4.72. [МГУ, ф-т почвовед.] Через точку O пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию. Определить длину отрезка этой прямой между боковыми сторонами трапеции, если средняя линия трапеции равна $\frac{4}{3}$, а точка O делит диагональ трапеции на части, отношение которых равно $\frac{1}{3}$.

10.4.73. [ТПУ] Боковая сторона описанной равнобедренной трапеции равна 12 см. Найти ее периметр.

10.4.74. [МГУ, биолог. ф-т] Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении $AO : OC = 3 : 2$. Найти площадь треугольника OEC.

10.4.75. [МГУ, ф-т почвовед.] В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 4, длина основания BC равна 3. Длины сторон AB и CD равны. Точки M и N лежат на диагонали BD, причем точка M расположена между точками B и N, а отрезки AM и CN перпендикулярны диагонали BD. Найти длину отрезка CN, если $BM : DN = \frac{2}{3}$.

10.4.76. [МГУ, ИСАА] В равнобедренную трапецию с боковой стороной, равной 9, вписана окружность радиусом 4. Найти площадь трапеции.

10.4.77. [МГУ, ИСАА] В равнобедренную трапецию площадью 28 см^2 вписана окружность радиуса 2 см. Найти боковую сторону трапеции.

10.4.78. [МПГУ] Около окружности с радиусом 2 описана равнобокая трапеция, площадь которой равна 20. Найти боковую сторону трапеции.

10.4.79. [СПбГТУ] Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4. Найти площадь трапеции, если известно, что длина одной из ее диагоналей равна 5.

10.4.80. [МТУСИ] В равнобочной трапеции, описанной около круга, отношение боковой стороны к меньшему основанию равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

10.4.81. [МАТИ] Площадь трапеции $ABCD$ равна 24, а длины оснований AD и BC относятся как $3 : 1$. Вершины A и D соединены отрезками с точкой N — серединой стороны BC, а точки B и C — с точкой M — серединой стороны AD. Отрезки AN и BM пересекаются в точке E, а отрезки DN и CM — в точке K. Найти площадь четырехугольника $ENKM$.

10.4.82. [РЭА] В равнобедренной трапеции $ABCD$ точка O — середина меньшего основания BC; OA — биссектриса угла A. Найти площадь трапеции, если $AD = 16$, а ее высота равна 6.

10.4.83. [РЭА] Диагональ равнобочной трапеции, равная 8, перпендикулярна боковой стороне. Найти меньшее основание трапеции, если ее большее основание равно 10.

10.4.84. [РЭА] Большее основание трапеции равно 24 см. Найти ее меньшее основание, зная, что расстояние между серединами ее диагоналей равно 4 см.

10.4.85. [РЭА] Окружность радиуса 24 см касается большего основания и обеих боковых сторон равнобедренной трапеции. Найти большее основание трапеции, если центр окружности находится на расстоянии 40 см от точки пересечения продолжений боковых сторон трапеции.

10.4.86. [РЭА] В трапеции $ABCD$ меньшее основание $BC = 7$. Через вершины A, C и D проведена окружность, которая пересекает продолжение основания BC в точке E. Длина $ED = 7\sqrt{3}$, а угол EDA равен $30°$. Найти длину боковой стороны AB.

10.4.87. [МАИ] В прямоугольной трапеции большая диагональ, имеющая длину 24 см, является биссектрисой острого угла. Найти площадь трапеции, если расстояние от вершины тупого угла до диагонали равно 9 см.

10.4.88. [РГАЗУ] В равнобедренной трапеции острый угол равен α, а меньшее основание равно боковой стороне и равно a. Найти площадь трапеции.

10.4.89. [МСХА] Площадь прямоугольной трапеции равна S см^2, острый угол трапеции равен α. Найти высоту трапеции, если ее меньшая диагональ равна большему основанию.

10.4.90. [МГАУ] *Основания равнобедренной трапеции равны* 12 см и 20 см, а центр описанной около нее окружности лежит на большем основании. Вычислить площадь этой трапеции.

5. Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат

10.5.1. [МИИТ] В ромб, сторона которого 20 см, вписан круг. Найти площадь круга, если одна диагональ ромба больше другой в $\frac{4}{3}$ раза.

10.5.2. [МГУ, эк. ф-т] В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах $AB = 6$ и $BC = 8$ взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен отрезку AC. Известно, что периметр многоугольника $AMNCD$ относится к периметру треугольника MBN, как $7 : 3$. Найти длину отрезка MN.

10.5.3. [СПбГУ] В прямоугольнике $ABCD$ дано: $AB = a$, $AD = b$. Найти на стороне AB точку E, для которой $\angle CED = \angle AED$.

10.5.4. [НГУ] Дан ромб $ABCD$. Окружность радиуса R описана около треугольника ABD и проходит через центр окружности, вписанной в треугольник CBD. Определить площадь ромба.

10.5.5. [РГПУ] *В ромб вписан круг.* Каждая сторона ромба точкой касания делится на отрезки, длины которых a и b. Найти площадь круга.

10.5.6. [СПбГУ] Вершины одного квадрата лежат на границе второго квадрата. Найти отношения длин отрезков, на которые эти вершины разбивают стороны второго квадрата, если известно, что отношение площадей квадратов равно p.

10.5.7. [МГУ, геолог. ф-т; МЭИ; МИЭТ] Найти углы ромба, если известно, что площадь вписанного в него круга вдвое меньше площади ромба.

10.5.8. [СПбГУ] В квадрате $ABCD$ со стороной a точки E и F являются серединами сторон AB и CD соответственно. Точка K лежит на CF, точка N — на AD, а отрезки EF и KN пересекаются в точке M. Найти площадь треугольника KFM, если известно, что $CK : KF = 1 : 5$, а площадь трапеции $EMNA$ составляет $\frac{3}{10}$ площади квадрата.

10.5.9. [СГАПС] В параллелограмме $ABCD$ величина угла BCD равна $\frac{\pi}{3}$, длина стороны AB равна a. Биссектриса угла BCD пересекает сторону AD в точке N. Найти площадь треугольника NCD.

10.5.10. [СГУ] В параллелограмме $ABCD$ длина стороны AD равна 8. Биссектриса угла ADC пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность с центром в точке O, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке L. Найти величину угла KOL, если длина KL равна 2.

10.5.11. [УрГУ] На стороне NP квадрата $MNPQ$ взята точка A, на стороне PQ — точка B так, что $NA : AP = PB : BQ = 2 : 3$. Точка L является точкой пересечения отрезков MA и NB. В каком отношении точка L делит отрезок MA?

10.5.12. [РГПУ] Стороны прямоугольника равны a и b. На стороне a, как на диаметре, построена окружность. На какие отрезки окружность делит диагональ прямоугольника?

10.5.13. [МПГУ] Найти площадь параллелограмма, если его диагонали 3 см и 5 см, а острый угол параллелограмма $60°$.

10.5.14. [СГПИ] Дан ромб с острым углом α. Какую часть ромба составляет от его площади площадь вписанного в него круга?

10.5.15. [МПГУ] Длины меньшей диагонали, стороны и большей диагонали ромба составляют геометрическую прогрессию. Найти углы ромба.

10.5.16. [МТУСИ] В параллелограмме $ABCD$ длина диагонали BD, перпендикулярной стороне AB, равна 6. Длина диагонали AC равна $2\sqrt{22}$. Найти длину стороны AD.

10.5.17. [МТУСИ] В параллелограмме $ABCD$ биссектриса тупого угла B пересекает сторону AD в точке F. Найти периметр параллелограмма, если $AB = 12$ и $AF : FD = 4 : 3$.

10.5.18. [МТУСИ] Через вершины произвольного четырехугольника проведены прямые, параллельные его диагоналям. Найти отношение площади параллелограмма, образованного этими прямыми, к площади данного четырехугольника.

10.5.19. [ГАНГ] Тупой угол ромба в 5 раз больше его острого угла. Во сколько раз сторона ромба больше радиуса вписанной в него окружности?

10.5.20. [ГАУ] Точка M делит диагональ AC квадрата $ABCD$ со стороной a в отношении $AM : MC = 3 : 1$; точка N лежит на стороне AB, причем угол NMD прямой. Найти длину отрезка AN.

10.5.21. [МГУ, филолог. ф-т] В ромбе $ABCD$ угол при вершине A равен $\frac{\pi}{3}$. Точка N делит сторону AB в отношении $AN : BN = 2 : 1$. Определить тангенс угла DNC.

10.5.22. [МГУ, хим. ф-т] В квадрат площадью $18\,\text{см}^2$ вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон прямоугольника относятся как $1 : 2$. Найти площадь прямоугольника.

10.5.23. [МГУ, хим. ф-т] В квадрат площадью 24 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон прямоугольника относятся как $1 : 3$. Найти площадь прямоугольника.

10.5.24. [МГУ, филолог. ф-т] Точка C лежит на стороне MN ромба $KLMN$, причем $CN = 2\,\text{см}$ и угол MNK равен $120°$. Найти отношение косинусов углов CKN и CLM.

10.5.25. [МГУ, геогр. ф-т] В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E, где расстояние AE составляет треть длины AC, а на стороне AD взята точка F, где расстояние AF составляет четверть длины AD. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь четырехугольника $ABGE$, где G — точка пересечения прямой FE со стороной BC, равна 8.

10.5.26. [МГАВТ] Определить угол ромба, зная его площадь Q и площадь вписанного в него круга S.

10.5.27. [МГЗИПП] Радиус окружности, в которую вписан квадрат, равен 6 см. Найти площадь квадрата.

10.5.28. [ГУЗ] Периметр параллелограмма 90 см, а острый угол — $60°$. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении $1 : 3$. Найти стороны параллелограмма.

10.5.29. [МВВДИУ] В параллелограмме даны острый угол, равный $45°$, и расстояния от точки пересечения диагоналей до неравных сторон, равные соответственно 2 и 3. Найти площадь параллелограмма.

10.5.30. [КГТУ] В ромб вписан круг, а в круг вписан квадрат. Чему равен угол ромба, если площадь квадрата в 4 раза меньше площади ромба?

6. Окружность и круг

10.6.1. [МАТИ] Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 см и 17 см. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами хорд равно 5 см.

10.6.2. [МИИТ, МИСиС] Хорда окружности равна 10 см. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой конец проведена секущая параллельно касательной. Определить радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12 см.

10.6.3. [МАИ] Две окружности радиусов R и $\frac{R}{2}$ касаются друг друга внешним образом. Один из концов отрезка длины $2R$, образующего угол 30° с линией центров, совпадает с центром окружности меньшего радиуса. Какая часть отрезка лежит вне окружностей?

10.6.4. [МГУ, физ. ф-т] Из точки K, расположенной вне окружности с центром O, проведены к этой окружности две касательные MK и NK (M и N — точки касания). На хорде MN взята точка C ($MC < CN$). Через точку C перпендикулярно отрезку OC проведена прямая, пересекающая отрезок NK в точке B. Известно, что радиус окружности равен R, $\angle MKN = \alpha$, $MC = b$. Найти длину отрезка CB.

10.6.5. [СПбГУ] Через точку A, лежащую на расстоянии $2r$ от центра окружности радиуса r, проведена прямая на расстоянии $\frac{r}{2}$ от центра окружности, пересекающая окружность в точках B и C. Найти AB и AC.

10.6.6. [НГУ] Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагональ AC которого равна $\sqrt{2}$. Найти площадь круга, описанного около треугольника ABD, если известно, что $\angle ABC = 105^\circ$, $\angle ACD = 42^\circ$, $\angle DAC = 63^\circ$.

10.6.7. [НижГУ, РГПУ] Диаметр окружности радиуса R является основанием правильного треугольника. Вычислить площадь той части треугольника, которая лежит вне данного круга.

10.6.8. [РГПУ] Дано круговое кольцо, площадь которого Q. Определить длину хорды большего круга, касательной к меньшему.

10.6.9. [УрГУ] Две окружности радиусов r и $3r$ касаются внешним образом. Найти площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей касательной.

10.6.10. [МИСиС] Окружность с центром в точке O и радиусом $R = 6 + 4\sqrt{2}$ касается прямой в точке A. На окружности взята точка B так, что угол AOB равен 45°. Найти радиус окружности, касающейся данной окружности в точке B и данной прямой.

10.6.11. [МИСиС] Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 и 15, длина общей хорды равна 24. Определить расстояние между их центрами (центр каждой окружности лежит вне другой окружности).

10.6.12. [СПбГУ] Круг и квадрат имеют общий центр, а их площади равны. Сторона квадрата равна 1. Вычислить сумму длин частей окружности, расположенных внутри квадрата.

10.6.13. [ЯГУ] Дан ромб со стороной a и острым углом 60°. На его большой диагонали как на диаметре построена окружность. а) Вычислить площадь круга. б) Что больше: площадь ромба или площадь части круга, лежащей вне ромба?

10.6.14. [ВГУ] Через точку P, лежащую внутри круга радиусом R, проведены две взаимно перпендикулярные хорды, одна из которых образует угол α ($\alpha > 0$) с прямой, проходящей через точку P и центр круга, и удалена от центра на расстояние a. В круг вписан четырехугольник, имеющий эти хорды диагоналями. Найти его площадь.

10.6.15. [СПбГУ] Точка находится внутри круга радиусом 6 и делит проходящую через нее хорду на отрезки длиной 5 и 4. Найти расстояние от точки до окружности.

10.6.16. [МПГУ] Найти сторону квадрата, вписанного в круг, площадь которого 64 см^2.

10.6.17. [ВШЭ] Две окружности, отношение радиусов которых равно $\frac{2}{3}$, касаются друг друга внутренним образом. Через центр меньшей окружности проведена прямая, перпендикулярная линии центров, и из точек пересечения этой прямой с большей окружностью проведены касательные к меньшей окружности. Найти углы между этими касательными.

10.6.18. [ЛГПИ] Точка лежит вне круга на расстоянии диаметра от центра круга. Найти угол между касательными, проведенными из данной точки к данному кругу.

10.6.19. [МГУ, мех.-мат.] Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке E. На прямой AC взята точка M, причем $\angle DME = 80°$, $\angle ABD = 60°$, $\angle CBD = 70°$. Где расположена точка M: на диагонали AC или на ее продолжении? Ответ обосновать.

10.6.20. [МЭИ] Три круга касаются внешним образом. Расстояния между центрами кругов равны 7 см, 8 см, 9 см. Найти радиусы кругов.

10.6.21. [МТУСИ; МАДИ] Две окружности равного радиуса касаются в точке C внешним образом. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса 6,5 в точках A и B соответственно. Найти площадь треугольника ABC, если $AB = 5$.

10.6.22. [ГАНГ] Две окружности пересекаются в точках A и B, через точку A проведены хорды AC и AD, касающиеся данных окружностей; $AC : AD = 3 : 2$. Найти отношение $BC : BD$.

10.6.23. [МФТИ] Окружность, центр которой лежит вне квадрата $ABCD$, проходит через точки B и C. Найти угол между касательными к окружности, проведенными из точки D, если отношение длины стороны квадрата к диаметру окружности равно $\frac{3}{5}$.

10.6.24. [МИСиС] Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает большую окружность в точках A и D, а меньшую — в точках B и C, причем $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$. Найти отношение радиуса большей окружности к радиусу меньшей окружности.

10.6.25. [ГАУ; МГАПБ] Две окружности радиуса 32 с центрами O_1 и O_2, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найти радиус окружности, которая касается изнутри обеих данных окружностей и касается отрезка O_1O_2.

10.6.26. [МГУ, физ. ф-т] В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найти диаметр окружности.

10.6.27. [МГУ, физ. ф-т] В окружность с радиусом R вписан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с углом BAC, равным α. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

10.6.28. [МГУ, физ. ф-т] Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C. Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b. Найти расстояние от точки C до хорды AB.

10.6.29. [МГУ, мех.-мат.] Диагонали четырехугольника $PQRS$, вписанного в окружность, пересекаются в точке D. На прямой PR взята точка A, причем $\angle SAD = 50°$, $\angle PQS = 70°$, $\angle RQS = 60°$. Где расположена точка A: на диагонали PR или на ее продолжении? Ответ обосновать.

10.6.30. [МГУ, хим. ф-т] Две окружности разных радиусов касаются в точке A одной и той же прямой и расположены по разные стороны от нее. Отрезок AB — диаметр меньшей окружности. Из точки B проведены две прямые, касающиеся большей окружности в точках M и N. Прямая, проходящая через точки M и A, пересекает меньшую окружность в точке K. Известно, что длина отрезка MK равна $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, а угол BMA равен $15°$. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных BM, BN и той дугой MN большей окружности, которая не содержит точку A.

10.6.31. [МПГУ] В полуокружность с радиусом $\sqrt{5}$ вписан квадрат так, что две его вершины лежат на диаметре полуокружности. Найти длину стороны квадрата.

10.6.32. [СПбГУ] Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Диаметр круга совпадает с большим катетом. Вычислить площади частей круга, на которые он разбивается гипотенузой треугольника.

10.6.33. [РЭА] В сегмент круга, дуга которого содержит $120°$, вписан квадрат со стороной $\sqrt{19}-2$. Найти радиус круга.

10.6.34. [РЭА] Через концы хорды, делящей окружность радиуса r в отношении $1:2$, проведены касательные. При каком значении r площадь треугольника, образованного хордой и касательными, равна $12\sqrt{3}$?

10.6.35. [РЭА] В сектор с центральным углом в $60°$ вписан круг. При каком радиусе площадь круга равна π?

10.6.36. [МГОУ] В полукруг радиуса R вписан круг радиуса $\frac{R}{2}$, а в оставшуюся часть полукруга вписан круг, касающийся окружности радиуса R, круга радиуса $\frac{R}{2}$ и диаметра полукруга. Найти радиус последнего круга, если $R = 4$.

10.6.37. [МИИТ] Сторона правильного треугольника равна a. Из его центра радиусом $\frac{a}{3}$ описана окружность. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

10.6.38. [РЭА] Круг радиуса $R = \dfrac{6}{\sqrt{4\pi - 3\sqrt{3}}}$ разделен на два сегмента хордой, равной стороне вписанного в этот круг правильного треугольника. Определить площадь меньшего из этих сегментов.

7. Разные задачи

10.7.1. [СПбГТУ] Диагонали разбивают выпуклый четырехугольник на четыре треугольника. Радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, одинаковы и равны 2. Найти длины сторон четырехугольника.

10.7.2. [РГПУ] В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей 2 см и 4 см. Найти площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны.

10.7.3. [МГОПУ] Данный квадрат со стороной a срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Определить площадь этого восьмиугольника.

10.7.4. [МИЭТ] Дан правильный 30-угольник $A_1A_2\ldots A_{30}$ с центром O. Найти угол между прямыми OA_3 и A_1A_4.

10.7.5. [МПГУ] Сторона правильного шестиугольника равна 14 см. Найти сторону равновеликого ему правильного треугольника и площадь круга, вписанного в этот треугольник.

10.7.6. [МТУСИ] Разность между площадью круга и площадью вписанного в него квадрата равна $2\sqrt{3}(\pi-2)$. Найти площадь правильного шестиугольника, вписанного в этот круг.

10.7.7. [МФТИ] В окружность диаметра 1 вписан четырехугольник $ABCD$, у которого угол D прямой, $AB = BC$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен $\frac{9\sqrt{2}}{5}$.

10.7.8. [МФТИ] В окружность радиуса 5 вписан четырехугольник $ABCD$, у которого угол D прямой, $AB : BC = 3 : 4$. Найти периметр четырехугольника $ABCD$, если его площадь равна 44.

10.7.9. [МГУЛ] Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O. Найти сумму углов AOB и COD (в градусах).

10.7.10. [МГУ, биолог. ф-т, ГАУ] В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна одному метру. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

10.7.11. [МГУ, биолог. ф-т] В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC. Найти величину угла, образованного продолжениями сторон AB и CD.

10.7.12. [ИЕНиЭ] Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Через его вершины проведены касательные к этой окружности, образующие также вписанный четырехугольник. Найти площадь четырехугольника $KLMN$, если его периметр равен p и $\frac{MN}{ML} = 2$, $\frac{MN}{KL} = 8$.

10.7.13. [МПГУ] Точка, лежащая внутри угла в 60°, удалена от его сторон на расстояния a и b. Найти расстояние от этой точки до вершины угла.

8. Задачи на доказательство

10.8.1. [МИСиС] Пусть E — середина стороны AB трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Доказать, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции $ABCD$.

10.8.2. [МГУ, эк. ф-т] В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные углы A и C прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Доказать, что $CE = FA$.

10.8.3. [БГУ] В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Доказать, что если $AB + BD = AC + CD$, то треугольник ABC — равнобедренный.

10.8.4. [НГУ] Дана равнобедренная трапеция с основаниями a и b. Доказать, что если в эту трапецию можно вписать окружность, то ее диаметр равен $\sqrt{ab}$.

10.8.5. [РГПУ] На основаниях AB и CD вне трапеции построены квадраты. Доказать, что прямая, соединяющая их центры, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

10.8.6. [МПГУ] На одной из параллельных сторон трапеции взята точка A, на другой — точка B. Доказать, что отрезок AB делится средней линией трапеции пополам.

10.8.7. [МЭИ] Пусть M — точка пересечения высот треугольника ABC. Доказать, что точка M', симметричная точке M относительно любой стороны треугольника ABC, лежит на окружности, описанной около этого треугольника.

10.8.8. [УрГУ] Доказать, что в прямоугольном треугольнике произведение длин отрезков, на которые делит гипотенузу точка касания с вписанной окружностью, равно площади треугольника.

10.8.9. [МИРЭА] Две окружности с радиусами R и r касаются друг друга внешним образом в точке A. Общие касательные AD и BC к окружностям пересекаются в точке D. Доказать, что $AD^2 = Rr$.

10.8.10. [СПбГУ] Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Вписанная в него окружность с центром O касается боковой стороны BC в точке P и пересекает биссектрису угла B в точке Q. Доказать, что отрезки QP и OC параллельны.

10.8.11. [МГУ, геолог. ф-т] Четырехугольник $ABCD$ таков, что около него можно описать и в него можно вписать окружности. Разность длин сторон AD и BC равна разности длин сторон AB и CD. Доказать, что диагональ AC — диаметр описанной окружности.

10.8.12. [МГУ, геолог. ф-т] Четыре точки окружности следуют в порядке A, B, C, D. Продолжения хорды AB за точку B и хорды CD за точку C пересекаются в точке E, причем угол AED равен $60°$. Угол ABD в три раза больше угла BAC. Доказать, что AD — диаметр окружности.

10.8.13. [МПГУ] Из вершины B треугольника ABC опущены перпендикуляры BK и BL на биссектрисы внешних углов треугольника, не смежных с углом B. Доказать, что длина отрезка KL равна полупериметру треугольника ABC.

Группа Б

9. Треугольник

10.9.1. [МГУ, мех.-мат.; МИФИ] В треугольнике KLM проведены биссектрисы KN и LP, пересекающиеся в точке Q. Отрезок PN имеет длину 1 см, а вершина M лежит на окружности, проходящей через точки N, P, Q. Найти стороны и углы треугольника PNQ.

10.9.2. [РЭА] Определить стороны треугольника, если медиана и высота, проведенные из вершины одного угла, делят этот угол на три равные части, а сама медиана равна 10 см.

10.9.3. [НГУ] В треугольнике ABC биссектриса угла BAC равна a. Окружность, построенная на этой биссектрисе как на диаметре, делит стороны AB и AC в отношении $2:1$ и $1:1$, считая от точки A. Найти площадь треугольника ABC.

10.9.4. [МФТИ] В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $BD : CD = 2 : 1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?

10.9.5. [МФТИ] Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AC и BC соответственно в точках M и N и пересекает биссектрису BD в точках P и Q. Найти отношение площадей треугольников PQM и PQN, если $\angle A = \frac{\pi}{4}$, $\angle B = \frac{\pi}{3}$.

10.9.6. [НГУ] В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен $\dfrac{10}{3}$, косинус угла C равен $\dfrac{5}{13}$, а площадь треугольника равна 60. Найти стороны треугольника.

10.9.7. [МИРЭА] В треугольнике ABC точка E принадлежит медиане BD, причем $BE = 3ED$. Прямая AE пересекает сторону BC в точке M. Найти отношение площадей треугольников AMC и ABC.

10.9.8. [МАТИ] В треугольнике ABC площадью $90\,\text{см}^2$ биссектриса AD делит сторону BC на отрезки BD и CD, причем $BD:CD = 2:3$. Отрезок

BL пересекает биссектрису AD в точке E и делит сторону AC на отрезки AL и CL такие, что $AL : CL = 1 : 2$. Найти площадь четырехугольника $EDCL$.

10.9.9. [МАТИ] В треугольнике ABC площадью $40\,\text{см}^2$ биссектриса AD делит сторону BC на отрезки BD и DC, причем $BD : DC = 3 : 2$. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E. Найти площадь четырехугольника $EDCK$.

10.9.10. [МАТИ] В треугольнике ABC площадью $70\,\text{см}^2$ биссектриса AD делит сторону BC на отрезки BD и DC, причем $BD : DC = 3 : 2$. На стороне AC выбрана точка K такая, что биссектриса AD пересекает BK в точке E и $BE : EK = 5 : 2$. Найти площадь четырехугольника $EDCK$.

10.9.11. [МАТИ] В треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найти отношение площади четырехугольника $DOEC$ к площади треугольника ABC, если $AC : AB : BC = 4 : 3 : 2$.

10.9.12. [МФТИ] В треугольнике ABC проведена биссектриса AP. Известно, что $BP = 16$, $PC = 20$ и что центр окружности, описанной около треугольника ABP, лежит на отрезке AC. Найти длину стороны AB.

10.9.13. [МФТИ] В треугольнике ABC проведена биссектриса CQ. Около треугольника BCQ описана окружность радиуса $\frac{1}{3}$, центр которой лежит на отрезке AC. Найти площадь треугольника ABC, если $AQ : AB = 2 : 3$.

10.9.14. [МФТИ] Даны треугольник ABC и ромб $BDEF$, все вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC, а угол при вершине E — тупой. Найти площадь треугольника ABC, если $AE = 3$, $CE = 7$, а радиус окружности, вписанной в ромб, равен 1.

10.9.15. [МФТИ] В треугольнике ABC угол A равен $\pi - \arcsin\frac{8}{17}$, а длина стороны BC равна 8. На продолжении CB за точку B взята точка D так, что $BD = 1$. Найти радиус окружности, проходящей через вершину A, касающейся прямой BC в точке D и касающейся окружности, описанной около треугольника ABC.

10.9.16. [МТУСИ] В треугольнике ABC биссектриса AH делит медиану BE в отношении $BK : KE = 2$, а угол ACB равен $45°$. Найти отношение площади треугольника BCE к площади описанного около этого треугольника круга.

10.9.17. [УрГУ] В треугольнике ABC точки K и N — середины сторон AB и AC соответственно. Через вершину B проведена прямая, которая пересекает сторону AC в точке F, а отрезок KN — в точке L так, что

$KL : LN = 3 : 2$. Определить площадь четырехугольника $AKLF$, если площадь треугольника ABC равна 40.

10.9.18. [МТУСИ] В треугольнике ABC известны высоты h_a, h_b, h_c. Найти радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

10.9.19. [МТУСИ] В треугольнике ABC угол A равен $60°$, а центр вписанного круга делит биссектрису AK в отношении $(\sqrt{3}+1) : \sqrt{2}$, считая от вершины A. Найти величины углов B и C.

10.9.20. [МФТИ] Биссектриса AD и высота BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Окружность с радиусом R и центром в точке O проходит через вершину A, середину стороны AC и пересекает сторону AB в точке K такой, что $AK : KB = 1 : 3$. Найти длину стороны BC.

10.9.21. [МФТИ] Продолжения медиан AM и BK треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках E и F соответственно, причем $AE : AM = 2 : 1$, $BF : BK = 3 : 2$. Найти углы треугольника ABC.

10.9.22. [СПбГУ] Точка X делит сторону AB треугольника ABC в отношении $1 : 2$. Точка Y лежит на стороне AC, и отрезок BY делится отрезком XC в отношении $5 : 2$. В каком отношении точка Y делит сторону AC?

10.9.23. [МГУ, хим. ф-т] Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 2 и 6 от вершины A. Найти радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся прямой AB; $\angle BAC = 30°$.

10.9.24. [МГУ, геогр. ф-т] В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .

10.9.25. [НГУ] В треугольнике ABC ($AB = 14$, $AC = 15$, $BC = 13$) через основание высоты CH проводят прямые, параллельные AC и BC, которые пересекают соответственно BC и AC в точках M и N. Прямая MN пересекает продолжение стороны AB в точке D. Найти длину отрезка BD.

10.9.26. [МГУ, ВМиК] В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M, а на высоте BP — точка N так, что углы BMC и ANC — прямые. Расстояние между точками M и N равно $4+2\sqrt{3}$, $\angle MCN = 30°$. Найти биссектрису CL треугольника CMN.

10.9.27. [МГУ, ВМиК] В треугольнике KLM длина стороны KL равна 27, длина биссектрисы KN равна 24, а длина отрезка MN равна 8. Определить периметр треугольника KMN.

10.9.28. [МГУ, геолог. ф-т] У треугольника известны длины сторон $a = 6$, $b = 8$ и площадь $S = 3\sqrt{15}$. Третья его сторона меньше удвоенной медианы, проведенной к ней. Найти радиус вписанной в этот треугольник окружности.

10.9.29. [МГУ, мех.-мат.] В треугольнике PQR медиана, проведенная из вершины Q, имеет длину $\frac{3\sqrt{21}}{4}$. Окружности с центрами в вершинах P и R и радиусами 5 и 1 соответственно касаются друг друга, а вершина Q лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей. Найти площадь S треугольника PQR, если известно, что $S < 7$.

10.9.30. [МГУ, эк. ф-т] Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найти площадь треугольника.

10.9.31. [СПбГТУ] Найти углы треугольника с единичным радиусом вписанной окружности, если известно, что длины его высот — целые числа.

10.9.32. [РЭА] Из центра окружности, вписанной в треугольник со сторонами 13, 14, 15, проведена новая окружность радиуса 5. Найти длины хорд, отсекаемых этой новой окружностью на сторонах треугольника.

10. Равнобедренный треугольник

10.10.1. [НГУ] Радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности равен 25 см, а вписанной в него окружности — 12 см. Найти стороны треугольника.

10.10.2. [СПбГУ] Даны равносторонний треугольник со стороной a и окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и делящая вторую сторону на две равные части. Кроме того, известно, что центр окружности лежит на третьей стороне треугольника. Найти расстояние от центра окружности до ближайшей вершины треугольника.

10.10.3. [СПбГТУ] Из вершины A равностороннего треугольника ABC проведен луч, пересекающий сторону BC, и на нем выбрана некоторая точка M. Известно, что $\angle AMB = 20°$ и $\angle AMC = 30°$. Найти угол MAB. Показать, что этот угол содержит целое число градусов.

10.10.4. [МФТИ] Равнобедренный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) и треугольник DEF расположены так, что точка D лежит на стороне AB, а точка E — на продолжении стороны AB за точку A. Отрезок KL является средней линией в обоих треугольниках, и площадь четырехугольника $DKLB$ составляет $\frac{5}{8}$ площади треугольника ABC. Найти угол DEF.

10.10.5. [МФТИ] Точка O — центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ($AB = BC$). Прямая AO пересекает отрезок BC

в точке M. Найти углы и площадь треугольника ABC, если $AO = 3$, $OM = \frac{27}{11}$.

10.10.6. [УрГУ] В равнобедренном треугольнике расстояние между точками пересечения медиан и биссектрис равно 2. Определить периметр треугольника, если длина окружности, вписанной в треугольник, равна 20π.

10.10.7. [МФТИ] В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Прямая, параллельная стороне AB и касающаяся окружности, пересекает сторону AC в точке M такой, что $MC = \frac{2}{5}AC$. Найти радиус окружности, если периметр треугольника ABC равен 20.

10.10.8. [МФТИ] Основание AC равнобедренного треугольника ABC является хордой окружности, центр которой лежит внутри треугольника ABC. Прямые, проходящие через точку B, касаются окружности в точках D и E. Найти площадь треугольника DBE, если $AB = BC = 2$, $\angle ABC = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$, а радиус окружности равен 1.

11. Прямоугольный треугольник

10.11.1. [СПбГУ] В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна a, а биссектриса одного из острых углов — $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Найти катеты.

10.11.2. [МФТИ] Отрезок AD является биссектрисой прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Окружность радиусом $\sqrt{15}$ проходит через точки A, C, D и пересекает сторону AB в точке E так, что $AE : AB = 3 : 5$. Найти площадь треугольника ABC.

10.11.3. [ГАУ] Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 3 и 4. Найти площадь треугольника.

10.11.4. [МГУ, биолог. ф-т] Прямоугольный треугольник ABC имеет периметр 54 см, причем длина катета AC больше, чем 10 см. Окружность радиуса 6 см, центр которой лежит на катете BC, касается прямых AB и AC. Найти площадь треугольника ABC.

10.11.5. [МАТИ] В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB и площадью 30 точка O — центр вписанной окружности. Площадь треугольника AOB равна 13. Найти длины сторон треугольника ABC.

10.11.6. [МФТИ] Медиана AM и биссектриса CD прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника ABC, если $CO = 9$, $OD = 5$.

10.11.7. [ГАУ] В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36, вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2 : 3. Найти длину гипотенузы.

12. Трапеция

10.12.1. [НГУ] В трапеции $ABCD$ нижнее основание AD в 2 раза больше верхнего, равного a, угол A при основании равен 45°, а окружности, построенные на боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга. Найти площадь трапеции.

10.12.2. [МФТИ] Длины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 см и 10 см, а длина основания BC равна 2 см. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найти площадь трапеции.

10.12.3. [МФТИ] *В равнобедренную трапецию вписана окружность.* Расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции относится к радиусу как 3 к 5. Найти отношение периметра трапеции к длине вписанной окружности.

10.12.4. [НижГУ] Вычислить площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60°.

10.12.5. [МФТИ] В трапеции $ABCD$: $\angle BAD = 90°$, $\angle ADC = 30°$. Окружность, центр которой лежит на отрезке AD, касается прямых AB, BC и CD. Найти площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен R.

10.12.6. [СПбГУ] В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне, большее основание равно a, а сумма меньшего основания и боковой стороны равна $\frac{3a}{4}$. Найти меньшее основание.

10.12.7. [СПбГУ] В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD. Найти BC, если известно, что $AD = a$, $AB^2 + BC^2 = \frac{11}{16}a^2$.

10.12.8. [МФТИ] Основание AD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) является диаметром окружности, которая касается прямой CD в точке D и пересекает сторону AB в точке L так, что $AB = \frac{4}{\sqrt{3}}AL$. Радиус окружности равен R, $\angle CAD = 45°$. Найти площадь трапеции.

10.12.9. [СПбГУ] Средняя линия трапеции делится одной из диагоналей в отношении k и делит трапецию на две части, меньшая из которых — площади S. Найти площадь трапеции.

10.12.10. [НГУ] В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектриса угла BAD проходит через середину M стороны CD. Известно, что $AB = 5$, $AM = 4$. Найти длину отрезка BM.

10.12.11. [НГУ] Точки M и N выбраны соответственно на основании BC и боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Прямые AM и BN пересекаются в точке K, причем $AK = 3KM$, $KN = 2BK$. Найти отношение $CN : ND$.

10.12.12. [НГУ] Длины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ соответственно равны 9 и 3. Точка E — середина боковой стороны AB, точка F — середина CD. Биссектриса угла BAD пересекает среднюю линию EF в точке P, а биссектриса угла ADC — в точке Q. Длины отрезков EQ, PQ и PF равны. Найти площадь трапеции.

10.12.13. [СПбГУ] Сумма длин оснований трапеции равна 9, а длины диагоналей равны 5 и $\sqrt{34}$. Углы при большем основании острые. Найти площадь трапеции.

10.12.14. [МИЭМ] В трапеции длины диагоналей равны $2\sqrt{61}$ и $3\sqrt{41}$, а длины оснований — 10 и 15. Найти площадь трапеции. Можно ли в эту трапецию вписать окружность? Можно ли вокруг этой трапеции описать окружность?

10.12.15. [НижГУ] Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, длина боковой стороны BC равна b. Найти площадь трапеции.

10.12.16. [КГУ] Сумма квадратов параллельных сторон трапеции равна 288. Определить длину отрезка, параллельного этим сторонам и делящего площадь трапеции пополам.

10.12.17. [МАТИ] В равнобедренной трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 14, а длина основания BC — 2. Окружность касается сторон AB, BC и CD, причем боковая сторона делится точкой касания в отношении $1 : 9$, считая от меньшего основания. Найти радиус окружности.

10.12.18. [МФТИ] На диагонали BD прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D = 90^\circ$, $BC \parallel AD$) взята точка Q так, что $BQ : QD = 1 : 3$. Окружность с центром в точке Q касается прямой AD и пересекает прямую BC в точках P и M. Найти длину стороны AB, если $BC = 9$, $AD = 8$, $PM = 4$.

10.12.19. [МПГУ] Боковая сторона неравнобедренной трапеции равна 12 см и образует с ее основанием угол 60°. Основания трапеции равны 16 см и 40 см. Найти длину отрезка, соединяющего середины оснований.

10.12.20. [МАТИ] В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через вершину A проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке E и боковую сторону CD в точке K, причем $BE : ED = 1 : 2$ и $CK : KD = 1 : 4$. Найти отношение длин оснований трапеции.

10.12.21. [МГУ, мех.-мат.] В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вокруг треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найти EF.

10.12.22. [МГУ, биолог. ф-т] В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 4$, $BC = 1$ и углы $\angle A = \operatorname{arctg} 2$, $\angle D = \operatorname{arctg} 3$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник CBE, где E — точка пересечения диагоналей.

10.12.23. [МГУ, филолог. ф-т] В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найти расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 4$, а $BC = 3$.

10.12.24. [МАТИ] В трапеции $ABCD$ с площадью $36\,\text{см}^2$ через вершину A проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке K, а основание BC — в точке L, причем $BK : KD = 1 : 3$ и $BL : LC = 2 : 1$. Найти площадь четырехугольника $DKLC$.

10.12.25. [МАТИ] В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как $2 : 1$. На боковой стороне AB выбрана точка K так, что $AK : KB = 1 : 2$, а на боковой стороне CD — точка L так, что $CL : LD = 1 : 2$. В каком отношении отрезок KL делит диагональ BD?

10.12.26. [МАТИ] В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектриса угла A пересекает боковую сторону CD в точке E. Найти площадь треугольника ABE, если $AD = 2BC$, $AD = AB$, а площадь трапеции равна $18\,\text{см}^2$.

10.12.27. [ГАУ] В трапеции $ABCD$ точка E лежит на боковой стороне CD. O — пересечение диагонали BD и отрезка AE. Найти площадь треугольника DOE, если $DE : CE = 1 : 2$, $AO = 2OE$, а площадь треугольника AOB равна 1.

10.12.28. [ГАУ] Длины основания KN, диагонали KM и боковой стороны KL трапеции $KLMN$ равны a, а длина диагонали LN равна b. Найти длину боковой стороны MN.

10.12.29. [ГАУ] Длина диагонали BD трапеции $ABCD$ равна m, а длина боковой стороны AD равна n. Найти длину основания CD, если известно, что длины основания, диагонали и боковой стороны трапеции, выходящих из вершины C, равны между собой.

10.12.30. [ГАУ] Около трапеции с основаниями AD и BC описана окружность радиуса 5 см. Центр описанной окружности лежит на основании AD. Основание $BC = 6$ см. Определить диагональ AC данной трапеции.

13. Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат

10.13.1. [БГУ] Отношение периметра параллелограмма к его большей диагонали равно k, $k > 2$. Найти углы параллелограмма, если известно, что большая диагональ делит угол параллелограмма в отношении $1 : 2$.

10.13.2. [МФТИ] Квадрат $ABCD$ и окружность расположены так, что окружность касается прямой AC в точке C, а центр окружности лежит по ту же сторону от прямой AC, что и точка D. Касательные к окружности, проведенные из точки D, образуют угол $120°$. Найти отношение площади квадрата к площади круга, ограниченного данной окружностью.

10.13.3. [МФТИ] Из вершины B тупого угла ромба $ABCD$ проведены высоты BM и BN. В четырехугольник $BMDN$ вписана окружность радиуса 1 см. Найти сторону ромба, если $\angle ABC = 2 \operatorname{arctg} 2$.

10.13.4. [ГАНГ] Внутри параллелограмма расположены две одинаковые окружности радиусом 6, каждая из которых касается боковой стороны параллелограмма, обоих оснований и второй окружности. Боковая сторона делится точкой касания в отношении $9 : 4$. Найти площадь параллелограмма.

10.13.5. [МФТИ] Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка K так, что треугольник CKD равносторонний. Известно, что расстояния от точки K до прямых AD, AB и BC равны соответственно 3, 6 и 5. Найти периметр параллелограмма.

10.13.6. [МГУ, хим. ф-т] В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен $150°$, а основание AD равно 8. Найти радиус окружности, касающейся прямой CD, проходящей через вершину A и пересекающей основание AD на расстоянии 2 от точки D.

10.13.7. [МГУ, эк. ф-т] Окружность, диаметр которой равен $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведенной из точки C к окружности, равна 3, $AB = 1$. Найти все возможные значения, которые может принимать длина стороны BC.

10.13.8. [ГАНГ] Стороны параллелограмма равны 4 см и 6 см. Из середины большей стороны параллельная сторона видна под углом $45°$. Найти площадь параллелограмма.

10.13.9. [МФТИ] На продолжении стороны AD ромба $ABCD$ за точку D взята точка K. Прямые AC и BK пересекаются в точке Q. Известно, что $AK = 14$ и что точки A, B и Q лежат на окружности радиуса 6, центр которой принадлежит отрезку AK. Найти длину отрезка BK.

14. Окружность и круг

10.14.1. [НГУ] Расстояние между центрами двух окружностей равно $5r$. Одна из окружностей имеет радиус r, а вторая — $7r$. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении $1 : 6$. Найти длину этой хорды.

10.14.2. [МФТИ] В окружности проведены хорды AB и AC, причем $AB = 2$ см, $AC = 1$ см, $\angle CAB = 120°$. Найти длину той хорды окружности, которая делит угол CAB пополам.

10.14.3. [СПбГУ] Три круга радиусов r, $\frac{3}{2}r$, $\frac{3}{2}r$ расположены на плоскости так, что каждые два из них касаются друг друга внешним образом. Определить радиус круга, в который вписана данная система трех кругов.

10.14.4. [СПбГУ] Два круга с одинаковыми радиусами r касаются друг друга внешним образом и касаются третьего круга с радиусом R внутренним образом. Найдите радиус круга, одновременно касающегося этих трех кругов (из двух возможных случаев рассмотрите тот, в котором центр четвертого круга и центр круга с радиусом R лежат по разные стороны от точки касания кругов с радиусом r).

10.14.5. [МГУ, псих. ф-т] Точки K, L, M, N, P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника KLM, если $LM \parallel KN$, $KM \parallel NP$, $MN \parallel LP$, а угол LOM равен 45°, где O — точка пересечения хорд LN и MP.

10.14.6. [МГУ, геолог. ф-т] В окружность с центром O вписана трапеция $KLMN$, в которой $KL \parallel NM$, $KL = 8$, $MN = 2$, угол NKL равен 45°. Хорда MA окружности пересекает отрезок KL в точке B такой, что $KB = 3$. Найти расстояние от точки O до прямой AK.

10.14.7. [МГУ, мех.-мат.] В круге радиуса 1 проведены хорды $AB = \sqrt{2}$ и $BC = \frac{10}{7}$. Найти площадь части круга, лежащей внутри угла ABC, если угол BAC острый.

10.14.8. [МГУ, мех.-мат.] Две окружности с центрами A и B радиусами 2 и 1 соответственно касаются друг друга. Точка C лежит на прямой, касающейся каждой из этих окружностей, и находится на $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ от середины отрезка AB. Найти площадь S треугольника ABC, если известно, что $S > 2$.

10.14.9. [МГУ, биолог. ф-т] Дана окружность, диаметр MN которой равен 16. На касательной к этой окружности в точке M отложен отрезок MP, длина которого больше, чем 15. Из точки P проведена вторая касательная к окружности, пересекающая прямую MN в точке Q. Найти площадь треугольника MPQ, если его периметр равен 72.

10.14.10. [МГУ, геолог. ф-т] В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, $AD = 7$, $BC = 3$, $\angle BCD = 120°$, хорда BM окружности пересекает отрезок AD в точке N такой, что $ND = 2$. Найти площадь треугольника BOM.

10.14.11. [МГУ, геолог. ф-т] В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$, в которой $AB \parallel DC$, $AB = 5$, $DC = 1$, угол ABC равен $60°$. Точка K лежит на отрезке AB, причем $AK = 2$. Прямая CK пересекает окружность в точке F, отличной от C. Найти площадь треугольника OFC.

10.14.12. [МГУ, псих. ф-т] Трапеции $ABCD$ и $ACDE$ с равными большими основаниями, соответственно AD и AC, вписаны в одну окружность. Чему равен радиус этой окружности, если площадь треугольника ADE равна $1 + \sqrt{3}$, а угол COD равен $60°$, где O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$?

15. Задачи на доказательство

10.15.1. [УрГУ] Треугольник AOB повернут в своей плоскости вокруг точки O на $90°$, причем вершина A перешла в вершину A_1, а B — в B_1. Доказать, что в треугольнике OAB_1 медиана, опущенная на сторону AB_1, перпендикулярна A_1B, а в треугольнике OA_1B медиана, опущенная на сторону A_1B, перпендикулярна AB_1.

10.15.2. [МАИ] Доказать, что в любом треугольнике ABC

$$h_a = 2p\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

где h_a — высота, опущенная из вершины A, $2p$ — периметр треугольника.

10.15.3. [РГПУ] Доказать, что расстояние от всякой точки окружности, описанной около правильного треугольника, до одной из его вершин равно сумме расстояний от этой точки до двух других вершин.

10.15.4. [РГПУ] Две окружности касаются внутренним образом в точке N. Отрезок MN является диаметром большей окружности. Хорда MK большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Доказать, что NC является биссектрисой угла MNK.

10.15.5. [РГПУ] Доказать, что площадь прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению длин ее оснований.

10.15.6. [МИЭТ] Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон с удвоенным произведением оснований.

10.15.7. [МИЭТ] Точка M лежит на окружности радиуса R, описанной около прямоугольника $ABCD$. Доказать, что

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 8R^2.$$

Группа B

16. Треугольник

10.16.1. [МИЭТ] Дан треугольник ABC, на стороне AC взята точка E так, что $AE : EC = a$, а на стороне AB взята точка D так, что $AD : DB = b$. Проведены отрезки CD и BE. Найти отношение площади получившегося четырехугольника к площади данного треугольника.

10.16.2. [МФТИ] В треугольнике ABC дано $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\angle B = \frac{\pi}{4}$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M, N и P. Найти отношение площадей треугольников ABC и MNP.

10.16.3. [МФТИ] В остроугольном треугольнике ABC высота AD, медиана BE и биссектриса CF пересекаются в точке O. Найти угол C, если $OE = 2 \cdot OC$.

10.16.4. [МИЭТ] В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3, высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину 3. Основание D высоты CD лежит на стороне AB, длина отрезка AD равна длине стороны BC. Найти длину стороны AC.

10.16.5. [МФТИ; НижГУ] В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки AN и BM пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника CMN, если площади треугольников AMO, ABO, BNO равны соответственно S_1, S_2, S_3.

10.16.6. [МФТИ] Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равные части. Найти отношение $BC : CA : AB$.

10.16.7. [СПбГУ] Известно, что точки K и L лежат соответственно на сторонах AB и BC треугольника ABC, а O — точка пересечения AL и CK. Известно, что площади треугольников AOK и COL равны соответственно 1 и 8, а треугольник AOC и четырехугольник $BKOL$ равновелики. Найти площадь треугольника ABC.

10.16.8. [ВВИА] В треугольнике ABC медиана, биссектриса и высота, опущенные из вершины C, равны соответственно 6, 5 и 2 сантиметрам. Найти длину стороны AB.

17. Трапеция

10.17.1. [НГУ] Одна из боковых сторон трапеции перпендикулярна основаниям и равна $2a$. На этой стороне как на диаметре построена окружность, которая делит другую боковую сторону на три отрезка. Отношение длин этих отрезков равно $1 : 2 : 2$ (считая от верхнего основания). Найти площадь трапеции.

10.17.2. [МФТИ] В равнобедренной трапеции $ABCD$ углы при основании AD равны 30°, диагональ AC является биссектрисой угла BAD. Биссектриса угла BCD пересекает основание AD в точке M, а отрезок BM пересекает диагональ AC в точке N. Найти площадь треугольника ANM, если площадь трапеции $ABCD$ равна $(2+\sqrt{3})$ см^2.

10.17.3. [МФТИ] Вершина C прямоугольника $ABCD$ лежит на стороне KM равнобедренной трапеции $ABKM$ ($BK \parallel AM$), P — точка пересечения отрезков AM и CD. Найти углы трапеции и отношение площадей прямоугольника и трапеции, если $AB = 2BC$, $AP = 3BK$.

10.17.4. [МФТИ] В трапеции $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$) угол NPM в 2 раза больше угла NQM. $NP = MP = \frac{13}{2}$, $MQ = 12$. Найти площадь трапеции.

10.17.5. [МФТИ] Биссектрисы углов A и B трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O. Найти длины сторон AB и BC, если $\angle A = 2\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$, $OC = \sqrt{7}$, $OD = 3\sqrt{15}$, $AD = 5BC$.

18. Окружность и круг

10.18.1. [МФТИ] В круге проведены две взаимно перпендикулярные и пересекающиеся хорды AB и CD. Известно, что $AB = AC = CD$. Установить, что больше: площадь круга или площадь квадрата со стороной AB.

10.18.2. [МАИ] В окружность радиусом 13 вписан четырехугольник, один из углов между диагоналями которого равен $120°$. Длины диагоналей равны 10 и 24. Найти длину наибольшей стороны четырехугольника.

10.18.3. [МГУ, ф-т почвовед.] Две окружности с центрами M и N, лежащими на стороне AB треугольника ABC, касаются друг друга извне и пересекают стороны AC и BC в точках A, P и B, Q соответственно, причем $AM = PM = 2$, $BN = QN = 5$. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности, если известно, что отношение площади треугольника AQN к площади треугольника MPB равно $15\frac{\sqrt{3}}{8}$ и $AP = \frac{2}{5}QB\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{3}}$.

10.18.4. [МГУ, ВМиК] Две окружности пересекаются в точках K и L. Их центры расположены по одну сторону от прямой, содержащей отрезок KL. Точки A и B лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AK, касается одной окружности в точке K. Прямая, содержащая отрезок BK, касается другой окружности также в точке K. Длина отрезка AL равна 3, длина отрезка BL равна 6, а тангенс угла AKB равен $-0{,}5$. Найти площадь треугольника AKB.

10.18.5. [МГУ, ф-т почвовед.] В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P. Длина отрезка, соединяющего вершину C с точкой M, являющейся серединой отрезка AD, равна $\frac{5}{4}$. Расстояние от точки P до отрезка BC равно $\frac{1}{2}$ и $AP = 1$. Найти длину отрезка AD, если известно, что вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

10.18.6. [МГУ, ВМиК] Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. Длина отрезка BK равна 1, длина отрезка CK равна 4, а тангенс угла CAB равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$. Найти площадь треугольника ABC.

10.18.7. [МГУ, ф-т почвовед.] Две окружности с центрами O_1 и O_2, лежащими на стороне MN треугольника MPN, касаются друг друга извне и пересекают стороны MP и PN в точках M, D и N, C соответственно, причем $MO_1 = O_1D = 3$ и $NO_2 = CO_2 = 6$. Найти площадь треугольника MNP, если известно, что отношение площади треугольника MCO_2 к площади треугольника O_1DN равно $\frac{8}{5}\sqrt{3}$ и $PN = MP\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

10.18.8. [МГУ, ВМиК] Три круга с центрами в точках P, Q и R попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Известно, что величина угла PQR равна $2\arcsin\frac{1}{3}$, а сумма радиусов всех трех кругов равна $12\sqrt{2}$. Какую наибольшую длину может иметь окружность, проходящая через точки A, B и C?

10.18.9. [СПбГТУ] Две окружности с радиусами r и R ($r < R$) расположены так, что одна из их общих внутренних касательных перпендикулярна к одной из их внешних касательных. Найти площадь треугольника, образованного этими касательными и еще одной внутренней касательной.

19. Разные задачи

10.19.1. [СПбГУ] В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ с единичными сторонами середины P, Q сторон AB, CD и S, T сторон BC, DE соединены отрезками PQ и ST. Пусть M и N — середины отрезков PQ и ST. Найти длину отрезка MN.

10.19.2. [НижГУ] В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна a, сторона AC равна b. Из вершин B и C опущены перпендикуляры BK и CN на диагональ AD, причем $AK < AN$. Найти отношение $OC : OA$, где O — точка пересечения диагоналей четырехугольника, если $AK = k$, $AN = n$.

10.19.3. [СПбГТУ] Диагонали с длинами $\sqrt{7}$ и 4 делят четырехугольник на части, площади которых образуют арифметическую прогрессию. Найти площадь четырехугольника, зная, что угол между большей диагональю и меньшей из сторон равен $\frac{\pi}{6}$.

10.19.4. [СПбГТУ] Четырехугольник $ABCD$, описанный около некоторой окружности, делится диагональю AC на треугольники ABC и ACD с радиусами вписанных окружностей 1 и $\frac{3}{\sqrt{15}}$ соответственно. Найти стороны четырехугольника и диагональ BD, если площади ABC и ACD равны 6 и $\sqrt{15}$ соответственно.

10.19.5. [МГУ, эк. ф-т] Продолжения сторон KN и LM выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон KL и MN — в точке Q. Отрезок PQ перпендикулярен биссектрисе угла KQN. Найти длину стороны KL, если $KQ = 12$, $NQ = 8$, а площадь четырехугольника $KLMN$ равна площади треугольника LQM.

10.19.6. [МГУ, эк. ф-т] В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок CM, соединяющий вершину C с точкой M, расположенной на стороне AD, пересекает диагональ BD в точке K. Известно, что $CK : KM = 2 : 1$, $CD : DK = 5 : 3$ и $\angle ABC + \angle ACD = 180°$. Найти отношение стороны AB к диагонали AC.

10.19.7. [МГУ, эк. ф-т] В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ отрезок MS, соединяющий вершину M с точкой S, расположенной на стороне KN, пересекает диагональ LN в точке O. Известно, что $KL : MN = 6 : 7$, $KM : ON = 2 : 1$ и $\angle KLN + \angle KMN = 180°$. Найти отношение отрезков MO и OS.

10.19.8. [МГУ, эк. ф-т] Продолжения сторон KN и LM выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон KL и MN — в точке Q. Отрезок PQ перпендикулярен биссектрисе угла KQN. Найти длину стороны MN, если $KQ = 6$, $NQ = 4$, а площади треугольника LQM и четырехугольника $KLMN$ равны.

10.19.9. [МГУ, эк. ф-т] Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон AB и CD — в точке O. Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AO. Найти отношение площадей треугольника AOD и четырехугольника $ABCD$, если $OA = 12$, $OD = 8$, $CD = 2$.

10.19.10. [МГУ, псих. ф-т] Точки K, L, M делят стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ в отношении: $AK : BK = CL : BL = CM : DM = 1 : 2$. Радиус окружности, описанной около треугольника KLM, равен $\frac{5}{2}$, $KL = 4$, $LM = 3$. Какова площадь $ABCD$, если известно, что $KM < KL$?

10.19.11. [СПбГТУ] Длины сторон и диагоналей выпуклого четырехугольника — рациональные числа. Можно ли утверждать, что диагонали разрезают его на четыре треугольника, длины сторон которых также являются рациональными числами. Ответ обосновать.

10.19.12. [МФТИ] Биссектрисы углов B и C параллелограмма пересекаются в точке O. Найти площадь параллелограмма, если $\angle A = 2\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$, $OA = 2\sqrt{10}$, $OD = 5$. (Найти все решения).

11. Стереометрия

Основные формулы стереометрии

Поверхности и объемы многогранников

Обозначения: H — высота, $S_{осн}$ — площадь основания, $S_{бок}$ — боковая поверхность, $S_{полн}$ — полная поверхность, V — объем.

1. *Призма*

$V = S_{осн} \cdot H$, $S_{бок} = Pl$, где P — периметр сечения призмы, перпендикулярного боковому ребру длины l.

2. *Прямая призма*

$V = S_{\text{осн}} \cdot H$, $S_{\text{бок}} = PH$, где P — периметр основания призмы.

3. *Прямоугольный параллелепипед*

$V = abc$, $S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ca)$, где a, b, c — длина, ширина, высота параллелепипеда.

4. *Куб*

$V = a^3$, $S_{\text{полн}} = 6a^2$.

5. *Пирамида*

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$.

Поверхности и объемы круглых тел

Обозначение: R — радиус оснований цилиндра, конуса, или радиус шара.

6. *Цилиндр*

$V = \pi R^2 H$, $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$, $S_{\text{полн}} = 2\pi R(H + R)$.

7. *Конус*

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, $S_{\text{бок}} = \pi Rl$, $S_{\text{полн}} = \pi R(l + R)$, где l — длина образующей.

8. *Шар*

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S = 4\pi R^2$.

9. *Шаровой сегмент*

$V = \pi H^2 (R - \frac{H}{3})$, где H — высота сегмента.

10. *Шаровой сектор*

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$, где H — высота соответствующего шарового сегмента.

11. *Сферический сегмент*

$S = 2\pi RH$, где H — высота сегмента.

Группа А

1. Пирамида

11.1.1. [ДВГУ] В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от центра симметрии основания до бокового ребра равно d, двугранный угол при ребре основания равен φ. Найти объем пирамиды.

11.1.2. [РГОТУПС] Объем правильной четырехугольной пирамиды равен V. Угол наклона его бокового ребра к плоскости основания равен α. Найти боковое ребро пирамиды.

11.1.3. [МИЭМ] Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Высота пирамиды равна H. Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Найти объем пирамиды.

11.1.4. [МТУСИ] В пирамиде $ABCF$ через медиану BK основания ABC и середину L бокового ребра AF проведена плоскость. Найти отношение объема многогранника $BCKLF$ к объему пирамиды $ABKL$.

11.1.5. [МТУСИ] Основанием четырехугольной пирамиды служит квадрат. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, два других наклонены к основанию под углом 60°. Найти полную поверхность пирамиды, если сторона квадрата равна 4.

11.1.6. [СПбГУ] Около шара описана правильная четырехугольная пирамида, высота которой вчетверо больше диаметра шара. Найти отношение объема шара к объему пирамиды.

11.1.7. [ГАНГ] Угол между боковой гранью и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен 45°. Объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$. Найти длину стороны основания пирамиды.

11.1.8. [ГАНГ] Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро пирамиды равно 4. Найти объем пирамиды.

11.1.9. [МИЭТ] Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 3, а сторона основания равна 2. Вычислить косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

11.1.10. [НижГУ] В правильной треугольной пирамиде известны высота H и величина двугранного угла 2α, образованного боковыми гранями. Найти длину стороны основания.

11.1.11. [ОмГУ] В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник с диагональю 10. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом β. Найти площадь поверхности и объем шара.

11.1.12. [ОмГУ] Найти двугранный угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием, равен α.

11.1.13. [МПГУ] Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $a\sqrt{3}$ и a. Ребро SC перпендикулярно к плоскости основания, а ребро SA образует с ней угол α. Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной прямой SA и проходящей через BD.

11.1.14. [МПГУ] Отрезок прямой, соединяющей центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найти угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

11.1.15. [МИСиС] Основанием пирамиды является прямоугольник с длинами сторон 3 и 4. Боковая грань, проведенная к меньшей стороне прямоугольника, образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем пирамиды.

11.1.16. [РГПУ] В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 60°. Через вершину основания параллельно противолежащей ей диагонали проведена секущая плоскость так, что высота пирамиды делится точкой пересечения с этой плоскостью в отношении $1:2$ (считая от основания). Найти площадь сечения.

11.1.17. [РГПУ] В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 60°. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно к противолежащему ребру.

11.1.18. [РГПУ] Основанием пирамиды служит ромб со стороной 6 и острым углом 30°. Все двугранные углы при основании равны. Боковая поверхность пирамиды равна 36. Найти (в градусах) величину двугранного угла при основании.

11.1.19. [ГАНГ] Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно $\sqrt{6}$, радиус окружности, описанной около основания, равен $\sqrt{2}$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

11.1.20. [ГАНГ] В правильной четырехугольной пирамиде боковая грань составляет с плоскостью основания угол $\frac{\pi}{3}$. Радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, равен $\sqrt{3}$. Найти объем пирамиды.

11.1.21. [ЯрПУ] Дана четырехугольная пирамида, основанием которой является квадрат и одно из ребер которой перпендикулярно к плоскости основания. В эту пирамиду вписан куб так, что нижнее основание куба лежит на основании пирамиды, а стороны верхнего основания куба лежат на боковых гранях пирамиды. Найти объем пирамиды, если ее боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α и ребро куба равно a.

11.1.22. [МИЭМ] Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания, равной a, и двугранным углом при основании, равным 2α, пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найти площадь сечения.

11.1.23. [МПГУ] Найти объем и площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, у которой высота равна $\sqrt{3}$, а плоский угол при вершине равен 30°.

11.1.24. [МГГА] Основанием пирамиды служит треугольник с длинами сторон 6 см, 5 см и 5 см. Боковые грани пирамиды образуют с ее основанием равные двугранные углы, содержащие 45°. Определить объем пирамиды.

11.1.25. [МГГУ] Высота правильной треугольной пирамиды $2\sqrt{3}$, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Найти объем пирамиды.

11.1.26. [МГУЛ] В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении $2:3$ (от вершины к основанию). Найти площадь сечения, зная, что оно меньше площади основания на 84 см^2.

11.1.27. [МЭИ] Основанием пирамиды служит прямоугольник, длина диагонали которого равна l. Угол между диагоналями основания равен α, а длина высоты пирамиды равна периметру основания. Найти объем пирамиды.

11.1.28. [МИКХС] Найти площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если апофема ее равна m, а угол при вершине α.

11.1.29. [МГАТХТ] Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны содержат по 6 см, а третья сторона 8 см. Боковые ребра равны между собой и каждое содержит 9 см. Определить объем этой пирамиды.

11.1.30. [МГАЛП] Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом $\alpha = 45°$. Периметр основания равен 24. Найти объем пирамиды. Ответ записать десятичной дробью с одним знаком после запятой, используя правила округления. Принять $\sqrt{3} = 1{,}73$.

11.1.31. [МГАПП] В основании треугольной пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной 6. Высота пирамиды равна 9. Найти объем пирамиды (считать $\sqrt{3} = 1{,}7$).

11.1.32. [МГАПБ] Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найти высоту пирамиды. Принять $\sqrt{3} = 1{,}7$.

11.1.33. [МГУК] Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 см и 5 см. Ребро усеченной пирамиды равно $\sqrt{17}$ см. Найти площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

11.1.34. [РЭА] Диагональное сечение правильной четырехугольной пирамиды равновелико основанию. Найти площадь основания пирамиды, если ее боковое ребро равно 5.

11.1.35. [МГОПУ] Основанием правильной пирамиды служит многоугольник, сумма внутренних углов которого 540°. Определить объем этой пирамиды, зная, что ее боковое ребро, равное l, наклонено к плоскости основания под углом β.

11.1.36. [МПГУ] В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен $120°$. Найти боковую поверхность пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна q.

11.1.37. [РГМУ] В правильной треугольной пирамиде $SABC$, где S — вершина пирамиды, на ребре SC взята точка D так, что $SD : DC = 1 : 2$. Найти площадь треугольника ABD, если $AB = a$, $\angle ASB = \alpha$.

11.1.38. [ВОКУ] Найти высоту правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно 18, а диагональ основания $16\sqrt{2}$.

11.1.39. [БГАРФ] Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a. Найти объем этой пирамиды, если известно, что ее боковая поверхность в десять раз больше площади основания.

11.1.40. [МПГУ] Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом φ. Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

11.1.41. [МПГУ] Центр грани куба с ребром a соединен с серединами сторон противоположной грани, которые также соединены в последовательном порядке. Вычислить площадь поверхности пирамиды, ребрами которой являются проведенные отрезки.

2. Куб, параллелепипед, призма

11.2.1. [МИЭМ] Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Верно ли, что плоскости BCA_1 и B_1C_1D перпендикулярны? Дать обоснование ответа.

11.2.2. [МИЭМ] Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a, точка M лежит на ребре DD_1 так, что $D_1M = \frac{1}{4}a$. Найти периметр треугольника AB_1M и площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки B_1 и M и параллельной прямой C_1D.

11.2.3. [МТУСИ] Куб с ребром, длина которого равна $4\sqrt{3}$, пересечен плоскостью, проходящей через середины трех его ребер, выходящих из одной вершины. Найти площадь сечения.

11.2.4. [МТУСИ] Боковые грани правильной треугольной призмы — квадраты. Площадь боковой поверхности призмы равна 144. Найти объем многогранника, вершинами которого служат центры всех граней призмы.

11.2.5. [СПбГУ] В шар радиусом R вписана правильная треугольная призма. Высота призмы равна H. Найти объем призмы.

11.2.6. [СГУ] Через диагональ AC квадрата, лежащего в основании прямого параллелепипеда, и вершину другого основания параллелепипеда проведена плоскость так, что в сечении получился треугольник AB_1C с углом при вершине B_1 в два раза большим, чем угол между плоскостью сечения и основанием параллелепипеда. Найти угол AB_1C.

11.2.7. [СГУ] В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием плоскостью получается ромб. Найти внутренние углы ромба, если двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен $30°$.

11.2.8. [МИЭМ] В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины a точка K — середина ребра AB, точка E — середина ребра DD_1. Найти периметр треугольника A_1KE и определить, в каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершины этого треугольника.

11.2.9. [МПГУ] В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB = a$, $BC = a$, $AA_1 = b$. Найти площадь сечения, проходящего через вершину A и перпендикулярного диагонали BD_1.

11.2.10. [МПГУ] В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и середину противоположного ребра проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол $60°$. Площадь сечения равна $S = 8\sqrt{3}$. Найти объем и полную поверхность призмы.

11.2.11. [МПГУ] Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $10\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол $45°$. Найти объем параллелепипеда, если одна сторона основания больше другой на 2 см.

11.2.12. [МПГУ] Стороны основания прямого параллелепипеда равны 13 см и 14 см, меньшая его диагональ 17 см, площадь основания 168 см^2. Определить площадь боковой поверхности.

11.2.13. [НГУ] В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 4. Найти объем призмы, если известно, что прямые AB_1 и CA_1 перпендикулярны.

11.2.14. [НГУ] В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 все ребра равны 6. Точки P и Q_1 расположены на ребрах BC и A_1C_1 соответственно и так, что $BP : PC = A_1Q_1 : Q_1C_1 = 1 : 2$. Найти радиус сферы с центром на отрезке PQ_1, которая касается плоскостей ABB_1A_1 и ACC_1A_1.

11.2.15. [МИЭМ] Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом α. Ребро AA_1 равно b и образует с ребрами AB и AD угол φ. Определить объем параллелепипеда.

11.2.16. [СПбГУ] Плоскость делит боковые ребра правильной треугольной призмы в отношениях $2:1$, $3:4$ и $1:5$, считая от нижнего основания. В каком отношении она делит объем призмы?

11.2.17. [МЭИ] В основании прямой треугольной призмы лежит равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна a и угол при основании равен α. Через основание треугольника под углом β к плоскости треугольника проведена плоскость. Найти площадь сечения призмы указанной плоскостью, если известно, что это сечение является треугольником.

11.2.18. [РГПУ] В прямой треугольной призме через одну из сторон нижнего основания проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро и составляющая с плоскостью основания угол, равный $45°$. Определить площадь сечения, если в основании призмы лежит правильный треугольник, сторона которого равна a.

11.2.19. [ГАСБУ] Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$. Точки K, L, M, N лежат на ребрах A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 соответственно, причем прямая KM параллельна прямой B_1C_1. Точка A_2 выбрана на ребре AA_1 так, что $AA_2 : A_2A_1 = 3$. Через точку A_2 параллельно плоскости ABC проведена плоскость π, которая пересекает отрезки BK, BL, BM, BN в точках E, F, G, H соответственно. Найти объем четырехугольной пирамиды $CEFGH$, если объем призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен V.

11.2.20. [МГТА] Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна 1. Найти площадь боковой поверхности призмы.

11.2.21. [МВВДИУ] Диагональ прямого параллелепипеда с квадратным основанием равна 3,5; а диагональ боковой грани 2,5. Найти объем параллелепипеда.

11.2.22. [МПГУ] Диагональ d основания прямоугольного параллелепипеда образует со стороной основания угол φ. Угол между этой стороной и диагональю параллелепипеда равен β. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда.

11.2.23. [МПГУ] Высота правильной четырехугольной призмы равна h. Из одной вершины основания проведены в двух смежных боковых гранях две диагонали, угол между которыми α. Определить боковую поверхность призмы.

11.2.24. [МПГУ] В основании прямой призмы лежит параллелограмм, через сторону которого, равную a, и противоположную ей сторону верхнего основания проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол β; площадь сечения Q. Найти объем призмы.

3. Круглые тела

11.3.1. [ДВГУ] Стороны треугольника $a = b = 10$ см, $c = 12$ см касаются сферы радиуса 5 см. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

11.3.2. [ДВГУ] В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найти косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

11.3.3. [РГОТУПС] Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол 60°. Определить объем конуса.

11.3.4. [МТУСИ] Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник. *Найти отношение объема конуса к объему вписанного в него шара.*

11.3.5. [МТУСИ] Объем конуса равен 384. Найти площадь осевого сечения конуса, если длина окружности в основании конуса равна 15.

11.3.6. [МТУСИ] Металлический цилиндр с диаметром основания $d = 4$ см и высотой $h = 4$ см переплавлен в шар. Вычислить радиус этого шара.

11.3.7. [МИСиС] Через вершину конуса проведено сечение под углом 30° к высоте конуса. Вычислить площадь сечения, если высота конуса равна $3\sqrt{3}$ см, а радиус основания равен 5 см.

11.3.8. [ГАНГ] В цилиндр вписан шар. Найти объем шара, если объем цилиндра равен 7,5.

11.3.9. [МИЭТ] Найти отношение поверхности шара к поверхности вписанного в него куба.

11.3.10. [МЭИ] Найти радиус шара, объем которого равен объему тела, образованного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы, длина которой равна $2a$.

11.3.11. [МИСиС] В правильную треугольную пирамиду вписан прямой конус и около нее описан прямой конус. Найти разность объемов описанного и вписанного конусов, если высота пирамиды равна 4 и длина окружности основания описанного конуса равна $\sqrt{3}\pi$.

11.3.12. [МИСиС] Высота конуса равна диаметру его основания. Найти квадрат отношения площади его основания к площади боковой поверхности.

11.3.13. [СПбГУ] В кубе с ребром 1 расположен конус так, что его вершина совпадает с вершиной куба. Три грани куба касаются боковой поверхности конуса, а вписанный в куб шар касается основания конуса. Найти объем конуса.

11.3.14. [РГПУ] Известно, что две взаимно перпендикулярные образующие конуса делят окружность его основания на дуги 120° и 240°. Найти объем конуса, если его высота равна H.

11.3.15. [МИЭТ] Три хорды шара, исходящие из одной точки на его поверхности, равны a, углы между хордами равны 60°. Найти радиус шара.

11.3.16. [МИЭТ] Тело состоит из двух конусов, имеющих общее основание и расположенных по разные стороны от плоскости основания. Найти объем шара, вписанного в тело, если радиусы оснований конусов равны 1, а высоты 1 и 2.

11.3.17. [МЭИ] Около правильной треугольной пирамиды с боковым ребром a описан шар. Найти площадь поверхности шара и объем пирамиды, если боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания пирамиды угол α.

11.3.18. [МЭИ] Сумма объемов четырех одинаковых шаров равна половине объема пятого шара, а сумма площадей поверхностей первых четырех шаров на $10\,\text{м}^2$ больше половины площади поверхности пятого шара. Найти радиус пятого шара.

11.3.19. [МПГУ] Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор радиусом 5 с центральным углом $\frac{6\pi}{5}$. Найти объем конуса.

11.3.20. [МПГУ] В конус вписан шар. Найти объем шара, если образующая конуса равна l и наклонена к основанию конуса под углом α.

11.3.21. [МАМИ] В шар объемом $4\sqrt{3}\,\text{дм}^3$ вписан цилиндр, образующая которого видна из центра шара под углом 60°. Найти объем цилиндра.

11.3.22. [МАДИ] Объем конуса равен V. Высота его разделена на три равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найти объем средней отсеченной части.

11.3.23. [МГСУ] В конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник, вписан шар радиуса $r = 2\,\text{см}$. Найти объем конуса.

11.3.24. [МЭСИ] Боковая поверхность цилиндра развертывается в квадрат со стороной $4\sqrt[3]{\pi}$. Найти объем цилиндра.

11.3.25. [ВАХЗ] В прямой круговой конус с радиусом основания 2 см вписан шар радиуса 1 см. Вычислить объем конуса.

11.3.26. [МВВДИУ] Найти полную поверхность цилиндра, в осевом сечении которого квадрат, если его боковая поверхность равна 80.

4. Прямые и плоскости

11.4.1. [МИЭМ] AB и CD — параллельные прямые, лежащие в двух пересекающихся плоскостях, образующих угол в 60°. Точки A и D удалены от линии пересечения плоскостей на a и b. Найти расстояние между AB и CD.

11.4.2. [МИЭМ] A и B — точки на ребре двугранного угла в 60°; AC и BD — перпендикуляры к ребру, проведенные в разных гранях. Определить расстояние CD, если $AB = 3$ см, $AC = 2$ см, $BD = 3$ см.

11.4.3. [МТУСИ] Катеты прямоугольного треугольника равны 7 см и 24 см. Определить расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол в 30° с плоскостью треугольника.

11.4.4. [МТУСИ] Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние $5\sqrt{2}$, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45°, а между собой угол 60°. Найти расстояние между основаниями наклонных.

11.4.5. [МТУСИ] Отрезок AB упирается своими концами в грани прямого двугранного угла $PMNQ$. Концы отрезка находятся на одинаковых расстояниях от ребра MN двугранного угла. Найти отношение углов, под которыми отрезок наклонен к граням.

11.4.6. [РГПУ] Один из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника лежит в плоскости α, а другой образует с ней угол, равный 45°. Найти угол, который образует гипотенуза с плоскостью α.

11.4.7. [РГПУ] Катет прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) лежит на ребре двугранного угла величиной 30°, образованного этим треугольником и данной плоскостью α. Найти расстояние от вершины B до плоскости α, если $AC = 8$, $AB = 3BC$.

Группа Б

5. Разные задачи

11.5.1. [НГУ] В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 2$. Длины всех боковых ребер равны 3, точка M — середина AS. Через прямую BM параллельно диагонали AC проведена плоскость. Определить величину угла между этой плоскостью и плоскостью SAC.

11.5.2. [НГУ] Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Длина ребра куба равна 1. Через прямую B_1C проведена плоскость, пересекающая ребро AB и составляющая угол 60° с прямой A_1B. В каком отношении эта плоскость делит ребро AB?

11.5.3. [НГУ] Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Длина всех ребер куба равны 1. Точки M и N — середины CD и CC_1 соответственно. Найти расстояние между прямыми AN и BM.

11.5.4. [МИЭМ] В основании пирамиды лежит правильный треугольник ABC со стороной 2 см. Грань ACD перпендикулярна основанию, причем $AD = CD = \sqrt{6}$ см. Найти длину ребра BD, а также площади всех тех сечений пирамиды, которые являются квадратами.

11.5.5. [МГУ, псих. ф-т] В тетраэдре $PQRS$ соединены отрезками следующие пары точек: точка F на ребре PQ с точкой G на ребре RS, точка O на ребре QS с точкой N на ребре PR, а также точки X, Y — середины ребер PS и QR соответственно. Отрезки FG, ON, XY пересекаются в одной точке. Определить площадь четырехугольника $FOGN$, если $PS = QR = PQ = 5$, $PF = 3$, а угол между скрещивающимися прямыми PS и QR равен $60°$.

11.5.6. [СПбГУ] Вершины куба с ребром 1 являются центрами шаров одинакового радиуса. Объем части куба, расположенной вне шаров, равен $\frac{1}{2}$. Какая часть ребра куба лежит вне шаров?

11.5.7. [МГТУ] В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 6$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$ через его диагональ AC_1 проведена плоскость так, что полученное сечение имеет наименьшую сумму квадратов сторон. Найти площадь сечения и угол между секущей плоскостью и гранью $ABCD$.

11.5.8. [МИФИ] Верхнее основание $R_1S_1T_1$ прямой треугольной призмы $RSTR_1S_1T_1$ является правильным треугольником, площадь которого равна $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Через прямую RS проведена секущая плоскость, составляющая угол γ с ребром TT_1. Определить радиус окружности, описанной около получившегося в сечении треугольника.

11.5.9. [МИФИ] Высота SO правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна H, а величина угла ASC (AS и CS — противоположные боковые ребра) равна 2α. На прямой SO взята точка K такая, что $SK : SO_1 = 1 : 3$ (O_1 — центр описанной около пирамиды сферы). Определить площадь сечения пирамиды плоскостью,параллельной плоскости основания пирамиды и проходящей через точку K.

11.5.10. [МИЭМ] Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1 и через вершины A и C_1.

11.5.11. [МИЭМ] Сфера проходит через вершину A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, середины ребер AB и AD, касается грани $A_1B_1C_1D_1$.

Найти отношение площади поверхности сферы к площади полной поверхности куба.

11.5.12. [МПГУ] Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B и углом A, равным α. Каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°. Найти угол между плоскостями SAC и SBC.

11.5.13. [МПГУ] Основанием четырехугольной пирамиды $MABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, $AB = a$, $AD = b$. Грани MAD и MAB перпендикулярны плоскости основания, а грань MDC составляет с ней угол в 45°. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

11.5.14. [МГУ, физ. ф-т] Три шара с радиусами R касаются друг друга и каждый из них касается боковой поверхности конуса. Центры шаров находятся вне конуса. Высота конуса перпендикулярна плоскости α, содержащей центры шаров. Угол между высотой конуса и его образующей равен φ. Найти расстояние от вершины конуса до плоскости α.

11.5.15. [МЭИ] Основание BC равнобедренной трапеции $ABCD$ и сторона BC ромба $MBCN$ совпадают, причем $BC=a$, $AD=b$ $(a<b<2a)$. Найти площадь поверхности тела, образованного совместным вращением трапеции и ромба вокруг прямой, содержащей BC, если острый угол трапеции равен 30°, а острый угол ромба равен 60°.

11.5.16. [МЭИ] Основанием пирамиды является равнобедренная трапеции, длины боковых сторон которой равны 5. Известно, что в указанную трапецию можно вписать окружность и что прямая, соединяющая середины боковых сторон трапеции, делит ее на две части, отношение площадей которых равно $\frac{3}{7}$. Найти объем пирамиды, если ее высота равна периметру ее основания.

11.5.17. [МИЭТ] Двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды равен 2α. Высота пирамиды равна h. Найти объем конуса, описанного около пирамиды.

11.5.18. [МИЭТ] Одна из сторон равностороннего треугольника образует с некоторой плоскостью p угол α, другая — с той же плоскостью угол β. Найти угол между плоскостью треугольника и плоскостью p.

11.5.19. [МПГУ] Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между плоскостью грани $ABCD$ и плоскостью, проходящей через вершину B и середины ребер AD и CC_1.

11.5.20. [МГУ, мех.-мат.] На диагоналях AB_1 и BC_1 граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки M и N так, что отрезки MN и A_1C параллельны. Найти отношение длин этих отрезков.

11.5.21. [МГУ, физ. ф-т] В треугольной пирамиде $SABC$ все плоские углы при вершине S прямые, SO — высота пирамиды. Известно, что отношение площади треугольника AOB к площади треугольника BOC равно k. Найти отношение площади треугольника ASB к площади треугольника BSC.

11.5.22. [СПбГУ] Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$, стороны основания которой $AB = BC = 1$, $AC = \sqrt{3}$. В каком отношении объем вписанного в призму цилиндра делится плоскостью AB_1C?

11.5.23. [СПбГУ] В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a. Одна из боковых граней представляет собой такой же треугольник, при этом она перпендикулярна плоскости основания. Найти радиус описанного шара пирамиды.

11.5.24. [МГУ, мех.-мат.] Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сфера касается ребер AD, DD_1, CD и прямой BC_1. Найти радиус сферы, если длины ребер куба равны 1.

11.5.25. [МГУ, физ. ф-т] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α, сторона основания равна a, SH — высота пирамиды. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SA и BC.

11.5.26. [МГУ, геолог. ф-т] Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в нем через вершину C проведена диагональ. Найти отношение площади сечения этого куба плоскостью, перпендикулярной этой диагонали и проходящей через ее середину, к площади его боковой поверхности.

11.5.27. [МГУ, псих. ф-т] Через вершины A и B треугольной пирамиды проведена сфера, пересекающая ребра AS и BS в точках M и N соответственно. Через точки B и N проведена вторая сфера, пересекающая ребро SC в точках P и Q, причем $PQ = \frac{1}{3}SC$. Найти, какую часть ребра SC составляет отрезок QC ($QC < PC$), если M — середина SA и $SC = \frac{3}{2}SA$.

11.5.28. [МГУ, мех.-мат.] Высота пирамиды равна 5, а основанием служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9. Некоторая сфера касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Найти радиус сферы.

11.5.29. [МГУ, мех.-мат.] Три параллельные прямые касаются в точках A, B и C сферы радиусом 4 с центром в точке O. Найти угол BAC, если известно, что площадь треугольника OBC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

11.5.30. [МГУ, физ. ф-т] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) проведено сечение плоскостью, проходящей через точки B и C и делящей ребро SA в отношении $m : n$, считая от вершины S. Известно, что объем пирамиды $SABC$ равен V, а расстояние от центра основания ABC до плоскости сечения равно d. Найти площадь сечения.

11.5.31. [НГУ] В пирамиде $ABCD$ ребра AC, BC, DC попарно перпендикулярны и $AC = BC = DC = 4$. Точка N — середина ребра AB, а точка M расположена на ребре AD так, что $AM : MD = 3$. Шар с центром на прямой CN касается ребра AD в точке M. Найти радиус шара.

Группа В

6. Разные задачи

11.6.1. [МФТИ] Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a, а боковое ребро — длину $\frac{5}{4}a$. Точка D — середина ребра A_1C_1, а точка M лежит на отрезке DB_1 и $DM = \frac{1}{6}DB_1$. Вторая призма симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой BM. Найти объем общей части этих призм.

11.6.2. [МФТИ] Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a, а боковое ребро — длину $\frac{9}{8}a$. Точка E — середина ребра AB, а точка M лежит на отрезке EC и $EM = \frac{1}{4}EC$. Вторая призма симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой MC_1. Найти объем общей части этих призм.

11.6.3. [МФТИ] Точка M лежит на ребре DC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), $DM : DC = 1 : 15$. Цилиндр касается боковой поверхностью плоскостей SAD и SCD, одно из оснований цилиндра проходит через точку M, второе основание имеет общую точку с ребром SC. Боковая поверхность цилиндра имеет с высотой SH пирамиды общую точку O, причем $SO : SH = 1 : 3$. Найти отношение объемов цилиндра и пирамиды.

11.6.4. [МФТИ] Точка D лежит на ребре BC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина), $BD : DC = 2 : 3$. Цилиндр касается боковой поверхностью плоскостей SAB и SBC, одно из оснований цилиндра проходит через точку D, второе основание имеет общую точку с ребром SC. Боковая поверхность цилиндра имеет единственную общую точку с ребром AC. Найти отношение объемов цилиндра и пирамиды.

11.6.5. [МФТИ] Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого есть ортогональная проекция вершины S на плоскость $ABCD$. Точки E и F выбраны на ребрах BS и BC соответственно так, что $BE = \frac{1}{4}BS$, $BF = \frac{1}{3}BC$. Точки P и Q расположены на прямых AE и SF так, что прямая PQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 3, $PQ = 12$. Найти объем пирамиды.

11.6.6. [МФТИ] Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого есть ортогональная проекция вершины S на плоскость $ABCD$. Точки P и Q выбраны на ребрах DS и AD соответственно так, что $DP = \frac{1}{5}DS$, $DQ = \frac{1}{4}AD$. Точки N и M расположены на прямых CP и SQ так, что прямая NM перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 6, $NM = 8$. Найти объем пирамиды.

11.6.7. [МГУ, мех.-мат.] Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL = 1$, $PQ = 3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP, LP, NQ, MQ, PQ касаются некоторого шара. Найти объем этого шара.

11.6.8. [МГУ, ВМиК] В пирамиде $SABC$ основание H высоты SH лежит на медиане CM основания ABC. Точка O, являющаяся серединой высоты SH, находится на одинаковом расстоянии от точки S, точки E, лежащей на ребре SA, и точки F, лежащей на ребре SB. Известно, что $SH = 8$, $AB = 16\sqrt{2}$, $EF = 8\sqrt{\frac{2}{5}}$, угол SMC не больше $30°$, а расстояние между серединами ребер AB и SC равно $4\sqrt{13}$. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

11.6.9. [МИФИ] Через сторону PQ нижнего основания правильной треугольной призмы $PQRP_1Q_1R_1$ проведена секущая плоскость, пересекающая ребро RR_1 и разбивающая призму на два многогранника. Отношение объема многогранника, одной из граней которого является нижнее основание PQR призмы, к объему отсеченного многогранника, одной из граней которого является грань QQ_1P_1P, равно q. Найти величину угла наклона секущей плоскости к плоскости нижнего основания, если известно, что величина угла между прямыми PQ_1 и RR_1 равна φ.

11.6.10. [МИФИ] Правильная треугольная пирамида $SKLM$ пересечена плоскостью π, параллельной стороне ML основания пирамиды и ребру SK, причем точки S и K удалены от этой плоскости на расстояние, вдвое меньшее (каждая), чем прямая ML. Длина высоты SP боковой грани

MSK равна d, а боковое ребро SL образует с высотой SO пирамиды угол величиной β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью π.

11.6.11. [МФТИ] Даны правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ и конус, центр основания которого лежит на прямой SO (SO — высота пирамиды). Точка E — середина ребра SD, точка F лежит на ребре AD, причем $AF = \frac{3}{2}FD$. Треугольник, являющийся одним из осевых сечений конуса, расположен так, что две его вершины лежат на прямой CD, а третья — на прямой EF. Найти объем конуса, если $AB = 4$, $SO = 3$.

11.6.12. [МФТИ] Сфера, вписанная в треугольную пирамиду $KLMN$, касается одной из граней пирамиды в центре вписанной в эту грань окружности. Найти объем пирамиды, если $MK = \frac{5}{4}$, $\angle NMK = \frac{\pi}{2}$, $\angle KML = 3\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\angle NML = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

11.6.13. [МФТИ] В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A. Высота ромба равна 4, точка пересечения его диагоналей является ортогональной проекцией вершины S на плоскость основания. Сфера радиуса 2 касается плоскостей всех граней пирамиды. Найти объем пирамиды, если расстояние от центра сферы до прямой AC равно $\frac{2\sqrt{2}}{3}AB$.

11.6.14. [МГУ, мех.-мат.] В основании призмы лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$. Боковые ребра AD, BE, CF перпендикулярны основанию. Сфера радиуса $\frac{7}{2}$ касается плоскости ABC и продолжений отрезков AE, BF, CD за точки A, B и C соответственно. Найти длину боковых ребер призмы.

11.6.15. [МГУ, физ. ф-т] В основании пирамиды $TABCD$ лежит трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AD : BC = 2$). Через вершину T пирамиды проведена плоскость, параллельная прямой BC и пересекающая отрезок AB в точке M такой, что $AM : MB = 2$. Площадь получившегося сечения равна S, а расстояние от ребра BC до плоскости сечения равно d. Найти

1) в каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды,
2) объем пирамиды.

11.6.16. [МИФИ] Верхним основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $A_1B_1 = B_1C_1$, а угол между медианой B_1D и стороной A_1B_1 равен φ. Через центр описанной около треугольника ABC окружности и точку пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$ проведена плоскость, параллельная прямой AC. Найти площадь сечения призмы этой плоскостью, если известно, что диагональ B_1C боковой грани BB_1C_1C имеет длину d, а $\angle BB_1A = \alpha$.

11.6.17. [МИФИ] Длина высоты SO правильной четырехугольной пирамиды $SPQR$ равна h, боковое ребро SP наклонено к плоскости основания $PQRT$ под углом γ. Сфера, касающаяся плоскости основания и всех боковых ребер пирамиды, пересекается плоскостью, равноудаленной от всех вершин этой пирамиды. Определить радиус окружности, по которой пересекаются эти сфера и плоскость.

11.6.18. [СПбГТУ] Две касающиеся сферы вписаны в двугранный угол величиной $\frac{\pi}{3}$. Пусть A — точка касания первой сферы с первой гранью, B — точка касания второй сферы со второй гранью. Найти отношение $AK : KL$, если K и L — точки пересечения отрезка AB с первой и второй сферами соответственно.

11.6.19. [СПбГТУ] На плоскость положены два цилиндра, радиусы которых r; цилиндры примыкают друг к другу по образующей. На них положены два других касающихся по образующей цилиндра с радиусами R и осями, перпендикулярными осям первых двух цилиндров. Найти радиус шара, касающегося всех четырех цилиндров.

11.6.20. [МФТИ] Сфера вписана в правильную треугольную пирамиду $SABC$ (S — вершина), а также вписана в прямую треугольную призму $KLMK_1L_1M_1$, у которой $KL = LM = \sqrt{6}$, а боковое ребро KK_1 лежит на прямой AB. Найти радиус сферы, если известно, что прямая SC параллельна плоскости LL_1M_1M.

11.6.21. [МФТИ] Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = CB = 2$, $\angle ACB = 2\arcsin\frac{4}{5}$. Плоскость, перпендикулярная прямой A_1B, пересекает ребра AB и A_1B_1 в точках K и L соответственно, причем $AK = \frac{7}{16}AB$, $LB_1 = \frac{7}{16}A_1B_1$. Найти площадь сечения призмы этой плоскостью.

11.6.22. [МГУ, физ. ф-т] Два шара радиуса r и цилиндр радиуса R ($R > r$) лежат на плоскости. Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Найти радиус шара, меньшего, чем данные, касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

11.6.23. [МГУ, мех.-мат.] Точки P, Q, R и S расположены в пространстве так, что середины отрезков SQ и PR лежат на сфере радиуса a, отрезки PS, PQ, QR и SR делятся сферой на три части в отношении $1 : 2 : 1$ каждый. Найти расстояние от точки P до прямой QR.

11.6.24. [МФТИ] Основание прямой призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ — ромб $KLMN$ с углом $60°$ при вершине K. Точки E и F — середины ребер LL_1 и LM призмы. Ребро SA правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) лежит на прямой LN, вершины D и B — на прямых MM_1 и EF соответственно. Найти отношение объемов призмы и пирамиды, если $SA = 2AB$.

11.6.25. [МФТИ] В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основанием является трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$), $BC = \frac{4}{5}AD$, $\angle ASD = \angle CDS = \frac{\pi}{2}$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований цилиндра, высота которого равна 2, а радиус основания равен $\frac{5}{3}$. Найти объем пирамиды.

11.6.26. [МГУ, ВМиК] Все высоты пирамиды $EFGH$, грани которой являются остроугольными треугольниками, равны между собой. Известно, что $FG = 17$, $HG = 14$, а $\angle EHG = 60°$. Найти длину ребра HF.

11.6.27. [МГУ, мех.-мат.] В пирамиде $SABC$ двугранные углы при ребрах AB, BC и AC равны $90°$, $30°$ и $90°$ соответственно. Плоскость пересекает ребра SB, SC, AC и AB в точках K, L, M и N соответственно, причем четырехугольник $KLMN$ — трапеция, основание KL которой втрое меньше основания MN. Найти площадь этой трапеции, если ее высота равна 13 и $AS = BC = 13$.

11.6.28. [МГУ, ВМиК] В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра 9. Через точки M, N и K, расположенные на ребрах BC, CD и CC_1 соответственно, проведена плоскость. Известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник MCK, равен 1, площадь треугольника MNC равна $\frac{21}{2}$, разность длин отрезков CN и CK равна 3 и объем пирамиды $MNKC$ меньше 15. Найти радиус сферы, касающейся плоскости треугольника MNK и трех граней куба с общей точкой A_1.

11.6.29. [МГУ, ВМиК] В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна 1. Точки K и N являются серединами ребер DC и BC соответственно. Точка M лежит на ребре CC_1 и $MC = \frac{3}{4}$. Найти максимальное значение радиусов сфер, проходящих через точки M, N, K и касающихся плоскости BB_1D_1D.

Варианты письменных работ по математике, предлагавшихся в различных вузах России в 1997–2000 годах

Вариант 1. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (МГУ). Механико-математический факультет, 1999

1. Решите неравенство

$$3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \leqslant 3^{x^2-2} + 27^{2x+3}.$$

2. Решите уравнение

$$|\log_2(2x+7)| = \log_2(1+|x+3|) + \log_2(1-|x+3|).$$

3. При каких значениях φ все положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\varphi\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}+\varphi\right) = \sin\frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

4. *В трапеции* $ABCD$ *с боковыми сторонами* $AB = 9$ *и* $CD = 5$ *биссектриса* угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка K лежит на основании AD.

   а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK — сторону BC?

   б) Найдите отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2+(2a^2+6)x-a^2+2a-3}{x^2+(a^2+7a-7)x-a^2+2a-3} < 0,$$

не меньше 1.

6. Три шара радиусов 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найдите расстояние между двумя точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

Вариант 2. МГУ, Факультет вычислительной математики и кибернетики, 1999

1. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Сравните $\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha - 1}\right)$ и $\dfrac{19\pi}{24}$.

2. На координатной плоскости (x, y) проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = 4 - \left(2 - \sqrt{3}\right)x$, пересекает ее в точках A и B. Найдите сумму длин отрезка AB и меньшей дуги AB.

3. Решите неравенство $\left|\log_{x+1}\sqrt{(x-2)^4} + 2\right| \geqslant -3 + \log_{\frac{1}{x+1}}\sqrt{(x-2)^6}$.

4. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ высоты боковых граней, опущенные из вершины пирамиды S, равны $\sqrt{2}$. Известно, что $AB = 2$, $BC = 6$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$. Найдите высоту пирамиды, если ее основание находится внутри четырехугольника $ABCD$.

5. Решите уравнение
$$\operatorname{tg}14x + 3\operatorname{ctg}14x + \sin 6x - 2\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}+1}.$$

6. В остроугольном треугольнике ABC угол $\angle ACB = 75°$, а высота, опущенная из вершины этого угла, равна 1. Найдите радиус описанной окружности, если известно, что периметр треугольника ABC равен $4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Вариант 3. МГУ, Физический факультет, 1999

1. Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + 2\sin^2 x = 1$.

2. Решите неравенство $\left|2 - \dfrac{1}{x-4}\right| < 3$.

3. В равнобочную трапецию $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ вписана окружность, $BC : AD = 1 : 3$, площадь трапеции равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите AB.

4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}} + 2\cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5\cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{4}{x-2}+1}=\frac{1}{x-2}.$$

6. Через точку N проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности с центром O. На одной из этих прямых взята точка A, а на другой прямой взята точка B так, что $OA = OB$, $OA > ON$, $NA \neq NB$. Известно, что $NA = a$, $NB = b$, $OA = c$. Найдите ON.

7. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S боковое ребро SA равно b. Сфера радиуса $\frac{b}{2}$ касается плоскости SAC в точке C и проходит через точку B. Найдите $\angle ASC$.

8. Для любого допустимого значения a решите неравенство

$$\log_{2a}\left(\log_3 x^2\right) > 1$$

и найдите, при каком значении a множество точек x, не являющихся решением неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6.

Вариант 4. МГУ, Химический факультет и Высший колледж наук о материалах, 1999

1. Решите неравенство $\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} \leqslant 2.$

2. Решите уравнение $(\sin x + \cos x - \sqrt{2})\sqrt{-11x - x^2 - 30} = 0.$

3. Решите неравенство

$$\left(\log_{3-x}(2x+1)\right)\left(\log_{2x+1} x^2\right) \leqslant \left(\log_{3-x}(3x+1)\right)\left(\log_{3x+1}(x+2)\right).$$

4. В треугольнике ABC угол $\angle B$ равен $\frac{\pi}{6}$. Через точки A и B проведена окружность радиуса 2, касающаяся прямой AC в точке A. Через точки B и C проведена окружность радиуса 3, касающаяся прямой AC в точке C. Найдите длину стороны AC.

5. В сферу радиуса $\sqrt{3}$ вписан параллелепипед, объем которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right| = a^2+1$$

имеет нечетное число решений.

7. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ определяется следующим правилом:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2, & \text{если число } n \text{ нечетное,} \\ 2a_n, & \text{если число } n \text{ четное,} \end{cases}$$

т. е. $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 6$, $a_5 = 12$, $a_6 = 14$ и т. д. Найдите a_{1999}.

Вариант 5. МГУ, Биологический факультет и Факультет фундаментальной медицины, 1999

1. Решите уравнение
$$8\cos 6x - 12\sin 3x = 3.$$

2. Решите неравенство
$$\frac{3}{|x-1|} \geqslant 2x + 5.$$

3. Решите уравнение
$$\log_{8-7x}\left(x^3 - 3x^2 - \frac{37}{8}x + \frac{55}{8}\right) + 2\log_{(8-7x)^2}(x+3) = 1.$$

4. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка AD, если $BC = 2$, $GO = 7$, а $GF = 18$.

5. Найдите все значения y, удовлетворяющие условию $y > \frac{1}{2}$, такие, что неравенство
$$16y^3 + 6y^3x - 4y^3x^2 - 50y^2 - 11y^2x + 10y^2x^2 + \\ + 52y + 4yx - 8yx^2 - 18 + x + 2x^2 > 0$$
выполняется при всех x из интервала $1 < x < 2y$.

6. Два велосипедиста стартуют одновременно из двух точек круговой велотрассы — первый из точки A, второй из точки B — и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из их первых 15 встреч на трассе после старта только третья и пятнадцатая состоялись в точке B. Найдите отношение скорости первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что к моменту их пятой встречи каждый из велосипедистов проехал не менее одного круга.

Вариант 6. МГУ, Факультет почвоведения, 1999

1. Решите уравнение $4^x - 2^x = 56$.

2. Решите уравнение $\cos 2x = \sin x$.

3. Решите уравнение $\log_\pi |x^2 - 1| = \log_{\sqrt{\pi}} |x|$.

4. Решите неравенство $\sqrt[5]{y^5} \geqslant \sqrt[4]{y^4}$.

5. Какое количество воды надо добавить в один литр 10%-го водного раствора спирта, чтобы получить 6%-й раствор?

6. Дан треугольник ABC с основанием AB, равным $\sqrt{3}/2$, и высотой CH, опущенной на это основание и равной $\sqrt{6}/3$. Известно, что точка H лежит на AB и $AH : HB = 2 : 1$. В угол ABC треугольника ABC вписана окружность, центр которой лежит на высоте CH. Найдите радиус этой окружности.

7. Для каждого значения параметра $b \leqslant 0$ решите неравенство (относительно x)
$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \geqslant b.$$

Вариант 7. МГУ, Геологический факультет, 1999

1. Найдите область определения функции
$$y = \left(\log_{\frac{1}{2}}(x+3)\right) \cdot \sqrt{\frac{25}{(x+2)^2} - 1}.$$

2. Известно, что x_1, x_2 — корни уравнения
$$2x^2 - (\sqrt{3} + 5)x - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 0.$$
Найдите значение $A = x_1 + x_1 x_2 + x_2$ и выясните, какое из чисел больше: A или 1,999?

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости (x, y) системой неравенств
$$\begin{cases} x(x + y - \sqrt{2}) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 2. \end{cases}$$

4. Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Угол между AM и высотой AH равен $40°$. Найдите углы треугольника ABC.

5. Решите уравнение
$$\left|\operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3\right| = \left|\operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3\right|.$$

6. Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots$, в которой $a_3 = -13$ и $a_7 = 3$. Определите, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наименьшей; найдите значение этой суммы.

7. Сфера радиуса $\sqrt{41}$ проходит через вершины B, C, C_1 и через середину ребра A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$). Найдите площадь поверхности этого куба.

8. Решите неравенство
$$\log_{84-2x-2x^2} \cos x \leqslant \log_{x+19} \cos x.$$

Вариант 8. МГУ, Географический факультет, 1999

1. Решите уравнение $\log_{4x-8}\left(x^2 - 2x - 3\right) = 1$.

2. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - 8x + 5} = x - 2$.

3. По реке из пункта A в пункт B выплыл катер. Одновременно из пункта B в пункт A выплыла моторная лодка. Пройдя четверть пути от B к A, лодка встретилась с катером. Катер, достигнув пункта B, повернул обратно и прибыл в пункт A одновременно с лодкой. Во сколько раз скорость катера больше скорости лодки?

4. Найдите все значения параметра a, при которых среди корней уравнения
$$\sin 2x + 6a\cos x - \sin x - 3a = 0$$
найдутся два корня, разница между которыми равна $\frac{3}{2}\pi$.

5. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Точки L и M являются, соответственно, серединами сторон BC и AD. Отрезок LM содержит точку K. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность. Найдите радиус этой окружности, если $AB = 3$, $AC = \sqrt{13}$, $LK : KM = \frac{1}{3}$.

6. В пространстве заданы три луча DA, DB и DC, имеющие общее начало D, так что $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90°$. Сфера пересекает луч DA в точках A_1 и A_2, луч DB — в точках B_1 и B_2, а луч DC — в точках C_1 и C_2. Найдите площадь треугольника $A_2B_2C_2$, если площади треугольников DA_1B_1, DA_1C_1, DB_1C_1 и DA_2B_2 соответственно равны $\frac{15}{2}$, 10, 6 и 40.

Вариант 9. МГУ, Социологический факультет, 1999

1. Решите уравнение $\sqrt{y-1} = 6 - y$.

2. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма первых пяти членов с нечетными номерами на единицу больше суммы первых пяти членов с четными номерами и равна квадрату первого члена.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. При этом оказалось, что $\angle BAC = \angle BDC$, а площадь круга, описанного около треугольника BDC, равна $\frac{25\pi}{4}$.

   1) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

   2) Зная, что $BC = 3$, $AC = 4$, $\angle BAD = 90°$, найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

4. Кандидат в депутаты за время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает количество голосов на 40% и стоит 32 тысячи рублей; каждое выступление по телевидению — на 80% и стоит 47 тысяч рублей. Определите количество и последовательность выступлений в этих средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное число голосов, если на всю кампанию можно израсходовать не более 112 тысяч рублей.

5. Решите неравенство $\dfrac{4|2-x|}{4-|x|} - |x-2| \leqslant 0$.

6. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)} \geqslant \left|\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)}\right|$$

не имеет решений на отрезке $[-5; 6]$?

Вариант 10. МГУ, Экономический факультет, отделение экономики, 1999

1. Решите неравенство $\log_{|x|-2}|x-3| \leqslant 0$.

2. Решите неравенство

$$4\sqrt{\frac{2^x-1}{2^x}}+\sqrt{14} \leqslant 14\sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x-1}}.$$

3. Первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить задание не более чем за 9 дней. Вторая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание не менее чем за 18 дней. Первая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание ровно за 12 дней. Известно, что третья бригада всегда работает с максимально возможной для нее производительностью труда. За сколько дней может выполнить задание одна вторая бригада?

4. В трапеции $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ диагонали $AC = a$, $BD = \frac{7}{5}a$. Найдите площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.

5. Решите уравнение

$$x+\frac{1}{6}\arccos(\cos 15x + 2\cos 4x \sin 2x) = \frac{\pi}{12}.$$

6. В треугольной пирамиде $SABC$ угол $\angle ACB = \alpha$, ребро $SC = d$ является диаметром сферы, пересекающей ребра SA и SB в их серединах. Найдите объем пирамиды, если $\angle SAC = \angle SBC = \beta$, причем $\beta < \frac{\pi}{4}$.

7. Найдите все значения b, при каждом из которых система

$$\begin{cases} b\sin|2z| + \log_5\left(x\sqrt[8]{2-5x^8}\right) + b^2 = 0, \\ \left((y^2-1)\cos^2 z - y\cdot\sin 2z + 1\right)\cdot\left(1+\sqrt{\pi+2z}+\sqrt{\pi-2z}\right) = 0. \end{cases}$$

разрешима и имеет не более двух решений; определите эти решения.

Вариант 11. МГУ, Факультет психологии, 1999

1. Решите неравенство $\dfrac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1$.

2. Решите уравнение $x^{\log_7 4} + 5\cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0$.

3. Решите систему

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ \cos x \sin y = \dfrac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \geqslant 0. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \dfrac{3x+p}{x^2+5x+7}$ содержит полуинтервал $(-1;3]$. Определите при каждом таком p множество значений функции $f(x)$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Длины противоположных сторон AB и CD равны соответственно 9 и 4, $AC = 7$, $BD = 8$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно пять различных наборов натуральных чисел (x, y, z) удовлетворяют системе условий

$$\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ a \cdot yz + a \cdot xz + a \cdot xy > xyz. \end{cases}$$

Вариант 12. МГУ, Филологический факультет, отделение структурной и прикладной лингвистики, 1999

1. Расстояние в 160 км между пунктами A и B автомобиль проехал со средней скоростью 40 км/ч. Часть пути по ровной дороге он ехал со скоростью 80 км/ч, а другую часть, по бездорожью, — со скоростью 20 км/ч. Какую часть пути между A и B занимает ровная дорога?

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{x^2+8x-9} \geqslant \frac{1}{3x^2-5x+2}.$$

3. В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника $KCDL$ равна 5.

4. Решите уравнение

$$\log_{(1-2\cos z)}(\cos 2z + \sin z + 2) = 0.$$

5. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \cos^3(z+4y+\pi/4)+\dfrac{1}{\sin(2z+2y-\pi/4)}=0, \\ \cos(3z+\pi/4)+\dfrac{1}{\sin^3(4z-2y-\pi/4)}=0. \end{cases}$$

Вариант 13. МГУ, Институт стран Азии и Африки, 1999

1. Решите уравнение

$$\lg^2(2x-3)^2+4^{(3\log_4\sqrt[3]{2})}\left(\frac{\log_4(3-2x)}{\log_4 10}\right)=0.$$

2. Упростив выражение

$$A=1-y+\frac{\sqrt[3]{(y-3)\sqrt{xy}+(3-y^{-1})\sqrt{xy^{-1}}}}{\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{y^{-2}}}\cdot y^{\frac{5}{6}}x^{-\frac{1}{6}},$$

где $x>0$, $y>0$ — действительные числа, выясните, что больше: A или $\frac{5}{7}$.

3. Решите уравнение

$$\sin 9x = 6\sin 5x\cos 2x - \sin x.$$

4. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом $\frac{\pi}{8}$. Каждое боковое ребро равно $\sqrt{6}$ и наклонено к плоскости основания под углом $\frac{5\pi}{13}$. Определите объем пирамиды.

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-5}-3}{|x+4|-7}\geqslant 1.$$

6. Окружности радиусов 2 и 6 с центрами, соответственно, в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная; эти касательные пересекаются в точке D. Найдите радиус вписанной в треугольник O_1O_2D окружности.

7. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2-\log_2(y\sqrt{2}+6)^3-16\geqslant y^4-3x-y^2, \\ x^2-y^2\leqslant\log_2(y\sqrt{2}+6)+x+1. \end{cases}$$

Вариант 14. Московский физико-технический институт, 1997

1. Найдите все действительные корни уравнения

$$|2\sqrt{x}+1-x|+|x-2\sqrt{x}+2|=7.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 6\sin x\cos y+2\cos x\sin y=-3, \\ 5\sin x\cos y-3\cos x\sin y=1. \end{cases}$$

3. Около окружности описаны ромб со стороной 3 и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 7. Найдите радиус окружности.

4. Пусть M — множество точек плоскости с координатами $(x; y)$ таких, что числа $3x$, $2y$ и $9-y$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Найдите площадь фигуры M. Фигура Φ состоит из точек множества M таких, что неравенство $t^2+2t(x-2)+7-y>0$ выполняется при всех значениях параметра t. Найдите площадь фигуры Φ.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AC и BD взаимно перпендикулярны, $AB=BD=AD=a$, середина ребра AC равноудалена от плоскостей ABD и BCD, угол между ребром AC и гранью CBD равен $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите длину ребра CD, $\angle CAD$ и угол между ребром BD и гранью ACD.

Вариант 15. Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 1997

1. Двое рабочих должны были изготовить по 27 деталей. Второй рабочий начал работать на 27 мин позднее первого, по две трети задания они выполнили к одному времени, и, чтобы закончить работу вместе с первым рабочим, второй сделал за него 1 деталь. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

2. Укажите все значения x, при которых функция $y=3-2\sin x-\cos 2x$ принимает наименьшее и наибольшее значения. Найдите эти значения.

3. Решите уравнение

$$3\cdot 9^{\sqrt{x}}-28\cdot 3^{\sqrt{x}}+9=0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_x(5x^2 - 6x + 2) > 2.$$

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси x, а две другие — на графике функции $y = (x-1)(7-x)$, $y \geqslant 0$?

6. Укажите все значения p, при которых уравнение

$$8 + 4p(x-2) = (x - |x|)x$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом p.

7. В правильной треугольной пирамиде $TABC$ расстояние между медианой AM боковой грани ABT и высотой пирамиды TK равно l, а угол между ними равен 60°. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

Вариант 16. Московский энергетический институт, 1997

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1} - \frac{3}{a+1} + \frac{\sqrt[3]{a} - 1}{\sqrt[3]{a^2} - 1}\right)^{-1} \left(a^{-\frac{1}{3}} + 1\right)^2 - a^{\log_2 \sqrt[3]{0{,}25}}.$$

2. Найти область определения функции

$$f(x) = \lg\left[(1{,}25)^{1-x^2} - (0{,}4096)^{1+x}\right].$$

3. Разность двух чисел равна 8. Каковы должны быть эти числа, чтобы произведение куба первого числа на второе было наименьшим?

4. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) = 1 - 0{,}5\sin 2x$$

и лежащие в интервале $(-2\pi; \pi)$.

5. Боковая грань правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол α, сумма длин высоты пирамиды и радиуса окружности, вписанной в основание пирамиды, равна a. Найти объем пирамиды.

Вариант 17. Московский государственный авиационный институт, 1997

1. Решить уравнение

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{6}-\cos x\cos\frac{7\pi}{6}=0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+x+y=3, \\ \dfrac{y}{x}-x=0. \end{cases}$$

3. Площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды равна S, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен α. Найти сторону основания.

4. Решить неравенство $\dfrac{6}{|x-2|}\leqslant\dfrac{x-12}{x^2-4}+\dfrac{|x|}{x+2}$.

5. Найти все значения a, при которых среди решений неравенства

$$\left((x-a)^2+y^2-4\right)\left(x^2+(y-a)^2-4\right)\leqslant 0$$

есть хотя бы одна пара $(x;y)$, удовлетворяющая уравнению $|x|+|y|=1$.

6. Все стороны четырехугольника $ABCD$ различны по длине. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M, а N — середина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD. Какие значения может принимать отношение $DM:DN$?

Вариант 18. Московский Государственный университет инженерной экологии (МГУИЭ), 1997

Алгебра и начала анализа[1]

1. Решить неравенство и указать наименьшее число, удовлетворяющее ему

$$\frac{x^2+12}{x^2-2x-8}\geqslant 1.$$

2. Решить уравнение

$$3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^x+5^{x-1}+5^{x-2}.$$

[1] В этом вузе ДВА письменных экзамена по математике!

3. Решить неравенство и указать длину промежутка, на котором оно верно
$$x^2 - |5x - 9| \leqslant 5x.$$

4. Найти длину промежутка, на котором определена функция
$$y = \sqrt[4]{9 - 3^{x^2 - x}} \cdot \log_6 x.$$

5. Решить уравнение и указать, сколько корней оно имеет
$$\sqrt{x+4} - x = \sqrt{4 - x}.$$

6. При каком целом значении параметра k отношение корней уравнения $x^2 + (2k - 5)x - 9k = 0$ равно 2?

7. Найти число A, если его 42% равны произведению 20% числа $B = 40$ и 30% числа $C = 70$.

8. Найти значение производной функции при $x = 0$
$$y = \frac{x^2 + 4}{e^x}.$$

9. Решить неравенство и указать середину промежутка, на котором оно верно
$$\left|\log_2 \frac{x+3}{6}\right|^{x^2 - 3x} \leqslant 1.$$

10. Число 130 представить в виде суммы трех положительных чисел $x + y + z = 130$ так, чтобы $z = 3y$ и сумма $S = x^2 + y^2 + z^2$ была наименьшей. В ответе указать число x.

Вариант 19. МГУИЭ, 1997

Геометрия и тригонометрия

1. Вычислить
$$\cos \frac{9\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}.$$

2. Решить уравнение и указать значение x, удовлетворяющее условию $90^\circ < x < 180^\circ$
$$2 \cos 2x = \sin^2 2x (1 + \operatorname{tg}^2 x).$$

3. Даны три точки $A(2; -3; 5)$, $B(1; 0; 8)$ и $C(-2; 4; 1)$. Найти точку D и указать сумму ее координат, если $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$.

4. Даны вершины треугольника $A(4;5;0)$, $B(3;3;-2)$, $C(2;2;6)$. Найти точку пересечения стороны BC с биссектрисой угла A и указать сумму ее координат.

5. В равнобедренном треугольнике основание равно 24 см, а боковая сторона равна 20 см. Найти длину высоты (в см), опущенной на боковую сторону.

6. В прямоугольной трапеции меньшее основание равно $\sqrt{2}$ см, наклонная боковая сторона равна 4 см, а острый угол при основании равен $45°$. Найти площадь трапеции (в см^2).

7. Точка P удалена от центра окружности радиуса 11 см на 7 см. Через точку P проведена хорда длиной 18 см. Найти длину отрезков, на которые хорда делится точкой P, и указать длину большего из них (в см).

8. В правильной шестиугольной пирамиде проведено сечение через диагональ основания и параллельную ей среднюю линию боковой грани. Найти площадь сечения, если сторона основания равна 2 см, а объем пирамиды равен $6\sqrt{2}$ см^3. Ответ дать в см^2.

9. Сумма длин всех боковых ребер и сторон обоих оснований правильной шестиугольной призмы равна 36 см. Найти длину стороны основания призмы, при которой объем призмы будет наибольшим.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке $x \in [0;\pi]$. В ответе указать наименьшее значение.

$$f(x) = \cos^2\frac{x}{2}\cdot\sin x.$$

Вариант 20. Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова, 1997

1. Найти значение выражения $4\cdot(1-\log_3 18)\cdot(\log_6 54-1)$.

2. Решить уравнение $6^{x+1}-3^{x+1}+2^{x+1}-1=0$.

3. Найти меньший корень уравнения $\left(\dfrac{3}{x}+4\right)^2+\left(\dfrac{3}{x}+4\right)=2$.

4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{2x+4}\leqslant 0,\\ x^2+5x+4\leqslant 0.\end{cases}$$

В ответе указать наибольшее решение.

5. Найти корни уравнения $\cos^2 x = \sqrt{2}\sin 2x - \sin^2 x$, принадлежащие отрезку $[\pi, 2\pi]$. В ответе указать их количество.

6. Найти все значения c, для которых корень уравнения

$$c^2 - cx + 1 = c - x$$

меньше или равен 3. В ответе указать наибольшее значение c.

7. В каких точках касательная к графику функции $y = \dfrac{4-x}{x+3}$ параллельна прямой $x + 7y - 7 = 0$? В ответе указать большее значение x.

8. Двое рабочих изготовили вместе 74 детали. Первый изготавливал в день на 2 детали больше второго и работал 7 дней, а второй — 8 дней. Сколько деталей изготовил второй рабочий?

9. Диагональ AC ромба $ABCD$ равна его стороне. Точка K делит сторону BC так, что $BK : KC = 2 : 1$. Найти площадь четырехугольника $ABKD$, если сторона ромба равна $6\sqrt[4]{3}$.

10. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если диагональ ее основания равна 8, а боковое ребро равно 5.

Вариант 21. Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ), 1997

1. Решить уравнение $\sqrt{2 - |3 - x|} = 2x - 7$.

2. Решить неравенство $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x+1}{x-3} \geqslant 1$.

3. Доказать тождество $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + 2xy = \dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy} + x^2 + y^2 = \dfrac{21}{4} \end{cases}$$

(ограничиться отысканием целочисленных решений).

5. При каких a уравнение имеет единственное решение

$$2^{4x} + a\cdot 2^{3x} - 5\cdot 2^{2x} + a\cdot 2^x + 1 = 0\,?$$

Найти это решение.

6. Найти расстояние между прямыми, заданными уравнениями $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 4$.

7. При каких положительных x числа $\operatorname{arcctg}(3 + \cos x)$ и $\operatorname{arctg}(4 - \cos x)$ являются величинами двух углов некоторого прямоугольного треугольника?

8. Решить уравнение $\big|x - |4 - x|\big| - 2x = 4$.

9. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того, как первый проработал 2 ч, а второй 5 ч, оказалось, что они выполнили половину всей работы. Проработав совместно еще 3 часа они установили, что им осталось выполнить 0,05 всей работы. За какой промежуток времени каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

10. Решить неравенство $|x - y| < 2$ и дать геометрическую иллюстрацию.

Вариант 22. МТУСИ, 2000

1. Решить уравнение $\sqrt{x-2} = x - 4$.

2. Вычислить (без калькулятора)

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 + \log_6 3.$$

3. Решить уравнение $|3x - 5| = |5 - 2x|$.

4. Решить неравенство

$$\frac{2x^2 - 6x + 17}{x^2 + 2x + 2} < 1.$$

5. Построить график функции $y = |\sin 2x|$.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - 3y}, \\ y^2 \cdot 2^{-x} + 2^{2y+2} = 2^{2-x} + y^2 \cdot 4^y. \end{cases}$$

7. Решить неравенство $\log_{4x+1}(28x + 1) \leqslant 3$.

8. Выяснить, какое из выражений $\arcsin 0{,}7$ и $\arccos 0{,}7$ больше. Ответ обосновать.

9. Решить в целых числах уравнение

$$xy - 2y + 3x - 7 = 0.$$

10. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды.

Вариант 23. Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского (МАТИ), 1999

1. Решите уравнение $|2x-3| = 5x-4$.

2. Найдите интервалы монотонности функции
$$y = \frac{4x^2+11x-16}{x+4}.$$

3. Решите неравенство $\log_{x-4} 5 \geqslant \log_{x+8} 25$.

4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ \cos x \sin y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

5. Имеются три слитка. Первый слиток имеет массу 2 кг, второй 4 кг, и каждый из этих двух слитков содержит 60% никеля. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 45% никеля, а если второй сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 48% никеля. Найдите массу третьего слитка и процент содержания никеля в нем.

6. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как $8:1$. В трапецию вписана окружность, которая касается боковой стороны CD в точке K, причем $CK:KD = 5:4$. Найдите отношение длин боковых сторон AB и CD.

Вариант 24. МАТИ, 1999

1. Решите уравнение $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$.

2. Найдите точки экстремума функции
$$y = \frac{3x-1}{x^2+x}.$$

3. Решите неравенство $\log_{x-3} 81 \cdot \log_3(x-1) \leqslant 8$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{12}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 y} = 12, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

5. Рабочий должен был по плану изготовить за несколько дней 168 деталей. Первые четыре дня он выполнял установленную планом норму, а затем каждый день изготовлял на 8 деталей больше плана, поэтому за два дня до срока было изготовлено 188 деталей. Сколько деталей в день он должен был изготовлять по плану?

6. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка E, а на стороне BC — точка K так, что отрезок EK параллелен стороне AC и касается вписанной в треугольник окружности. Биссектриса BD пересекает отрезок EK в точке M, а биссектриса AL, пересекает продолжение отрезка EK за точку K в точке N. Найдите отношение $EM : MN$, если известно, что периметр треугольника ABC равен 14, а сторона AC — 6.

Вариант 25. Московский государственный университет природообустройства (МГУП), 1997

1. Решить уравнение $\cos^2(3x-2) = \sin(3x+2)\cos(3x-2)$.

2. Решить неравенство $(2x-15)\sqrt{\dfrac{6-x}{x-8}} \geqslant 0$.

3. Решить уравнение $4^{4(x+1)} = \sqrt[5]{16^{x+100}}$.

4. В тупоугольном треугольнике большая сторона равна 18, а меньшая — 6. Может ли площадь треугольника равняться 51?

5. Найти все значения y, при которых любой действительное число является решением неравенства

$$|3x-7| - \frac{6y+5}{3-3y} \geqslant 1.$$

Вариант 26. МГУП, 1997

1. Решить уравнение $\cos\pi(x-8{,}5) = 2\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}(x-14)$.

2. Решить неравенство $\dfrac{5}{x-1} \leqslant 5 - \dfrac{30}{x+1}$.

3. Решить уравнение $\left(\sqrt[3]{2\sqrt{6}}\right)^{|2x-3|} = \sqrt[6]{\left(2\sqrt[3]{3}\right)^{9-6x}}$.

4. В треугольнике ABC, точка M делит сторону AC в отношении $AM : MC = 3 : 8$, а точка K делит сторону BC в отношении $CK : KB = 2 : 1$. Пусть O — точка пересечения отрезков BM и AK. Найти отношение $MO : OB$.

5. Найти все значения y, при которых неравенство не имеет решения

$$\sqrt{y^2 - 5y + 4} \cdot 16^{x^2+3x+2} \leqslant \frac{y-3}{2}.$$

Вариант 27. Московский институт стали и сплавов, 1997

1. Упростить и вычислить при $a = 100$

$$\left(\frac{a+2}{a^3-8} + \frac{1}{4-a^2}\right) : \frac{a+2}{8a-a^4} - \frac{8(a+1)}{(a+2)^2} + \frac{1}{a}.$$

2. Решить уравнение $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$. В ответе записать корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

3. Решить неравенство $\dfrac{3}{x-2} \geqslant 1$. В ответе записать количество целых решений этого неравенства.

4. Бригаде штукатуров нужно обработать 560 м^2 стен, но в действительности на работу вышло на 2 человека меньше. Сколько штукатуров было в бригаде, если известно, что каждому работавшему пришлось обрабатывать на 14 м^2 больше, чем предполагалось.

5. Решить уравнение $\log_7(6 + 7^{-x}) = 1 - x$. В ответе записать корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

6. Решить неравенство $(0{,}2)^{\frac{x+3}{4-x}} \leqslant 0{,}04$. В ответе запишите наибольшее целое решение этого неравенства.

7. Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = x + \dfrac{8}{x^2}$ на отрезке $[-2; -1]$.

8. При каком наименьшем значении k график функции

$$y = (k-1)x^2 + 2kx + 3k - 2$$

касается оси абсцисс?

9. Упростить выражение $\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x \cdot \cos^2 x$.

10. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi - x) = 1$. В ответе записать сумму корней уравнения (в градусах), удовлетворяющих условию $180^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$.

11. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 и 15, длина общей хорды равна 24. Определить расстояние между их центрами (центр каждой окружности лежит вне другой окружности).

12. Основанием четырехугольной пирамиды является ромб с длиной стороны 6 и острым углом 60°. Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей ромба. Найти объем пирамиды, если ребро, проведенное к тупому углу ромба, образует с плоскостью основания угол 60°.

Вариант 28. Государственная академия сферы быта и услуг, 1997

1. В пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом α. В основании пирамиды прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом β. Найти расстояние от основания высоты пирамиды до боковых граней.

2. Упростить

$$\frac{3(ab)^{\frac{1}{2}} - 3b}{a-b} + \frac{(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^3 + 2a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{a \cdot a^{\frac{1}{2}} + b \cdot b^{\frac{1}{2}}}.$$

3. Решить уравнение $(\cos x + \sin x)^2 + 1 = 2\sin^2 x \operatorname{ctg}^2 x$.

4. Решить уравнение $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1)$.

Вариант 29. Московский государственный технический университет гражданской авиации (МГТУГА), 1997

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$$

на отрезке $[1, 4]$. Сделать рисунок.

2. Решить неравенство $\log_{x+3}(x^2 + 3x + 3) < 1$.

3. Решить уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos 2x + \cos x + 1$.

4. Сумма трех последовательных членов геометрической прогрессии равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3. Найти эти члены прогрессии.

5. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 6 см, а медиана боковой стороны 5 см. Найти длину основания.

Вариант 30. МГТУГА, 1997

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = (x+1)^2(x-3)$ на отрезке $[-2, 3]$. Сделать чертеж.

2. Решить неравенство $\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$.

3. Решить уравнение $\sin^2 x + 21\cos^2 x = 5\sin 2x$.

4. В геометрической прогрессии, состоящей из семи членов, сумма первых 3-х членов равна 0,875, а последних 3-х членов равна 14. Найти эту прогрессию.

5. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 6 см. Угол A — $70°$, угол B — $30°$. Найти длину биссектрисы угла C.

Вариант 31. Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), 1999

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1, точка K делит ребро B_1C_1 на две равные части. Найти угол между отрезками AK и AC_1.

2. Решить уравнение: $6\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 2$.

3. Решить неравенство: $\sqrt{1+x} \leqslant 2x$.

4. Решить уравнение: $\dfrac{x^5 + 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 + 1} = 2x^2 - 15$.

5. Решить уравнение: $\log_{\sqrt{5}} \dfrac{\sqrt{10-x}}{5} - \log_{\frac{1}{5}} x = 0$.

6. Автомобиль проехал первую половину пути со скоростью 40 км/ч, а вторую — 60 км/ч. Найти среднюю скорость движения автомобиля в пути.

7. Сумма первых n слагаемых некоторой последовательности вычисляется по формуле
$$S_n = 2n^2 + n + 1.$$
Найти двадцатый член последовательности.

Вариант 32. МИИТ, 1999

1. Решить уравнение: $\dfrac{x^3-8}{2x-4}=12x-18$.

2. Решить уравнение: $\sin x+\sin 2x=\cos x+2\cos^2 x$.

3. Решить неравенство: $\sqrt{14-x}>2-x$.

4. Решить уравнение: $\log_{x-2}(2x^2-13x+18)=1$.

5. Найти значения p, при которых отношение корней уравнения
$$2x^2+(p-10)x+6=0$$
равно 12.

6. Поезд должен был пройти 840 км. В середине пути он был задержан на 30 мин., и поэтому, чтобы прибыть вовремя, он должен был увеличить скорость на 2 км/ч. Определить первоначальную скорость поезда.

7. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B проведены медиана BE и высота BK. Величина угла BCA равна $60°$. Найти величину угла KBE.

Вариант 33. МИИТ, 1999

1. Решить уравнение: $\left|2x+\log_{\frac{1}{2}} 2^3\right|=5$.

2. Решить уравнение: $2^{2x}-2^{3-2x}-2=0$.

3. Вычислить: $2\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)+\sin^2 2\alpha$.

4. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Найти объем пирамиды, если плоский угол при вершине равен 2α.

5. Трехзначное число больше 500, но меньше 600. Найти это число, если оно в 64 раза больше суммы своих цифр.

6. Решить систему:
$$\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2+xy=7. \end{cases}$$

7. В круг радиуса R вписан треугольник, углы которого равны A и B. Найти длину его медианы, проведенной из вершины C.

Вариант 34. МИИТ, 1999

1. Сколько корней имеет уравнение $|\cos\pi x| = \frac{x^2}{36}$?

2. Целая часть площади треугольника равна 2. Могут ли длины всех сторон этого треугольника быть меньше 2?

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ \lg y + \lg(x+y) = 1. \end{cases}$$

4. Три пункта A, B и C соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной $\frac{1}{2}|AB|$; к отрезку BC примыкает квадратное поле со стороной, равной $|BC|$; а к отрезку дороги AC примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной $|AC|$, и шириной, равной 4 км. Площадь леса на 20 км^2 больше суммы площадей квадратных полей. Найти площадь леса.

5. Решить неравенство: $\dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{(x+1)\sqrt{x}} \leqslant 0.$

6. Решить уравнение: $|x-1| + 2|x+1| + |x-4| = 3.$

7. Существует ли такая арифметическая прогрессия, у которой сумма любого числа ее n первых членов равна кубу числа членов.

Вариант 35. Московская государственная текстильная академия, 1997

1. Вычислить значение $x - y$, если

$$\begin{cases} 19x - 14y = -3, \\ 17x - 18y = -41. \end{cases}$$

2. Найти (в градусах) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если даны координаты точек: $A(-3,1,5)$; $B(0,7,8)$; $C(2,11,10)$.

3. Указать точку максимума функции $f(x) = 8x - \dfrac{4}{x^2}$.

4. Найти модуль разности между наибольшим и наименьшим корнями уравнения

$$(\lg x^3)^2 - 9\lg x = 18.$$

5. Найти минимальное значение x, удовлетворяющее уравнению

$$2^{3-x} + 2^x = 9.$$

6. Вычислить значение $\sqrt{2}\,\mathrm{tg}(\alpha - \pi)$, если

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{3}; \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi.$$

7. Найти наибольшее целое число x, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{7x-10}{2x-7} \leqslant 2.$$

8. Указать (в градусах) наименьший положительный корень уравнения

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

9. Какое трехзначное число равно кубу цифр его единиц, а также квадрату числа, составленного из его второй и первой цифр?

10. Высота цилиндра равна 18, а диагональ осевого сечения — 30. Найти отношение площади основания цилиндра к площади его полной поверхности.

Вариант 36. Московский государственный институт электроники и математики, 1997

1. Решите уравнение

$$\frac{2a-x}{x+a-3} + \frac{3x-2a}{x-a+1} = 4.$$

2. Решите уравнение $2\log_4 x + 5\log_x 4 = 11$.

3. Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = -2\sqrt{2}.$$

4. В основании пирамиды лежит равнобочная трапеция, у которой основания равны 6 и 8, а боковые стороны равны $\sqrt{2}$. Каждое из боковых ребер пирамиды равно 13. Найдите объем пирамиды.

5. При $a = 5$ решите уравнение $2\sin x \cos 2x + 7\sin x = a$ и определите все значения a, при которых это уравнение имеет решение.

Вариант 37. Государственная академия нефти и газа им. И. М. Губкина, 1997

1. Вычислить при $a = \sqrt{2} - 4$

$$\frac{2\sqrt{2} - 6a + 3\sqrt{2}a^2 - a^3}{(\sqrt{2} - a)^2}.$$

2. Найти наименьшее целое значение x, входящее в область определения функции

$$y = \log_4 \frac{13 - 2x}{3x + 16}.$$

3. Найти девятнадцатый член арифметической прогрессии, если известно, что ее девятый член равен (-24), а разность прогрессии равна (-3).

4. Решить уравнение $|x + 17| = |x + 5|$.

5. Решить уравнение $\sqrt{27^{2x+6}} = \sqrt[3]{9^{4x+3}}$.

6. Дано: $\lg 2 = 0{,}301$. Найти $\lg 800$.

7. Найти наименьшее значение функции $y = 6\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \sin 6x\right)$.

8. Найти (в градусах) наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\operatorname{tg} 22{,}5x}{1 - \operatorname{tg}^2 22{,}5x} = \frac{1}{2}.$$

9. График функции $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$ пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = -2$ и касается оси Ox в точке с абсциссой $x = 7$. Найти абсциссу точки локального минимума этой функции.

10. Решить уравнение $\sqrt{\log_x \sqrt{0{,}5x}} \cdot \log_{0,5} x = -1$.

11. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ проведены биссектрисы AM, BN и CP. Найти площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ABC равна 9, а $\cos \angle BAC = 0{,}25$.

12. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 12. Через вершину пирамиды и середины двух сторон основания проведено сечение. Найти объем пирамиды, если угол между плоскостями сечения и основания пирамиды равен φ, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Вариант 38. Московский государственный *университет коммерции* (МГУК), 1998

1. Решить уравнение: $\cos 2x + \frac{1}{2} = \cos^2 x$.

2. Решить неравенство $1 - \log_3 x \geqslant \log_3 \left(\frac{5}{3}x + 4\right)$.

3. Из пункта A в пункт B в 10:00 выехал велосипедист, а в 12:00 — мотоциклист. В 14:30 мотоциклист догнал велосипедиста, а в 19:30 — приехал в пункт B. В котором часу в пункт B приехал велосипедист?

4. Решить уравнение $2x + 7 = \sqrt{3x^2 + 25x + 51}$.

5. Найти номер n наибольшего члена последовательности
$$a_n = -3n^2 + 32n - 65, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

6. Высоты AH и CK остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке D, причем $AK = 13$, $KB = 12$, $AH = 20$. Найти сторону BC и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

7. Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$$4^{-x} - 2^{1-x} + 5 = a - 4^x + 2^{x+1}$$
имеет хотя бы одно решение.

Вариант 39. МГУК, 1998

1. Решить уравнение $\cos^2 x - \frac{1}{4} = \cos 2x$.

2. Решить неравенство $3 - \log_2 x \geqslant \log_2 \left(\frac{3}{4}x + 1\right)$.

3. Из пункта A в пункт B в 9:00 отправился пешеход, а в 10:30 — велосипедист. В 13:00 велосипедист догнал пешехода, а в 18:00 — приехал в пункт B. В котором часу в пункт B пришел пешеход?

4. Решить уравнение $2x + 5 = \sqrt{3x^2 + 19x + 29}$.

5. Найти номер n наибольшего члена последовательности
$$a_n = -2n^2 + 33n - 55, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

6. Высоты AH и CK остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке D, причем $BH = 5$, $HC = 21$, $CK = 24$. Найти сторону AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

7. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$9^{-x} - 3^{1-x} + 17 = a - 9^x + 3^{x+1}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 40. МГУК, 1999

1. Вычислить

$$\left(ab + \frac{a^3 - b^3}{a - b}\right) : \left(4\frac{a^2b + ab^2}{ab} + \frac{a^2 - b^2}{b - a}\right)^2.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3} - 3\operatorname{tg} 8x = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 8x}.$$

3. Боковая сторона описанной около окружности равнобедренной трапеции равна 50, а угол при основании равен 30°. Найти меньшее основание трапеции.

4. Решить неравенство

$$\log_{x-3} 2 + \log_{\frac{1}{2}}(x - 3) + \frac{8}{3} > 0.$$

5. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если сумма первого и третьего членов этой прогрессии без удвоенного второго члена равна -2, а четвертый член больше второго на 3, но меньше пятого.

6. Найти все a, при которых неравенство

$$\left|\frac{x^2 + 2ax + a^2 + 9}{x + a}\right| \leqslant 2x + 5 - x^2$$

имеет хотя бы одно решение.

7. Найти все целочисленные пары (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$5x = 4y^2 + 3y - 1.$$

Верно ли, что для каждой такой пары число $(x^3 - y^3)$ — нечетно?

Вариант 41. МГУК, 1999

1. Решить уравнение $\sqrt{x^2-3x+3}+3=2x$.

2. Вычислить $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ если

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15} \quad \text{и} \quad -\frac{3\pi}{2}<\alpha<0.$$

3. Решить неравенство $\log_{x-3}(3x-11)\geqslant 0$.

4. Решить неравенство

$$\frac{19}{3-|x-5|}\geqslant (x-5)^2+3|x-5|+9.$$

5. Диагонали трапеции, имеющей площадь 121, разбивают ее на четыре треугольника, один из которых имеет площадь 36. Найти площади остальных треугольников.

6. Найти знаменатель геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots$, если

$$3b_8+13b_2=b_6+2b_4+13b_1.$$

7. Найти все a, для каждого из которых ни при одном значении φ уравнение

$$\cos 2x+7\sin x\cos x+\sin(2x+\varphi)=a$$

не имеет решения.

Вариант 42. Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ (ИКСИ), факультет прикладной математики, 1999

1. Найдите все действительные корни алгебраического уравнения

$$(3x+5)\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2(3x+7)=\frac{1}{3}.$$

2. В течение двух лет добыча нефти на скважине уменьшается ежегодно на один и тот же процент в сравнении с объемом добычи предыдущего года. За первый год она сократилась более чем вдвое, а падение добычи за второй год в 7,2 раза меньше исходного годового объема добычи. На сколько процентов ежегодно сокращалось производство нефти на скважине?

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$5 + 2\sin x + 8\cos x + \sin 2x + 3\cos 2x = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 8) + 2\sqrt{\log_2(x^2 - 2x + 8)} \geqslant 12.$$

5. На стороне AM треугольника AMD выбрана точка B, а на стороне MD выбрана точка C так, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности, а прямые AD и BC пересекаются в точке N. При этом известно, что $\angle AMD = 60°$, $AD = 2BC$, $S_{ABD} = 2S_{ACD}$. Найдите величину угла ANB.

Вариант 43. ИКСИ, факультет информационной безопасности, 1999

1. Найдите все действительные корни алгебраического уравнения

$$(10x - 5)^2(10x - 4)(10x - 6) = 72.$$

2. *В течение первых двух лет обучения одного набора слушателей в* Академии процент отчисляемых на первом и втором курсах был одинаковым. Число слушателей, переведенных на третий курс, отличается от числа слушателей, переведенных на второй курс, на 20 человек. Всего на первый курс данного набора был принят 441 человек. Сколько слушателей переведено на третий курс, если известно, что их было более 100 человек?

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x = \cos x + \cos 2x.$$

4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям и равна 9, $CD = 12$, а отрезок AO, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равен 6. Найдите $\angle AOB$.

5. Считая x, y целыми числами, решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_4(\sqrt{y} + 1)\log_{(y-2)^2}(x + 1) + \log_{\frac{1}{(y-2)^2}} 3 = 0, \\ 4^{x+y} - 256 \cdot 2^{x+y} + 16384 = 0. \end{cases}$$

Вариант 44. ИКСИ, факультет специальной техники, 1999

1. Из молока, жирность которого составляет 5%, изготовляют творог жирностью 15,5%, при этом остается сыворотка жирностью 0,5%. Сколько творога получится из одной тонны молока?

2. Решите неравенство
$$\lg x^{\sqrt{x-1}} + 1 > \lg x + \sqrt{x-1}.$$

3. В трапеции $CDEF$ ($CF \parallel DE$) диагонали DF и CE перпендикулярны и пересекаются в точке B. Известно, что $CD = 37$, $BF = 84$, а радиус окружности, вписанной в треугольник BFC, равен 14. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник DEB.

4. Решите уравнение
$$\sin(\pi x) = \cos\frac{\pi}{x}.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$144^{-|2x-1|} - 2\cdot 12^{-|2x-1|} + 12a = 0$$
имеет хотя бы один корень.

Вариант 45. Новосибирский государственный университет, 1997

1. В пачке письменных работ абитуриентов — не более 75 работ. Известно, что половина работ в этой пачке имеют оценку «отлично». Если убрать три верхние работы, то 48% оставшихся работ будут с оценкой «отлично». Сколько работ было в пачке?

2. Решить уравнение
$$\log_{\operatorname{ctg} x}(3 + 2\cos 2x + 2\cos 4x) = 0.$$

3. Сторона квадрата $ABCD$ равна 4. Через вершину D проведена прямая l, пересекающая сторону BC и проходящая на расстоянии 2 от середины стороны AB. В каком отношении прямая l делит сторону BC?

4. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} \left|x - \dfrac{a}{3} + \dfrac{2}{3}\right| = y, \\ |y - 2a - 2| = x \end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S лежит квадрат со стороной 2. Боковые ребра равны $\sqrt{10}$. Точка M — середина SB, точка N лежит на ребре AB, причем $4BN = AB$. Найти минимально возможный радиус шара, касающегося плоскостей граней двугранного угла при ребре AD и прямой MN.

Вариант 46. Санкт-Петербургский государственный технический университет (СПбГТУ), физико-технический факультет, 1999

1. Упростите выражение
$$\frac{2}{a-2\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+2}+\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

2. Вычислите $3^{\log_2 5}\cdot 5^{-\log_2 3}$.

3. Число 12 составляет 45% числа n. Найдите 30% числа n.

4. Вычислите $\cos^2 120^\circ-\sin 210^\circ$.

5. Решите уравнение $2\cdot 3^{-x}-3^{|x|}=3^{x+1}$.

6. Решите уравнение $\log_3(x-6)\cdot\log_x 9=1$.

7. Решите уравнение
$$\sqrt{x}=\frac{2-x^2}{\sqrt{x}}.$$

8. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\cos\alpha<0$ и что $\sin 2\alpha=\cos\alpha$.

9. Вычислите
$$\operatorname{arctg}(\sqrt{5}+2)-\operatorname{arctg}(2-\sqrt{5}).$$

10. Решите неравенство $x+1>x^3+x^2$

11. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x}}{x+2}\geqslant 0$.

12. Найдите область определения функции
$$y=\log_2(x+1)^2+\sqrt{2+x}.$$

13. Найдите множество значений функции
$$y=\frac{2x^2+2x+2}{2x^2+2x+1}.$$

14. Найдите уравнения осей симметрии графика функции $y = \cos 2x$.

15. Найдите такие векторы, которые с векторами $\vec{a}(-1; -2)$ и $\vec{b}(2; 1)$ составляют треугольник.

16. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + 2(a-1)x + 3a = 0$ имеет два корня, являющихся целыми числами?

17. Первый член возрастающей арифметической прогрессии $a_1 = -3$; известно, что для всех ее членов, начиная со второго, выполнены равенства $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 4$. Найдите четвертый член прогрессии.

18. Решите уравнение $\sin x \sin 5x = 1$.

19. Окружность пересекает основание прямоугольника и касается прямых, на которых лежат три другие стороны прямоугольника. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что длина основания равна 10, а его отрезок, заключенный внутри окружности, равен 8.

20. Каким должен быть радиус основания конуса, чтобы объем конуса был наибольшим, если известно, что сумма длин радиуса и образующей конуса равна 10?

Вариант 47. СПбГТУ, физико-механический факультет, 1999

1. Упростите выражение

$$\frac{a - a^{-1}}{1 + a^{-1}} - \frac{a - a^{-1}}{1 - a^{-1}}.$$

2. Вычислите $\left(\log_{\sqrt{2}} 9\right)(\log_8 3)^{-1}$.

3. Произведение двух чисел увеличилось на 80% после того, как первый сомножитель увеличили на 50%, а второй сомножитель изменили на A%. Найдите A.

4. Упростите выражение

$$\frac{1 + \cos 250^\circ}{\sin 35^\circ \cos 55^\circ}.$$

5. Решите уравнение $\sqrt{x+1} = x\sqrt{2}$.

6. Найдите сумму решений уравнения $|4x - 4| = x^2$.

7. Решите уравнение

$$4^{4-x} \log_2 x = 2^x \log_4 x.$$

8. Найдите натуральные n, для которых
$$(\text{НОД}\,(n, 4))^2 = n$$
(НОД $(n, 4)$ — наибольший общий делитель чисел n и 4).

9. Найдите наименьшее целое значение n, при котором 9π является периодом функции
$$y = \cos x \cos \frac{3x}{n^2}.$$

10. Найдите $\cos 3\alpha$, если известно, что
$$2\cos 2\alpha = -1 \quad \text{и} \quad |\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

11. Решите уравнение
$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} x + \sqrt{3}.$$

12. Решите неравенство $\dfrac{1}{2 - |x|} > 1$.

13. Сумма третьего и пятого членов возрастающей геометрической прогрессии равна 8, а разность между пятым и первым ее членами равна 4. Найдите знаменатель прогрессии.

14. Решите неравенство
$$\frac{x^3 + 3x^2}{1 + x} \leqslant 0.$$

15. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y = -2x, \\ \sqrt{y} = x + 2. \end{cases}$$

16. Найдите область определения функции
$$y = \arcsin \frac{2x}{x - 1}.$$

17. Найдите множество значений функции
$$y = 4^x \cdot 2^{1-x^2}.$$

18. α, β и γ — углы треугольника. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = 2$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2}$. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$.

19. Радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, в 3 раза меньше высоты. Найдите объем пирамиды, если известно, что длина высоты равна $\sqrt{3}$.

20. При каких значениях параметра p функция $y = 2\sin x + p\sin 2x$ возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

Вариант 48. Воронежский государственный университет (ВГУ), 1999

1. Доказать, что число $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{|2-\sqrt{5}|}$ целое.

2. Решить неравенство

$$3\log_{(3{,}5+x)^2}\left(x^2+14x+45\right) \leqslant 4\log_{(-3{,}5-x)}\left(x^2+14x+45\right).$$

3. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{5\pi}{3}\right) = 2\operatorname{ctg}2x + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6}$.

4. Группа студентов принимала участие в лыжном кроссе. Число студентов, выполнивших норматив, оказалось в интервале от 96,8% до 97,2%. Какое наименьшее возможное число студентов участвовало в кроссе?

5. Площадь равнобедренной трапеции равна S, а величина угла между ее диагональю и большим основанием равна α. Найти длину высоты трапеции.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 18xy^2 + 1 = 0, \\ x^2 + 9y^2 + 1 = 2x + 3y. \end{cases}$$

7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых число решений уравнения $2\left(7x^2 - a^4\right) + a^2 = \left(12a^2+1\right)x$ не превосходит числа решений уравнения $x^3 + \left(2a - \frac{1}{2}\right)^2 7^x = \left(49^{2a} - 7\right)\log_7\left(7^{3a} - \frac{1}{4}\right) - 7x$.

Вариант 49. ВГУ, 1999

1. В квадрат $ABCD$ со стороной a вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E. Найти длину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается прямой AE.

2. Решить уравнение $5^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}+\log_5 \cos x} = 15^{\frac{1}{2}+\log_{15} \cos x}$.

3. Имеются два слитка, представляющие сплавы цинка с медью. Вес первого слитка 2 кг, вес второго — 3 кг. Эти два слитка сплавили вместе с 5 кг сплава цинка с медью, в котором цинка было 45%, и получили сплав цинка с медью, в котором цинка стало 50%. Если бы процентное содержание цинка в первом слитке было бы равно процентному содержанию цинка во втором слитке, то, сплавив эти два слитка с 5 кг сплава, в котором 60% цинка, получили бы сплав, в котором цинка содержится 55%. Найти процентное содержание цинка в первом и во втором слитках.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14, \\ x^2 + xy - y^2 = 5. \end{cases}$$

5. Решить уравнение $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$.

6. Найти все значения параметра b, при каждом из которых функция $f(x) = \sin 2x - 8(b+2)\cos x - \left(4b^2 + 16b + 6\right)x$ является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

7. Решить уравнение $\sqrt[4]{15 + 5\cos^2 2x} - \sqrt[4]{5\sin^2 2x - 3} = 1$.

Вариант 50. Алтайский государственный университет, 1997

1. Решить уравнение $\sqrt[4]{3}\,\mathrm{tg}\,x - 1 = (\sqrt[4]{3} - 1)\sqrt{\mathrm{tg}\,x}$.

2. На катете AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбрана точка P так, что полуокружность, построенная на отрезке PC как на диаметре, касается гипотенузы AB. В каком отношении полуокружность делит отрезок PB?

3. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B и углом A, равным α. Каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол $45°$. Найти угол между плоскостями SAC и SBC.

4. Часы показывают в некоторый момент времени на 2 минуты меньше, чем следует, хотя и спешат. Если бы они показывали на 3 минуты меньше, чем следует, но уходили бы в сутки на $\frac{1}{2}$ минуты больше, чем уходят, то верное время они показали бы на сутки раньше, чем покажут. На сколько минут в сутки спешат часы?

5. Сколько решений имеет система уравнений

$$x^2 + y^2 + xy = a, \quad x^2 - y^2 = \sqrt[3]{a},$$

где a — произвольное вещественное число?

Вариант 51. Уральский государственный университет, 1997

1. Арифметическая прогрессия состоит из целых чисел. Если из нее вычеркнуть первый и последний члены, а каждый из оставшихся членов уменьшить на 1, то сумма членов исходной прогрессии окажется на 20% больше суммы членов новой последовательности. Каково наименьшее возможное значение числа членов прогрессии?

2. В треугольнике DEF угол между высотой EH и медианой EM составляет $\frac{1}{4}$ от каждого из углов HED и MEF. Определить углы треугольника.

3. Решить уравнение $t^2 - 11 = 11t + 3\sqrt{t^2 - 11t - 1}$.

4. Доказать неравенство $6^{\operatorname{tg}^2 \delta} + 6^{\left(\frac{1}{\sin^2 \delta} - 1\right)} \geqslant 12$.

Вариант 52. Пермский государственный университет, 1997

1. Основанием пирамиды объема V служит прямоугольник. Угол между диагоналями прямоугольника равен α, а высота пирамиды равна периметру основания. Найти площадь основания.

2. Решить уравнение $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right) + \sin x = |\cos x|$.

3. Автолюбитель, желая за 4 года накопить средства на покупку автомобиля, поместил в банк вклад в размере 5 млн руб. под 20% годовых. В конце каждого из первых трех лет он после начисления банком процентов наметил дополнительно вносить на счет одну и ту же фиксированную сумму — такую, чтобы окончательный размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 369,44%. Какую сумму необходимо ежегодно добавлять вкладчику?

4. Решить неравенство $2^{\sqrt{2x^2-4x+1}} < 0{,}25 \cdot 4^x - 7 \cdot 0{,}5^{5-2x}$.

5. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_2\left(\frac{32}{x}\right) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} = \log_2\frac{4}{x}.$$

Вариант 53. Дальневосточный государственный университет, 1997

1. Найти все натуральные числа, которые уменьшаются в 57 раз после вычеркивания первой цифры.

2. Решить неравенство $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$.

3. Решить систему
$$\begin{cases} |x|+|y|=3, \\ \sin\dfrac{\pi x^2}{2}=1. \end{cases}$$

4. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

5. Целые числа a, b и c — последовательные члены геометрической прогрессии; a, $b+8$, c в порядке записи — члены арифметической прогрессии; a, $b+8$, $c+64$ — также в порядке записи — геометрической прогрессии. Найти эти числа.

Вариант 54. Барнаульский государственный педагогический университет, 1997

1. Решите уравнение
$$2\cos 2x+1=5\sin^2 x+6\cos x.$$

2. Решите уравнение
$$\lg\frac{6x^2+1}{1-3x}+\lg\frac{3x-1}{5x-5}=0.$$

3. Найти наибольшее значение функции $y=x^3-6x^2+6x+3$ на отрезке $[1,6]$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C на гипотенузу AB проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 2 см и 1,5 см соответственно. Найти длину высоты CD.

5. Высота прямой призмы, в основании которой лежит правильный треугольник, равна h. Плоскость, проведенная через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью основания угол α. Найти площадь сечения.

Ответы, указания, решения

1. Задачи на преобразование алгебраических выражений и на вычисление

1.1.1. 7. **1.1.2.** 0,75. **1.1.3.** 0,5. **1.1.4.** 11. **1.1.5.** 25. **1.1.6.** 2. **1.1.7.** 0,0147. **1.1.8.** -4. ☐ Обозначив исходное выражение через A, имеем:

$$A=\frac{2+\frac{1}{3}+3+\frac{1}{2}}{-4-\frac{1}{6}+3+\frac{1}{4}}+2\frac{4}{11}=\frac{(2+3)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)}{(-4+3)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)}+\frac{26}{11}=\frac{5+\frac{5}{6}}{-1+\frac{1}{12}}+\frac{26}{11}=$$

$=-\frac{35}{6}:\frac{11}{12}+\frac{26}{11}=-\frac{35\cdot 12}{11\cdot 6}+\frac{26}{11}=-\frac{70}{11}+\frac{26}{11}=-\frac{44}{11}=-4$. Таким образом, $a=-4$. ■

1.1.9. 0,5. **1.1.10.** 211. **1.1.11.** 1,25. **1.1.12.** $-6{,}25$. **1.1.13.** -14. **1.1.14.** 9. **1.1.15.** 2,5. **1.1.16.** 12. **1.1.17.** 10. **1.1.18.** 10. **1.1.19.** 72. **1.1.20.** 1. **1.1.21.** $-\frac{55}{17}$. **1.1.22.** 0. **1.1.23.** 24. **1.1.24.** 100. **1.1.25.** 1,25. **1.1.26.** 26. **1.1.27.** $\frac{175}{16}$. **1.1.28.** 81,002. **1.1.29.** 1,4.

1.1.30. 4. ☐ $\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(12+4\sqrt{5})(12-4\sqrt{5})}=$
$=\sqrt[3]{12^2-(4\sqrt{5})^2}=\sqrt[3]{144-80}=\sqrt[3]{64}=4$. ■

1.1.31. 2. ● Учесть, что $\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}=\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$. **1.1.32.** -3. ● Воспользоваться тождеством $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$. **1.1.33.** 3. **1.1.34.** 11. **1.1.35.** 73. ● Учесть, что $729^{\frac{1}{3}+\log_{81}4}=(9^3)^{\frac{1}{3}+\log_9 2}=9^1\cdot 9^{3\log_9 2}=9\cdot 8=72$. **1.1.36.** $71\frac{9}{14}$. **1.1.37.** 1.

1.2.1. $\sqrt{x}+1$. ☐ При условии $x>0$, $x\neq 1$ преобразуем исходное выражение к виду $\left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}{\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}$, откуда, используя формулы разности кубов и разности квадратов, получим окончательно

$$\left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=$$

$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}+1$. ■

1.2.2. $\sqrt[3]{x}+1$. **1.2.3.** 1. **1.2.4.** $2x$. ● Разложить на множители числители обеих дробей. **1.2.5.** $(a+b)^3$. **1.2.6.** $\sqrt{b}$. **1.2.7.** 0. **1.2.8.** -1. **1.2.9.** 2. **1.2.10.** 3. **1.2.11.** -1. **1.2.12.** 1. **1.2.13.** $4x$. **1.2.14.** $-2\sqrt{x}$. **1.2.15.** $\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. **1.2.16.** 0. **1.2.17.** 5. **1.2.18.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **1.2.19.** 1. **1.2.20.** -1. **1.2.21.** 1. **1.2.22.** -4. **1.2.23.** $\frac{8x}{\left(4-\sqrt{x}\right)^2}$. **1.2.24.** 0. **1.2.25.** $-2y$. **1.2.26.** $2ab$. **1.2.27.** $\frac{2}{a-1}$.

1.2.28. $\sqrt[3]{x^2}$. □ Обозначим $y = x^2$, тогда исходное выражение преобразуется к виду

$$2\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{y}}{\left(\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}\right)^2}=\frac{2\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\cdot\sqrt[3]{y}}{2\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)}=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x^2}. \blacksquare$$

1.2.29. $\frac{a+b}{a}$. **1.2.30.** $-\frac{x^2+x+1}{x}$. **1.2.31.** $\sqrt{a-b}$. **1.2.32.** 1. **1.2.33.** 1. **1.2.34.** $-\frac{1}{a}$. **1.2.35.** 2. **1.2.36.** $\frac{5-a}{a+1}$. **1.2.37.** 1. **1.2.38.** 1. **1.2.39.** 4. **1.2.40.** $\frac{2(a-1)}{a\sqrt{a}}$.
● Воспользоваться равенствами

$$\frac{a-a^{-2}}{a^{\frac12}-a^{-\frac12}}=\frac{(a^3-1)\sqrt{a}}{a^2(a-1)}=\frac{a^2+a+1}{a\sqrt{a}},\qquad \frac{1-a^{-2}}{a^{\frac12}-a^{-\frac12}}=\frac{(a^2-1)\sqrt{a}}{a^2(a+1)}=\frac{a-1}{a\sqrt{a}}.$$

1.2.41. 2. **1.2.42.** $\frac{2}{1-a}$. **1.2.43.** $4\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac32}$. **1.2.44.** $\frac{9}{a-b}$. **1.2.45.** -1.
1.2.46. 1. □ Обозначим исходное выражение через A. Тогда

$$A=a^{-\frac23}\cdot a^{\frac13}\cdot\frac{a-8b}{a^{\frac23}+2a^{\frac13}b^{\frac13}+4b^{\frac23}}\cdot\frac{a^{\frac13}}{a^{\frac13}-2b^{\frac13}}=a^{-\frac23}\cdot a^{\frac23}\cdot\frac{a-8b}{a-8b}=1. \blacksquare$$

1.2.47. 1. **1.2.48.** $2x$. **1.2.49.** $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+1$. **1.2.50.** $\frac{b-c^4}{c^2\sqrt{b}}$. **1.2.51.** 2. **1.2.52.** 0.
● *Воспользоваться равенствами* $m^6-343=(m^2)^3-7^3=(m^2-7)(m^4+7m^2+49)$.
1.2.53. $\frac{1}{2(a-b)}$. **1.2.54.** 1. **1.2.55.** $\frac{2\left(\sqrt{ab}-2\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}$. **1.2.56.** $\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. **1.2.57.** 10.
1.2.58. $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$. **1.2.59.** 0. **1.2.60.** $-\sqrt{x}$. **1.2.61.** 2. **1.2.62.** 1. **1.2.63.** $-2a^{\frac14}$.
1.2.64. 0,5. **1.2.65.** -25. **1.2.66.** $(2x+1)^2$. **1.2.67.** 0. **1.2.68.** $\frac{4x\sqrt{x}}{a}$. **1.2.69.** $2x(2x+1)$.
1.2.70. $\frac{2}{1-p^4}$. □ Обозначив исходное выражение через A, имеем

$$A=\left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)^2+\frac{2}{\sqrt{1-p^4}}=\frac{1}{1-p^2}+\frac{1}{1+p^2}-\frac{2}{\sqrt{(1-p^2)(1+p^2)}}+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{1-p^4}}=\frac{(1+p^2)+(1-p^2)}{(1-p^2)(1+p^2)}=\frac{2}{1-p^4}. \blacksquare$$

1.2.71. $-27x\sqrt{a}$. **1.2.72.** $-2\sqrt[3]{a}$. ● Обозначим $x=\sqrt[6]{a}$, $y=\sqrt{b}$, привести исходное выражение к виду

$$\left(\frac{x^4-x^2y}{(x^2-y)(x^3+y)}-\frac{x^2}{x^3-y}\right)\cdot\frac{x^6-y^2}{y}=x^2\left(\frac{1}{x^3+y}-\frac{1}{x^3-y}\right)\cdot\frac{x^6-y^2}{y}.$$

1.2.73. $\frac{b}{a-b}$. **1.2.74.** $-\sqrt{ac}$. ● Воспользоваться равенствами $\sqrt{3}(a-b^2)+$ $+\sqrt{3}b\sqrt[3]{8b^3}=\sqrt{3}(a+b^2)$ и $2(a-b^2)^2+\left(2b\sqrt{2a}\right)^2=2(a+b^2)^2$. **1.2.75.** 0.
1.2.76. $0{,}25-4x^4$.

1.2.77. $-\frac{1}{2}$. □ Обозначив исходное выражение через A и учитывая, что $a \geqslant 1$, получим: $A =$

$$\frac{2a+\sqrt{a^2-1}}{(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1})(\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1})\left((\sqrt{a-1})^2+\sqrt{(a-1)(a+1)}+(\sqrt{a+1})^2\right)}$$

$$= \frac{2a+\sqrt{a^2-1}}{\big[(a-1)-(a+1)\big](a-1+\sqrt{a^2-1}+a+1)} = \frac{2a+\sqrt{a^2-1}}{-2(2a+\sqrt{a^2-1})} = -\frac{1}{2}. \ \blacksquare$$

1.2.78. x^9. **1.2.79.** $1-2x^4$. **1.2.80.** $\sqrt[4]{4a}$. **1.2.81.** 2. **1.2.82.** a. **1.2.83.** $\frac{x^2}{\sqrt{2}}$.

1.3.1. 10. □ $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x+y$. Подставляя заданные значения x и y в выражение $x+y$, получим окончательный ответ 10. ■

1.3.2. 5,68. **1.3.3.** 125. **1.3.4.** 16,125. **1.3.5.** 39. **1.3.6.** 3,1. **1.3.7.** 4. **1.3.8.** 22,5. **1.3.9.** 1,5. □ Преобразуем исходное выражение, которое мы обозначим через A:

$$A = \frac{(1-x^{0,5})(1+x^{0,5})}{1-x^{0,5}}\left(\frac{(1+x^{0,5})(1-x^{0,5}+x)}{1-x^{0,5}+x}-x^{0,5}\right) = (1+x^{0,5})\times$$

$\times(1+x^{0,5}-x^{0,5}) = 1+x^{0,5}$. При $x=\frac{1}{4}$: $A = 1+\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5} = 1+0,5 = 1,5$. ■

1.3.10. 1,9. **1.3.11.** 3. **1.3.12.** 2,7. **1.3.13.** 8. ● Воспользоваться равенствами: $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ и $x^2+x-2ax-2a=(x-2a)(x+1)$. **1.3.14.** $-0,16$. ● Обозначить $y=x^{-\frac{1}{4}}$, учесть, что при $x=0,0256$ $\quad y=2,5$.

1.4.1. □ $\quad 1+\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x\sqrt{x}-1} = 1+\dfrac{(1+\sqrt{x})(x\sqrt{x}-1)}{1+x+\sqrt{x}} =$

$$= 1+\frac{(\sqrt{x}+1)\left((\sqrt{x})^3-1^3\right)}{1+x+\sqrt{x}} = 1+\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{1+\sqrt{x}+x} =$$

$= 1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) = 1+(x-1) = x$, что и требовалось доказать. ■

1.4.3. ● Преобразовать левую часть равенства следующим образом:

$$\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}-\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x+1-(x-1)}{\big[(x-1)(x+1)\big]^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{(x^2-1)^2}}.$$

1.4.6. □ Приведем дроби в левой части равенства к общему знаменателю, после чего преобразуем числитель полученной дроби:

$$\frac{(\sqrt[3]{a}c^2-3\sqrt{b})(c^2-3)+(3\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}c^2)(c^2+3)}{(c^4-9)(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})} =$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{a}c^4+\sqrt{b}c^4)-3\sqrt{b}c^2+3\sqrt{b}c^2-3\sqrt[3]{a}c^2+3\sqrt[3]{a}c^2+(9\sqrt[3]{a}+9\sqrt{b})}{(c^4-9)(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})} =$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})\cdot c^4+9(\sqrt{b}+\sqrt[3]{a})}{(c^4-9)(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})} = \frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})(c^4+9)}{(c^4-9)(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})} = \frac{c^4+9}{c^4-9},$$

что и требовалось. ■

1.4.7. ● Домножив числитель и знаменатель первой дроби на $2a^3$, а второй — на a^2, воспользоваться равенствами: $4a-1=(2\sqrt{a}-1)(2\sqrt{a}+1)$ и $a^{\frac{3}{2}}-1=(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)$.

1.5.1. 49. □ Преобразуем левую часть уравнения: $49^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{2,5}=(7^2)^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{\frac{5}{2}}=7^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{\frac{5}{2}}$. Аналогично для правой части имеем:

$$7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{-\frac{2}{3}}\cdot 49\cdot x^{0,5}=7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{-\frac{2}{3}}\cdot 7^2\cdot\sqrt{x}=7^{\frac{1}{2}+2}\cdot 7^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x}=7^{\frac{5}{2}}\cdot 7^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x}.$$

Таким образом, исходное уравнение приводится к виду: $7^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{\frac{5}{2}}=7^{\frac{5}{2}}\cdot 7^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x}$, или $7^{\frac{1}{3}}=7^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x}$, откуда $\sqrt{x}=7$, т. е. $x=49$. ■

1.5.2. 0,5. **1.5.3.** 9. **1.5.4.** $2^{-\frac{1}{3}}$. **1.5.5.** 0,25. **1.5.6.** 0,25. **1.5.7.** 1.

1.6.1. $\dfrac{3-x}{x}$. □ Разложив числитель дроби на множители:

$$7x-2x^2-3=-(2x^2-7x+3)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)=-(2x-1)(x-3),$$

преобразуем ее к виду $\dfrac{-(2x-1)(x-3)}{x(2x-1)}=-\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{3-x}{x}$. ■

1.6.2. $\dfrac{1-x}{3x-2}$. **1.6.3.** $-\sqrt{x}-1$. **1.6.4.** $x+3$. ● Воспользуйтесь цепочкой равенств $x^3+4x^2-9x-36=x^2(x+4)-9(x+4)=(x+4)(x-3)(x+3)$.

1.7.1. ● Возвести обе части исходного равенства в квадрат.

1.7.2. ● Сначала избавиться от иррациональности в знаменателях дробей: $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}=\sqrt{3}+1$, $\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{3(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=$ $=\dfrac{3(\sqrt{3}+2)}{3-4}=-3\sqrt{3}-6$, $\dfrac{15}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{15(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=\dfrac{15(3+\sqrt{3})}{9-3}=\dfrac{15}{2}+\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$.

1.7.3. $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3}>1$. □ Предположим, к примеру, что $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3}>1$. Попытаемся, преобразовывая это неравенство, получить в итоге какое-нибудь очевидное неравенство, которое либо будет верно — тогда наше предположение верно и $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3}<1$ — либо неверно, и тогда $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3}>1$. Заменим неравенство $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3}<1$ равносильным $\sqrt{6}-1<\sqrt[3]{3}$, после чего возведем обе части последнего неравенства в куб: $6\sqrt{6}-3\cdot 6\cdot 1+3\cdot\sqrt{6}\cdot 1-1<3$, т. е. $9\sqrt{6}<22$. Возводя обе части полученного неравенства в квадрат, получим $81\cdot 6<484$, или $486<484$. Получив в итоге неверное неравенство, делаем вывод, что исходное неравенство также было неверным и, значит, $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3}>1$. ■

1.7.4. $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}>3$. **1.7.5.** $\sqrt[5]{\dfrac{1990}{1992}}>\sqrt[5]{\dfrac{1989}{1991}}$. ● Воспользоваться соотношением $\dfrac{1990}{1992}=1-\dfrac{2}{1992}>1-\dfrac{2}{1991}=\dfrac{1989}{1991}$.

1.7.6. 0,85. □ Домножим числитель и знаменатель дроби на 5: $\dfrac{17\cdot 5}{20\cdot 5}=\dfrac{85}{100}=0,85$. ■

1.7.7. 0,875. **1.7.8.** 275.

1.8.1. $\dfrac{3(3+\sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$. ● Учесть, что $\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}=\sqrt{\dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2})^2}}=\dfrac{|1-\sqrt{2}|}{|1+\sqrt{2}|}=$ $=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, $\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}}}=\sqrt{\dfrac{(6+\sqrt{2})(6+\sqrt{2})}{(6-\sqrt{2})(6+\sqrt{2})}}=\sqrt{\dfrac{(6+\sqrt{2})^2}{36-2}}=\dfrac{6+\sqrt{2}}{\sqrt{34}}$.

1.8.2. -54. ● Избавившись от иррациональности в знаменателях обеих дробей, привести выражение в квадратных скобках к виду $6(\sqrt{13}+2)$. **1.8.3.** 3. **1.8.4.** 144. **1.8.5.** -115. ● Избавиться от иррациональности в знаменателях дробей. **1.8.6.** 1. □ При решении этой задачи неоднократно применяется формула для разности квадратов. Имеем: $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$ $=\sqrt{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)} = \sqrt{4-\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)} =$ $=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Поэтому исходное выражение приводится к виду

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=$$
$$=\sqrt{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=$$
$$=\sqrt{4-(2+\sqrt{3})}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=1.\ ■$$

1.8.7. -5. ● Учесть, что $4\sqrt{6}+\sqrt{39}+2\sqrt{26}+6=(4\sqrt{6}+6)+(\sqrt{39}+2\sqrt{26})=$ $=\sqrt{12}(2\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{13}(\sqrt{3}+2\sqrt{2})=(\sqrt{12}+\sqrt{13})(2\sqrt{2}+\sqrt{3})$, а $4\sqrt{6}+\sqrt{39}-$ $-2\sqrt{26}-6=(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{12}-\sqrt{13})$.

1.8.8. 8. □ $(\sqrt{28}-\sqrt{12})\cdot\sqrt{10+\sqrt{84}} = (2\sqrt{7}-2\sqrt{3})\cdot\sqrt{10+2\sqrt{21}} =$ $=2(\sqrt{7}-\sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}=2(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})=2\cdot(7-3)=8$. ■

1.8.9. 9. ● Воспользоваться равенствами $8^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, $4^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)$, $32^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{16}=2^{\frac{4}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)$. **1.8.10.** $-\frac{6}{5}$. ● Воспользоваться цепочкой равенств $\sqrt{33}+\sqrt{15}-\sqrt{22}-\sqrt{10} = (\sqrt{33}-\sqrt{22})+(\sqrt{15}-\sqrt{10}) = \sqrt{11}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+$ $+\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{11})$. **1.8.11.** 2. ● Учесть, что $\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)^2}=$ $=\left|\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2}-\sqrt{5}$, т.к. $\sqrt{5}<\frac{5}{2}$. **1.8.12.** 0.

1.9.1. $4\sqrt{a}$. □ Обозначив исходное выражение через A, преобразуем его к виду

$$A=\left(\frac{\sqrt{a}}{a-4}-\frac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}\left(a-\sqrt[3]{64}\right)}\right)^{-2}-\sqrt{(a+4)^2}=\left(\frac{\sqrt{a}}{a-4}-\frac{2}{a-4}\right)^{-2}-|a+4|=$$

$=\left(\frac{a-4}{\sqrt{a}-2}\right)^2-|a+4|$. Далее, поскольку по условию $a>0$ и $a\neq 4$, то $|a+4|=$ $=a+4$; кроме того, $a-4=(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)$. Отсюда $A=(\sqrt{a}+2)^2-(a+4)=$ $=a+4\sqrt{a}+4-a-4=4\sqrt{a}$. ■

1.9.2. $\frac{2x-3}{2\sqrt{x}}$ при $x\in[4;\infty)$, $\frac{5}{2\sqrt{x}}$ при $x\in(0;4)$. ● $\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{1}{4x^{-1}}-2}=$ $=\sqrt{\frac{x^2-8x+16}{4x}} = \sqrt{\frac{(x-4)^2}{4x}}$. Отсюда следует, что $x>0$, поэтому $\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{1}{4x^{-1}}-2}=\frac{|x-4|}{2\sqrt{x}}$. Аналогично, $\sqrt{\frac{1}{4x^{-1}}+\frac{2^{-2}}{x}+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{4x}}=$ $=\frac{|x+1|}{2\sqrt{x}}$. Таким образом, исходное выражение равно $\frac{|x-4|+x+1}{2\sqrt{x}}$. Далее рассмотреть два случая: $x \geqslant 4$ и $0 < x < 4$. **1.9.3.** $\frac{x}{2-x}$. ● Воспользоваться равенствами $1 - 2\sqrt{2x} + 2x = (1 - \sqrt{2x})^2$ и

$$\left(\sqrt[4]{\frac{x}{2}} + \sqrt[4]{2x^3}\right)^2 - 4x = \left(\sqrt[4]{\frac{x}{2}} - \sqrt[4]{2x^3}\right)^2 = \sqrt{\frac{x}{2}}(1 - \sqrt{2x})^2.$$

1.9.4. $\sqrt{b}$. ● Обозначив $c = a^2 + 1$, привести исходное выражение к виду $\frac{c^2 - b^2}{(\sqrt{c}-\sqrt{b})\left(\sqrt{c}(\sqrt{c}+\sqrt{b}) - \sqrt{b}(\sqrt{c}-\sqrt{b})\right)} - \sqrt{c}$. Последнее выражение упрощается стандартным образом. **1.9.5.** 0,5. **1.9.6.** $-\sqrt{2}-\sqrt{x}$. **1.9.7.** $\frac{1}{\sqrt[4]{a}-1}$. ● Обозначив $b = a^{\frac{1}{4}}$, привести первую дробь к виду $\frac{1+2b-b^2}{1-b^4+4b^3-4b^2} = \frac{b^2-2b-1}{b^4-4b^3+4b^2-1}$. Далее, поделив столбиком знаменатель последней дроби на ее числитель, убедиться, что эта дробь равна $\frac{1}{b^2-2b+1}$. **1.9.8.** 0. ● Учесть, что $\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3 = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3 = a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3\sqrt{a}b - b\sqrt{b}$.

1.9.9. -6 при $a \in (-\infty; -4)$; 6 при $a \in (-4; \infty)$. □ Воспользуемся формулой суммы кубов: $\frac{6(a^3+27)|a+4|}{(a^2-3a+9)(a^2+7a+12)} = \frac{6(a+3)(a^2-3a+9)|a+4|}{(a^2-3a+9)(a+3)(a+4)} =$

$$= \frac{6|a+4|}{a+4} = \begin{cases} 6 \text{ при } a > -4, \\ -6 \text{ при } a < -4. \end{cases} \blacksquare$$

1.9.10. $-x(x+1)$ при $x \in (-\infty; 1)$; $x^2 + x + 2$ при $x \in (1; \infty)$. ● Рассмотреть два случая: $x > 1$ и $x < 1$. **1.9.11.** $\frac{x^2-x+1}{1-x}$ при $x \in (-\infty; -1)$; $\frac{x^2+x+1}{x+1}$ при $x \in (-1; \infty)$. **1.9.12.** $-\frac{a}{2}$ при $a \in (-\infty; -2)$; $\frac{a(a-1)}{2}$ при $a \in (-2; \infty)$. **1.9.13.** $-\left(m^2 + m \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$ при $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$; $\frac{m^3}{m-\sqrt[3]{2}}$ при $m \in (1; \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}; +\infty)$. ● Область допустимых значений определяется из условия $|m^3 - 1| - 1 \neq 0$, т. е. $m \neq 0$, $m \neq \sqrt[3]{2}$. Далее рассмотреть два случая: $m > 1$, $m \neq \sqrt[3]{2}$ и $m < 1$, $m \neq 0$. **1.9.14.** $\frac{b^2-1}{\sqrt{b}}$. ● Воспользоваться тем, что при $0 < b < 1$ имеем $\sqrt{b^2-2b+1} = \sqrt{(b-1)^2} = |b-1| = 1-b$. **1.9.15.** -1.

1.10.1. 4,1. ● Воспользоваться равенствами $x^2y^2 - \sqrt{2} = (xy + \sqrt[4]{2})(xy - \sqrt[4]{2})$ и $2xy + 2\sqrt[4]{2} = 2(xy + \sqrt[4]{2})$. **1.10.2.** b^2. ● Преобразовав исходное выражение к виду

$$\sqrt[n]{a^{n-k}x^k} \cdot \left[\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-2k}} + 1 - 2\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}\sqrt[2n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-2k}}\right] + b^2,$$

показать, что содержимое квадратных скобок равно нулю. Для этого учесть, что в соответствии с условием $x^{n-2k} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{b-a})^{2n}}{a^{2k}}$, откуда $\left(\frac{x}{a}\right)^{n-2k} = \left(\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)} - \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right) - 1}\right)^{2n}$.

1.10.3. □ Обозначив левую часть доказываемого равенства через A, имеем:

$$A = \frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{x}}} + \frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{a-\sqrt{x}}+\sqrt{a+\sqrt{x}}}{\sqrt{a^2-x}}.$$

Учитывая, что $1 < a < 2$ и $x = 4(a-1)$, преобразуем знаменатель полученной дроби: $\sqrt{a^2-x} = \sqrt{a^2-4a+4} = \sqrt{(a-2)^2} = |a-2| = 2-a$. Далее, поскольку $x = \sqrt{x^2}$, если $x \geqslant 0$, то $\sqrt{a-\sqrt{x}} + \sqrt{a+\sqrt{x}} = \sqrt{\left(\sqrt{a-\sqrt{x}}+\sqrt{a+\sqrt{x}}\right)^2} =$ $= \sqrt{a-\sqrt{x}+a+\sqrt{x}+2\sqrt{a^2-x}} = \sqrt{2a+2(2-a)} = \sqrt{4} = 2$. Отсюда, окончательно, $A = \frac{2}{2-a}$, что и требовалось доказать. ■

1.10.4. $x = -\frac{5}{4}$. □ Представив $a+b$ и $a-b$ соответственно как сумму и разность кубов, преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}} + \frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3-\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)+\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)} +$$

$$+ \frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)-\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}\right)} + \frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ab}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}} + \frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}} =$$

$$= \frac{2\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}} = 2.$$

Таким образом, $2\frac{2x-3}{3x+1}$, откуда $x = -\frac{5}{4}$. ■

1.10.5. b. ● Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби. **1.10.6.** $6{,}(32) < 2\sqrt{10}$. ● Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, заметить, что $6{,}(32) = 6 + \frac{32}{100}\cdot\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots\right) =$ $= 6 + \frac{32}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = 6\frac{32}{99}$.

1.10.7. □ Преобразуем левую часть исходного равенства:

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}} = \sqrt{\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)} + \sqrt{\sqrt[3]{y^4}\left(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$
$$= \sqrt{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right) = \left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^{\frac{3}{2}} = a$, т.е. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, что и требовалось доказать. ■

1.10.8. $f(x)=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5})$, $f'(x)=\frac{1}{6\sqrt[3]{x^2}}$. □ Учитывая, что $7^{\log_{243}5}=\left(243^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_{243}5}=243^{\log_{243}5^{\frac{1}{3}}}=5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$, имеем:

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{5}}(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{x})-2\sqrt[3]{x}}{\left(\sqrt[3]{\frac{x}{5}}+1\right)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5})}+\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x}{5}}+1}+1\right)^{-1}\cdot\sqrt[3]{5}=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\frac{x^2}{5}}-2\sqrt[3]{x}\right)+(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5})+\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{5}}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5}\right)}{\left(\sqrt[3]{\frac{x}{5}}+1\right)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5})}\right)^{-1}\times$$

$$\times\sqrt[3]{5}=\left(\frac{2\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{5}}{\left(\sqrt[3]{\frac{x}{5}}+1\right)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5})}\right)^{-1}\cdot\sqrt[3]{5}=\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{x}{5}}+1\right)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5})}{2(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5})}\cdot\sqrt[3]{5}=$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5}).$$

Отсюда $f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{6}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{6\sqrt[3]{x^2}}$. ■

1.10.9. $f(x)=0{,}25$, $f'(x)=0$. **1.10.10.** $f(x)=-x^2-1$, $f'(x)=-2x$.

1.10.11. $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. □ $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}=$
$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$. ■

1.11.1. 18. □ Обозначим $X=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$. Тогда, так как $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ и $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, то

$$X^3=\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3=\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3+$$
$$+3\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)=$$
$$7-5\sqrt{2}+7+5\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(7-5\sqrt{2})(7+5\sqrt{2})}\cdot X=14+3\sqrt[3]{49-50}\cdot X=14-3X.$$

Таким образом, $x^3=14-3x$, или $x^3+3x-14=0$. Подбирая целые корни этого уравнения, находим $x=2$. Далее, деля «столбиком» многочлен $x^3+3x-14$ на $(x-2)$, получим в частном x^2+2x-7, т.е. $x^3+3x-14=(x-2)\cdot(x^2+2x+7)$. Поскольку квадратное уравнение $x^2+2x+7=0$ не имеет действительных корней, то $x=2$ — *единственный действительный* корень уравнения $x^3+3x-14=0$. Отсюда $X=2$ и, значит, исходное выражение равно $2\cdot 9=18$. ■

1.11.2. 3. ● Обозначив исходное выражение через X, воспользоваться формулой $(a+b)^3=a^3+b^3+2ab(a+b)$. **1.11.3.** 4. ● Воспользоваться равенствами $2\sqrt{2}+3=(\sqrt{2}+1)^2$ и $6-4\sqrt{2}=2(\sqrt{2}-1)^2$.

1.11.4. 1. □ $\dfrac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}+1}>0$ поэтому

$$\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}+1}=\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}+1}\right)^4}=\sqrt[4]{\frac{5-4(\sqrt[4]{5})^3+6(\sqrt[4]{5})^2-4\sqrt[4]{5}+1}{5+4(\sqrt[4]{5})^3+6(\sqrt[4]{5})^2+4\sqrt[4]{5}+1}}=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{6(1+\sqrt[4]{25})-4\sqrt[4]{5}(1+\sqrt[4]{25})}{6(1+\sqrt[4]{25})+4\sqrt[4]{5}(1+\sqrt[4]{25})}}=\sqrt[4]{\frac{(1+\sqrt{5})(6-4\sqrt[4]{5})}{(1+\sqrt{5})(6+4\sqrt[4]{5})}}=\sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt[4]{5}}{3+2\sqrt[4]{5}}}.$$

Отсюда исходное выражение равно

$$\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}}\cdot\sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt[4]{5}}{3+2\sqrt[4]{5}}}=\sqrt[4]{\frac{(3+2\sqrt[4]{5})(3-2\sqrt[4]{5})}{(3-2\sqrt[4]{5})(3+2\sqrt[4]{5})}}=1. \blacksquare$$

1.11.5. 4. ● Воспользоваться равенством $8\sqrt{5}+16=(\sqrt{5}+1)^3$.

1.11.6. ● Воспользоваться формулой $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

1.11.7. □ Разложим заданное число на множители, используя формулу суммы кубов: $2^{12}+5^9=(2^4)^3+(5^3)^3=(2^4+5^3)(2^8-2^4\cdot5^3+5^6)=141\cdot(2^8-2^4\cdot5^3+5^6)$. Поскольку $2^{12}+5^3\neq141$, то число 141 — нетривиальный делитель заданного числа. ■

1.11.8. ● Дополнить число $2^{10}+5^{12}$, т. е. $(2^5)^2+(5^6)^2$, до квадрата суммы, используя формулу $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$. **1.11.9.** ● Заметить, что $8n^3-12n^2+6n+63=(8n^3-12n^2+6n-1)+(63+1)=(2n-1)^3+4^3$. **1.11.10.** ● Воспользоваться формулой $n^3-6n^2+12n+117=(n-2)^3+125$.

1.11.11. $(n^2+n+1)(n^2-n+1)(n^2+\sqrt{3}n+1)(n^2-\sqrt{3}n+1)$. □ Дополним исходное выражение до полного квадрата: $1+n^4+n^8=\left(1+2n^4+(n^4)^2\right)-n^4=$ $=(1+n^4)^2-n^4$. Далее, воспользуемся формулой разности квадратов: $(1+n^4)^2-(n^2)^2=(1+n^4+n^2)\cdot(1+n^4-n^2)$. Далее повторим этот прием для каждой из скобок: $1+n^4+n^2=(1+n^2)^2-n^2=(1+n^2+n)\cdot(1+n^2-n)$, $1+n^4-n^2=(1+n^2)^2-3n^2=(1+n^2-\sqrt{3}n)\cdot(1+n^2+\sqrt{3}n)$. Таким образом, $1+n^4+n^8=(n^2+n+1)(n^2-n+1)(n^2+\sqrt{3}n+1)(n^2-\sqrt{3}n+1)$. ■

1.11.12. $(x+1)\left(x^2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)$. ● Воспользовавшись формулой $1+x^5=(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)$, привести исходное выражение к виду $(1+x)x^2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1\right)$, или $(1+x)x^2\left(\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1\right)$. Далее, обозначив $y=x+\dfrac{1}{x}$, разложить последний множитель. **1.11.13.** $1991=$ $=11\cdot181$. **1.11.14.** -10. ● Обозначим $N=\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{|40\sqrt{2}+57|}$. Поскольку $\sqrt{|40\sqrt{2}+57|}>\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}$, то N — отрицательное (и целое по условию) число. Далее найти N^2, учитывая, что $|40\sqrt{2}-57|=57-40\sqrt{2}$.

2. Алгебраические уравнения

2.1.1. $-6<k<3$. □ Найдем дискриминант уравнения: $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-3(-k+6)=$ $=k^2+3k-18$. Уравнение не имеет корней, когда $D<0$, т. е. $k^2+3k-18<0$.

Решая это неравенство, сначала найдем корни уравнения $k^2 + 3k - 18 = 0$. Его дискриминант — $D = 3^2 + 4 \cdot 18 = 81 = 9^2$, отсюда $k_1 = \frac{-3-9}{2} = -6$, $k_2 = \frac{-3+9}{2} = 3$. Изобразим график функции $y = k^2 + 3k - 18$ (рис. 1). Очевидно, $k^2 + 3k - 18 < 0$ при $-6 < k < 3$. ■

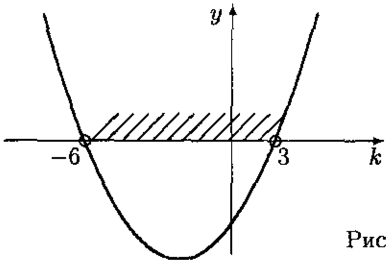


Рис. 1

2.1.2. $(-\infty; -6) \cup (3; +\infty)$. ● См. номер 2.1.1. Надо найти p, при которых $D > 0$.

2.1.3. $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$. □ Из условия следует, что $D = 0$, и что $a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0$, а также, что $a + b + c = 1$. Так как $D = b^2 - 4ac$, то получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac = 0, \\ a + b + c = 1, \\ a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} b^2 - 4ac = 0, \\ a + b + c = 1, \\ a - b + c = 0. \end{cases}$$

Вычитая 3-е уравнение из 2-го, получим $2b = 1$, откуда $b = \frac{1}{2}$. Подставим это значение в 1-е и 3-е уравнения и получим

$$\begin{cases} \frac{1}{4} - 4ac = 0, \\ a - \frac{1}{2} + c = 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} ac = \frac{1}{16}, \\ a + c = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} - c, \\ \left(\frac{1}{2} - c\right) \cdot c = \frac{1}{16}. \end{cases}$$

Решая второе уравнение этой системы — $\left(\frac{1}{2} - c\right) \cdot c = \frac{1}{16}$, получим единственный корень $c = \frac{1}{4}$, откуда $a = \frac{1}{4}$. ■

2.1.4. 4. □ При $a = 3$ получаем уравнение $2x - 2 = 0$, имеющее один корень $x = 1$. *При $a \neq 3$ получаем квадратное уравнение*, имеющее равные корни при условии $D = 0$, или $\frac{D}{4} = 0$, т. е. $1^2 - (a-3)(3a-11) = 0$, откуда $3a^2 - 20a + 32 = 0$. Это квадратное уравнение имеет два корня $a_1 = \frac{8}{3}$ (не является целым) и $a_2 = 4$. ■

2.1.5. -3. □ Подставляя в уравнение значение 3 вместо x, получим уравнение $2 \cdot 3^2 + a \cdot 3 + 3a = 0$, откуда $a = -3$. ■

2.1.6. 15. ● Аналогично номеру 2.1.5. **2.1.7.** 3. ● Подставив в уравнение значение $x = 3$, получить уравнение $a(a - 3) = 0$.

2.1.8. 0,16. □ По теореме Виета $x_1 + x_2 = -(-5) = 5$, $x_1 \cdot x_2 = 4$, откуда $\frac{x_1 \cdot x_1}{(x_1 + x_2)^2} = \frac{4}{5^2} = \frac{4}{25} = 0{,}16$. ■

2.1.9. 4. ● $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$. **2.1.10.** 3. ● $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

2.1.11. 1. □ По теореме Виета $x_1 + x_2 = -(-2) = 2$, $x_1x_2 = q$, и по условию $2x_1 + x_2 = 3$. Получаем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1x_2 = q. \end{cases}$$

Из 1-го и 2-го уравнений находим $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ и, подставляя эти значения в 3-е уравнение, получим $q = 1$. ■

2.1.12. $-\frac{5}{2}$; $\frac{5}{2}$. ● По теореме Виета $x_1+x_2 = -p$, $x_1x_2 = 1$, по условию $x_1 = 4x_2$. Решая систему

$$\begin{cases} x_1 = 4x_2, \\ x_1x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = -p, \end{cases}$$

получим $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2},\ p = -\frac{5}{2}$ или $x_1 = -2,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ p = \frac{5}{2}$.

2.1.13. $cx^2 + bx + a = 0$. □ По теореме Виета $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Уравнение, имеющее корни $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ выглядит так: $\left(x - \frac{1}{x_1}\right)\left(x - \frac{1}{x_2}\right) = 0$, или $x^2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)x + \frac{1}{x_1x_2} = 0$, т. е. $x_2 - \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}x + \frac{1}{x_1x_2} = 0$. Подставляя вместо x_1x_2 значение $\frac{c}{a}$, а вместо $x_1 + x_2$ — значение $-\frac{b}{a}$, получим уравнение

$$x^2 - \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \cdot x + \frac{1}{\frac{c}{a}} = 0,$$ или $x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$, откуда $cx^2 + bx + a = 0$. ■

2.1.14. -5. ● Условие равносильно системе:

$$\begin{cases} x_1x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ \frac{D}{4} \geqslant 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} \frac{5}{5} = 1 > 0 & \text{— верно при любых } k, \\ -\frac{2k}{5} > 0 & \iff k < 0, \\ k^2 - 25 \geqslant 0 & \iff k \in (-\infty; -5] \cup [5; +\infty), \end{cases} \implies k \leqslant -5.$$

2.2.1. $x = -0{,}25$. □ Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 4x^2 - 7x - 2 = 0, \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 2 \quad \text{или} \quad x = -0{,}25, \\ x \neq 3, \quad x \neq 2, \end{cases}$$

откуда $x = -0{,}25$. ■

2.2.2. $x = 6$. □ Решая уравнение, получим $2(x + 3) = x(x - 3)$ (при условии $x \neq 3$, $x \neq -3$), т. е. $x^2 - 5x - 6 = 0$, откуда $x = 6$ или $x = -1$. ■

2.2.3. $x = -2$. ● Приведя дроби к общему знаменателю, записать уравнение в виде $\frac{5x^2 + 4x + 8}{x^2 - x - 2} = 5$, т. е. $\begin{cases} 5x^2 + 4x + 8 = 5(x^2 - x - 2), \\ x^2 - x - 2 \neq 0, \end{cases}$ откуда $x = -2$.

2.2.4. $x_1 = -\sqrt{\frac{10}{3}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{10}{3}}$. □ Преобразуем левую часть уравнения к виду:

$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{3x+3}{3x+2}}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{3x+2}{3x+3}} = \dfrac{1}{\dfrac{3x+3+3x+2}{3x+3}} = \dfrac{3x+3}{6x+5}$. *Исходное уравнение* запишется в виде: $\dfrac{3x+3}{6x+5} = \dfrac{3x^2+11x+10}{(6x+5)(6x-5)} - \dfrac{3-2x}{6x-5}$, или, приводя обе части к общему знаменателю, получим:

$$\frac{(3x+3)(6x-5)}{(6x+5)(6x-5)} = \frac{3x^2+11x+10-(3-2x)(6x+5)}{(6x+5)(6x-5)},$$

откуда $(3x+3)(6x-5) = 15x^2+3x-5$, т.е. $3x^2 = 10$, т.е. $x = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ или $x = -\sqrt{\dfrac{10}{3}}$ (при этом $6x+5 \neq 0$ и $6x-5 \neq 0$). ■

2.2.5. $x = 1$. **2.2.6.** $x = 3$. ● Привести все дроби к общему знаменателю $x(x-2)(x+2)$. **2.2.7.** $x = -4$. ● Привести все дроби к общему знаменателю и заметить, что $(x-1)(x^3-1) = (x-1)^2(x^2+x+1)$.

2.2.8. $x = 7$. □ Преобразуем левую часть уравнения: $\dfrac{x^3+64}{16+4x} = \dfrac{x^2-4x+16}{4}$ при $x \neq -4$, откуда $\dfrac{x^2-4x+16}{4} = 11 - \dfrac{x}{4}$, т.е. $x^2-4x+16 = 44-x$, или $x^2-3x-28 = 0$. *Отсюда* $x = 7$ *или* $x = -4$ *(не подходит)*. ■

2.2.9. $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$. □ Сделав замену $t = \dfrac{x^2+1}{x}$, получим уравнение $t + \dfrac{1}{t} = 2{,}9$, т.е. $t^2 - 2{,}9t + 1 = 0$, откуда $t = 0{,}4$ или $t = \dfrac{5}{2}$. При $t = 0{,}4$ получим уравнение $\dfrac{x^2+1}{x} = 0{,}4$, т.е. $x^2 - 0{,}4x + 1 = 0$ с отрицательным дискриминантом. При $t = \dfrac{5}{2}$ получим уравнение $\dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{5}{2}$, т.е. $2x^2-5x+2 = 0$, откуда $x = 2$ или $x = 0{,}5$. ■

2.2.10. $x_1 = -1$, $x_2 = 0{,}5$. ● Сделать замену $t = \dfrac{2x+1}{x}$. **2.2.11.** $b = 3$. ● Выразив из исходного уравнения $x = \dfrac{b^2-9b+15}{2-b}$ (при $b \neq 2$), решить неравенство $\dfrac{b^2-9b+15}{2-b} \geqslant 3 \quad (b \in (-\infty; 2) \cup \{3\})$. **2.2.12.** $a = 2$.

2.3.1. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. □ $x^2 - 4 = 0$ или $x + 1 = 0$, откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$. Отбросим значение $x = -2$, не входящее в ОДЗ $(x \geqslant -1)$. ■

2.3.2. $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. **2.3.3.** $x = 3$. **2.3.4.** $x_1 = -\sqrt{7}$, $x_2 = 2$. **2.3.5.** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

2.3.6. $x = 1$. □ Возведем обе части уравнения в квадрат: $x^2 + 8 = 4x^2 + 4x + 1$, т.е. $3x^2 + 4x - 7 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{7}{3}$. При проверке отбросим значение $x = -\dfrac{7}{3}$. ■

2.3.7. $x = 7$. **2.3.8.** $x = -1$. **2.3.9.** $x = 5$. **2.3.10.** $x = -1$.

2.3.11. $x = 1$. □ Перенеся x в правую часть уравнения, возведем обе части уравнения в квадрат; получившееся квадратное уравнение имеет корни $x = 1$ и $x = 4$. При проверке отбросим значение $x = 4$. ■

2.3.12. $x = 6$. **2.3.13.** $x = -1$. **2.3.14.** $x = 2$. ● Перенести выражение $x - 3$ в правую часть уравнения, а затем возвести обе части уравнения в квадрат.

2.3.15. $x = 0$. **2.3.16.** $x = 7$. ● Записать уравнение в виде $x - 4 = \sqrt{x+2}$ и возвести обе части уравнения в квадрат.

2.3.17. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. □ В обеих частях уравнения выделим множитель x : $x\sqrt{36x+1261} = x(18x-17)$. Значение $x = 0$ — решение исходного уравнения. При $x \neq 0$ разделим обе части уравнения на x, а затем возведем их в квадрат: $36x + 1261 = 324x^2 - 612x + 289$, т. е. $324x^2 - 648x - 1172 = 0$, откуда $x = 3$, $x = -1$ (это значение при проверке отбросим). ■

2.3.18. $x_1 = 0$, $x_2 = 5$.

2.3.19. $x = -\sqrt{3}$. □ После возведения в квадрат получим биквадратное уравнение $x^4 - 2x - 5 = x^2 - 2x + 1$, т. е. $(x^2)^2 - x^2 - 6 = 0$, откуда $x^2 = 3$ или $x^2 = -2$ (не подходит), значит, $x = -\sqrt{3}$ или $x = \sqrt{3}$ (это значение отбросим при проверке). ■

2.3.20. $x = 3$. □ Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$3x - 5 - 2\sqrt{3x-5}\sqrt{4-x} + 4 - x = 1;$$

запишем уравнение в таком виде: $2(x-1) = 2\sqrt{3x-5}\sqrt{4-x}$. Разделим обе части уравнения на 2, возведем их в квадрат и получим квадратное уравнение: $x^2 - 2x + 1 = -3x^2 + 17x - 20$, или $4x^2 - 19x + 21 = 0$. Отсюда $x = 3$ или $x = \frac{7}{4}$ (это значение отбросим при проверке). ■

2.3.21. $x = -1$. **2.3.22.** $x = 20$. **2.3.23.** $x = 2$. **2.3.24.** $x = 6$. **2.3.25.** $x = 3$.
2.3.26. $x = 5$. ● После возведения в квадрат обеих частей уравнения оставить слева выражение $2\sqrt{x^2-x-11}$, разделить обе части уравнения на 2 и возвести в квадрат.

2.3.27. $x = 1288$. □ Сделаем замену $t = (x+8)^{\frac{1}{4}}$. Получим квадратное уравнение $2t^2 = 9t + 18$. Отсюда $t_1 = 6$, $t_2 = -\frac{3}{2}$ (это значение отбросим, т. к. $t > 0$). Решая уравнение $(x+8)^{\frac{1}{4}} = 6$, получим значение $x = 1288$. ■

2.3.28. $x = 64$. ● Сделать замену $t = x^{\frac{1}{6}}$. **2.3.29.** $x_1 = -7$, $x_2 = 7$. ● Сделать замену $t = \sqrt[4]{x^2+32}$. **2.3.30.** $x_1 = -5$, $x_2 = 5$. ● Сделать замену $t = \sqrt{x^2+11}$. **2.3.31.** $x_1 = -4$, $x_2 = 4$. ● Сделать замену $t = \sqrt{x^2+20}$ (тогда $t^2 = x^2 + 20$ и $x^2 = t^2 - 20$) и получить уравнение $t + t^2 - 20 = 22$.
2.3.32. $z_1 = -6$, $z_2 = 7$. ● Сделать замену $t = \sqrt{z^2 - z - 42}$. **2.3.33.** $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. ● Перенеся все слагаемые в левую часть уравнения, получим уравнение $x^2 + 2x - 12 + \sqrt{x^2+2x+8} = 0$. Сделав замену $t = \sqrt{x^2+2x+8}$ (тогда $t^2 = x^2+2x+8$ и $x^2+2x = t^2-8$), получим квадратное уравнение $t^2+t-20 = 0$.
2.3.34. $x = 4$. ● Сделать замену $t = \sqrt{x^2+5x+28}$. **2.3.35.** $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{6}$.
● Сделав замену $t = \sqrt{\frac{2x}{1+2x}}$ получим уравнение $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$. Умножая обе части уравнения на $2t$ и перенеся все слагаемые в левую часть, получим квадратное уравнение $2t^2 - 5t + 2 = 0$. **2.3.36.** $x = 40$. ● Сделать замену $t = (2x+1)^{\frac{1}{4}}$.
2.3.37. $x = 5$. ● Сделать замену $t = \sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}$.

2.3.38. $x = 0$. □ Возведя обе части исходного уравнения в куб, получим уравнение:

$$3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)^2\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)^2 + 1 + \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} = 8,$$

т. е. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right) = 2$. Заменяя выражение в скобках на 2 (из условия), получим уравнение $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=1$, т. е. $(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})=1$, $1-x=1$, $x=0$. ■

2.3.39. $x=16$. ● Сделать замену $t=3+\sqrt{x}$. **2.3.40.** $x=49$. **2.3.41.** $x_1=-\frac{15}{4}$, $x_2=-3$, $x_3=-\frac{7}{4}$. ● Сделать замену $t=\sqrt{x+4}$.

2.4.1. $x_1=-4$, $x_2=7$. □ Уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $2x-3=11$ *или* $2x-3=-11$, т. е. $2x=14$ *или* $2x=-8$, откуда $x=7$ или $x=-4$. ■

2.4.2. $x=-1$. □ Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\frac{x-1}{x+3}=1$ или $\frac{x-1}{x+3}=-1$. Если $\frac{x-1}{x+3}=1$, то $x-1=x+3$, т. е. $-1=3$ — неверно ни при каком значении x. Если же $\frac{x-1}{x+3}=-1$, то $x-1=-x-3$, т. е. $x=-1$. ■

2.4.3. $x_1=3$, $x_2=-7$. ● Графическое решение представлено на рисунке 2:

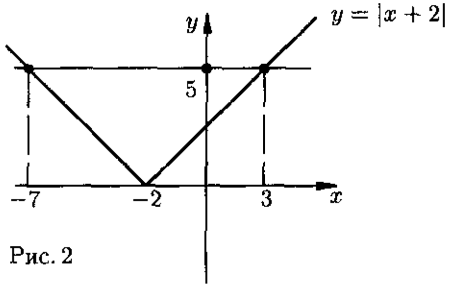


Рис. 2

2.4.4. $x=-0{,}3$. □ Уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\text{а)}\begin{cases} x-0{,}3\geqslant 0\\ 0{,}6(x-0{,}3)=x^2+0{,}27\end{cases}\quad\text{или}\quad\text{б)}\begin{cases} x-0{,}3<0\\ -0{,}6(x-0{,}3)=x^2+0{,}27,\end{cases}\quad\text{т. е.}$$

$$\text{а)}\begin{cases} x\geqslant 0{,}3\\ x^2-0{,}6x+0{,}45=0\end{cases}\quad\text{или}\quad\text{б)}\begin{cases} x<0{,}3\\ x^2+0{,}6x+0{,}09=0.\end{cases}$$

У системы а) нет решений, т. к. дискриминант квадратного уравнения отрицателен. Решим уравнение: $x^2+0{,}6x+0{,}09=0$, или $(x+0{,}3)^2=0$, т. е. $x=-0{,}3$. Это значение удовлетворяет неравенству $x<0{,}3$ и, следовательно, является решением системы б). ■

2.4.5. $x=5$. □ Уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $x^2-5x+4=4$ или $-(x^2-5x+4)=4$, т. е. $x^2-5x=0$ или $-x^2+5x-8=0$ (дискриминант отрицателен), значит, $x=0$ или $x=5$. Наибольший корень $x=5$. ■

2.4.6. $x_1=\frac{11-\sqrt{29}}{2}$, $x_2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. □ Исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\text{а)}\begin{cases} x\geqslant 3,\\ x^2+4(x-3)-7x+11=0\end{cases}\quad\text{или}\quad\text{б)}\begin{cases} x<3,\\ x^2-4(x-3)-7x+11=0.\end{cases}$$

Решим уравнение из системы а): $x^2+4x-12-7x+11=0$, т. е. $x^2-3x-1=0$; найдем дискриминант $D=9+4=13$, откуда $x=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ или $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Условию $x \geqslant 3$ удовлетворяет только значение $x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ — это и есть решение системы а).

Решим уравнение из системы б): $x^2-4x+12-7x+11=0$, т. е. $x^2-11x+23=0$; найдем дискриминант $D = 121 - 4 \cdot 23 = 29$, откуда $x = \dfrac{11-\sqrt{29}}{2}$ или $x = \dfrac{11+\sqrt{29}}{2}$. Условию $x<3$ значение $x = \dfrac{11+\sqrt{29}}{2}$, очевидно, не удовлетворяет. Проверим, верно ли неравенство $x = \dfrac{11-\sqrt{29}}{2} < 3$:

$$11-\sqrt{29} < 6 \iff 5 < \sqrt{29} \text{ — верно.}$$

Итак, значение $x = \dfrac{11-\sqrt{29}}{2}$ является решением системы б). ■

2.4.7. $x=2$. □ Из условия следует, что

$$x-2=0 \quad \text{или} \quad |x|+\sqrt{3}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

Отсюда

$$x=2 \quad \text{или} \quad |x| = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{3} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}.$$

Сравним выражения $1+\sqrt{2}$ и $\sqrt{6}$. Возведем оба эти выражения в квадрат: $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$, и $\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6$; вычитая из каждого по 3, получим $2\sqrt{2}$ и 3 соответственно. Так как $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$, а $3^2 = 9$, то $2\sqrt{2} < 3$ и, следовательно, $1+\sqrt{2} < \sqrt{6}$, т. е. $1+\sqrt{2}-\sqrt{6} < 0$. Таким образом, уравнение $|x| = \dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ не имеет решений. ■

2.4.8. $x=1$. □ Уравнение равносильно совокупности 2-х систем:

$$\begin{cases} 2-x \geqslant 0, \\ 2-x = 5-4x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2-x \leqslant 0, \\ -(2-x) = 5-4x, \end{cases} \quad \text{т. е.}$$

$$\begin{cases} x \leqslant 2, \\ 3x = 3 \iff x=1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 5x = 7 \iff x = \dfrac{7}{5}. \end{cases}$$

$$x=1 \qquad\qquad \varnothing. \quad ■$$

2.4.9. $x = \dfrac{3}{4}$. □ Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4x-3 \geqslant 0, \\ 4x-3 = 4x-3, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x \geqslant \dfrac{3}{4}, \\ 0=0 \text{ — верно при любых значениях } x. \end{cases}$$

Отсюда $x \geqslant \dfrac{3}{4}$. ■

2.4.10. $x=4$. □ Исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 8x \geqslant 0, \\ -x^2-16 = 8x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 8x \geqslant 0, \\ -x^2-16 = -8x, \end{cases} \quad \text{т. е.}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2+8x+16=0 \iff \\ \iff (x+4)^2=0 \iff x=-4, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2-8x+16=0 \iff \\ \iff (x-4)^2=0 \iff x=4. \end{cases}$$

$$\varnothing \qquad\qquad\qquad\qquad x=4. \ ■$$

2.4.11. $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=3$. ● Сделать замену $t=|x|$. **2.4.12.** $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{4}{3}$. ● Сделав замену $t=|x+1|$, решить квадратное уравнение $\left(3t+\frac{1}{3}\right)^2=6t^2+\frac{10}{9}$. **2.4.13.** $x_1=-3$, $x_2=3$. ● Сделав замену $t=|x|$, решить квадратное уравнение: $2t^2-6=(t+3)(t-1)$ (при $t>0$, $t\neq 1$). **2.4.14.** $x=-3$. ● Уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $3x^2+5x-9=6x+15$ и $3x^2+5x-9=-(6x+15)$.

2.4.15. $x\in[-2;3]$. □ Уравнение равносильно совокупности трех систем:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x<-2, \\ -(x+2)-(x-3)=5, \end{cases} \\ &\begin{cases} x\in[-2;3), \\ (x+2)-(x-3)=5, \end{cases} \\ &\begin{cases} x\geqslant -3, \\ (x+2)+(x-3)=5, \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x<-2, \\ -2x+1=5 \iff x=-2, \end{cases} \\ &\begin{cases} x\in[-2;3), \\ 5=5 \text{ — при любом } x, \end{cases} \\ &\begin{cases} x\geqslant -3 \\ 2x=6 \iff x=3. \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{aligned} &x\in\varnothing, \\ &x\in[-2;3), \\ &x=3. \end{aligned}\right.$$

Таким образом, $x\in[-2;3]$. ■

2.4.16. $x_1=-7$, $x_2=-1$. □ *Исходное уравнение равносильно совокупности* трех систем:

$$\begin{cases} x<-\frac{5}{2}, \\ -(2x+5)=-x+2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\in\left[-\frac{5}{2};0\right), \\ 2x+5=-x+2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\geqslant 0, \\ 2x+5=x+2, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x<-\frac{5}{2}, \\ x=-7, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\in\left[-\frac{5}{2};0\right), \\ 3x=-3 \iff x=-1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\geqslant 0, \\ x=-3. \end{cases}$$

$$x=-7 \qquad\qquad x=-1 \qquad\qquad \varnothing. \ ■$$

2.4.17. $x=-1$. □ Уравнение равносильно совокупности трех систем:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x<-1, \\ -(x-3)-2(x+1)=4, \end{cases} \\ &\begin{cases} x\in[-1;3), \\ -(x-3)+2(x+1)=4, \end{cases} \\ &\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x-3+2(x+1)=4, \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x<-1, \\ -3=3x \iff x=-1, \end{cases} \\ &\begin{cases} x\in[-1;3), \\ x=-1 \end{cases} \\ &\begin{cases} x\geqslant 3 \\ 3x=5 \iff x=\frac{5}{3}. \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{aligned} &x\in\varnothing, \\ &x=-1, \\ &x\in\varnothing. \end{aligned}\right. \ ■$$

2.4.18. $x>3$. ● *Исходное уравнение равносильно совокупности 3-х систем:*

$$\begin{cases} x<2 \\ \dfrac{3-x}{2-x-1}=1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\leqslant x<3 \\ \dfrac{3-x}{x-2-1}=1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\geqslant 3 \\ \dfrac{x-3}{x-2-1}=1. \end{cases}$$

2.4.19. $x = 5$, $x \in [1; 2]$. □ Исходное уравнение равносильно совокупности четырех систем. Решим их последовательно:

а) $\begin{cases} x < 1 \\ -(x-1)+2(x-2)-3(x-3)=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ -2x+16=4 \Longleftrightarrow x = 1; \end{cases} \Longrightarrow x \in \varnothing;$

б) $\begin{cases} 1 \leqslant x < 2 \\ x-1+2(x-2)-3(x-3)=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x < 2 \\ 4 = 4 \text{ — верно при всех } x \end{cases}$

$\Longrightarrow 1 \leqslant x < 2;$

в) $\begin{cases} 2 \leqslant x < 3 \\ x-1-2(x-2)-3(x-3)=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2 \leqslant x < 3 \\ -4x+12=4 \Longleftrightarrow x = 2 \end{cases} \Longrightarrow \quad x = 2;$

г) $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ x-1-2(x-2)+3(x-3)=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3 \\ 2x-6=4 \Longleftrightarrow x = 5 \end{cases} \Longrightarrow x = 5.$

Итак, $1 \leqslant x < 2$ или $x = 2$ или $x = 5$. ■

2.4.20. $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. □ Записав уравнение в виде $\big||3-x| - x + 1\big| = 6 - x$, получим равносильную ему совокупность двух систем:

$$\begin{cases} 6 - x \geqslant 0 \\ |3-x| - x + 1 = 6 - x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 6 - x \geqslant 0, \\ |3-x| - x + 1 = x - 6, \end{cases} \quad \text{т. е.}$$

$$\begin{cases} x \leqslant 6 \\ |3-x| = 5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leqslant 6 \\ |3-x| = 2x - 7 \end{cases} \quad \text{откуда}$$

$$\begin{cases} x \leqslant 6, \\ \left[\begin{array}{l} 3 - x = 5 \\ 3 - x = -5; \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leqslant 6 \\ 2x - 7 \geqslant 0 \\ 3 - x = 2x - 7 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leqslant 6, \\ 2x - 7 \geqslant 0 \\ 3 - x = 7 - 2x, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x \leqslant 6, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 8; \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leqslant 6 \\ x \geqslant \frac{7}{2} \\ x = \frac{10}{3} \left(< \frac{7}{2}\right) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leqslant 6 \\ x \geqslant \frac{7}{2} \\ x = 4. \end{cases}$$

$$x = -2 \quad \text{или} \quad \varnothing \quad \text{или} \quad x = 4. \quad ■$$

2.5.1. 1,6. □ Выразим из 1-го уравнения $y = 1 - 2x$ и подставим его во второе уравнение: $x - 2(1 - 2x) + 5 = 0$, $x - 2 + 4x + 5 = 0$, $5x + 3 = 0$, $x = -\frac{3}{5} = -0{,}6$. Тогда $y = 1 - 2(-0{,}6) = 1 + 1{,}2 = 2{,}2$. Отсюда $x + y = -0{,}6 + 2{,}2 = 1{,}6$. ■

2.5.2. $(3; 6)$.

2.5.3. 75. □ Умножим 1-е уравнение на 5, 2-е на 2 и вычтем 2-е из 1-го (при этом сократится x): $5 \cdot 3y - 2 \cdot 2y = 5 \cdot 165 - 2 \cdot 330$, $11y = 165$, $y = 15$. Теперь умножим 1-е уравнение на 2, 2-е на 3 и вычтем 1-е из 2-го (при этом сократится y): $3 \cdot 5x - 2 \cdot 2x = 3 \cdot 330 - 2 \cdot 165$; $11x = 660$, $x = 60$, отсюда $x + y = 60 + 15 = 75$. ■

2.5.4. 2.

2.5.5. $(1;2;1)$. ☐ Выразим из 1-го уравнения x и подставим его во 2-е и 3-е *уравнения:*

$$\begin{cases} x = 8 - 2y - 3z, \\ 3(8 - 2y - 3z) + y + 2z = 7, \\ 2(8 - 2y - 3z) + 3y + z = 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 8 - 2y - 3z, \\ -5y - 7z = -17, \\ -y - 5z = -7. \end{cases}$$

Выразим y из 3-го уравнения и подставим во 2-е:

$$\begin{cases} x = 8 - 2y - 3z, \\ -5(7 - 5z) - 7z = -17, \\ y = 7 - 5z. \end{cases}$$

Отсюда $18z = 18$, $z = 1 \Longrightarrow y = 7 - 5 \cdot 1 = 2 \Longrightarrow x = 8 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$. ■
2.5.6. -1; 1. ● Решение системы $(1;-1;-1)$. **2.5.7.** 3. ● Решение системы $(-2;2;1)$. **2.5.8.** $(10;15;6)$. ● Выразить из 1-го уравнения $y = x+5$ и подставить во 2-е и 3-е уравнения. **2.5.9.** ● Вычитая из 1-го уравнения 2-е, умноженное на 2, получим: $5x - 11z = -4$. **2.5.10.** $\frac{185}{71}$. ● Из первых трех уравнений найти $x = \frac{120}{71}$, $y = -\frac{65}{71}$, $z = \frac{10}{71}$.
2.5.11. $\left(\frac{2}{17}; \frac{76}{17}\right)$, $(2;4)$. ☐ Выразим из 1-го уравнения $x = 18 - 4y$ и подставим во 2-е уравнение: $(18 - 4y)^2 + y^2 = 20$; $17y^2 - 144y + 304 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = \frac{76}{17}$ и $y_2 = 4$. Соответственно, $x_1 = 18 - 4 \cdot \frac{76}{17} = \frac{2}{17}$ *и* $x_2 = 18 - 4 \cdot 4 = 2$. ■
2.5.12. $(-6;-2)$, $(-4;-4)$. ● Выразить x из 2-го уравнения и подставить в 1-е.
2.5.13. $(4;1)$, $\left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)$. **2.5.14.** $(-3;-2)$, $(3;+2)$. ● Из 1-го уравнения имеем $x + y = 5(x - y)$. Выразить x через y и подставить во 2-е уравнение.
2.5.15. -6.
2.5.16. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$; $(2;y)$, $y \in \mathbb{R}$. ☐ *Вычитая* 1-е *уравнение из* 2-го, *получим* квадратное уравнение $2x^2 - 3x - 2 = 0$, корни $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 2$. Подставляя значение $x_1 = -\frac{1}{2}$ в 1-е уравнение, получим $y = \frac{9}{4}$. Подставляя значение $x_2 = 2$ в 1-е и 2-е уравнения, получаем в обоих случаях тождество $0 = 0$. Значит, решением является любая пара $(2;y)$, $y \in \mathbb{R}$. ■
2.5.17. $(4;3)$, $(4;-3)$, $(-5;0)$. ☐ Вычитая из 1-го уравнения 2-е, получаем уравнение $x^2 + x = 20$, корни $x_1 = 4$ и $x_2 = -5$. Отсюда $y^2 = 9$ или $y^2 = 0$. ■
2.5.18. $(-6;-270)$. ☐ Записав систему в виде $\begin{cases} xy + 90x + 4y = 0, \\ xy + 45x + 5y = 0, \end{cases}$ вычтем из 1-го уравнения 2-е: $45x - y = 0$, $y = 45x$. Это выражение для y подставим в 1-е уравнение: $x \cdot 45x + 90x + 4 \cdot 45x = 0$, $45x^2 + 270x = 0$, $x(x + 6) = 0$, $x_1 = 0$ или $x_2 = -6$. Соответственно, $y_1 = 0$ или $y_2 = -270$. ■
2.5.19. $(-2;2)$, $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $(6;2)$. ☐ Заметив, что 1-е уравнение системы — однородное, разделим обе его части на y^2 : $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) - 3 = 0$, корни $\frac{x}{y} = -1$ и $\frac{x}{y} = 3$, т. е. $x = -y$ или $x = 3y$. Если $x = -y$, то 2-е уравнение

запишем в виде: $(-y)^2-(-y)y-2(-y)-3y=6$, $2y^2-y-6=0$, $y_1=2$, $y_2=-\frac{3}{2}$, соответственно $x_1=-2$ и $x_2=\frac{3}{2}$. При $x=3y$ второе уравнение запишем в виде: $(3y)^2-3y\cdot y-2\cdot 3y-3y=6$, $2y^2-3y-2=0$, откуда $y_3=2$, $x_3=6$ и $y_4=-\frac{1}{2}$, $x_4=-\frac{3}{2}$. ■

2.5.20. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. □ Умножая 1-е уравнение на 2, а 2-е на 3, вычтем из 2-го уравнения 1-е: $y^2-xy-2x^2=0$. Это однородное уравнение; разделив обе части на x^2, получим квадратное уравнение $\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}-2=0$, решения которого $\frac{y}{x}=2$ и $\frac{y}{x}=-1$, т.е. $y=2x$ или $y=-x$. Подставляя $y=2x$ во 2-е уравнение, получим $4x^2-6x^2=2$ — решений нет. Подставляя $y=-x$ во 2-е уравнение, получим $x^2+3x^2=2$, т.е. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; соответственно $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

2.5.21. $(3;5)$, $(-3;-5)$, $(8;-5)$, $(-8;5)$.

2.5.22. $(2;1)$, $(-1;-2)$. □ Разделив 1-е уравнение на 2-е, получим уравнение $x^2+xy+y^2=7$. Выражая x через y из 2-го уравнения ($x=1+y$), подставим его в полученное уравнение: $(1+y)^2+(1+y)y+y^2=7$, т.е. $3y^2+3y-6=0$, $y^2+y-2=0$. Корни $y_1=-2$, $y_2=1$, которым соответствуют $x_1=-1$ и $x_2=2$. ■

2.5.23. $(5;-1)$, $(1;-5)$. **2.5.24.** $(1;1)$. ● Сделать замену $x+y=u$, $xy=v$. Учесть, что $x^3+y^3=(x+y)\Big((x+y)^2-3xy\Big)$. **2.5.25.** $(4;3)$, $(-3;-4)$. ● Разделить 2-е уравнение $(x-y)(x^2+xy+y^2)=37$ на 1-е. **2.5.26.** $(6;1)$, $(1;6)$. ● Разделив 2-е уравнение на 1-е, получить уравнение $(x-y)(x-y)=25$.

2.5.27. 1; $-2{,}75$. □ Из 2-го уравнения системы

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{y+1}=2, \\ \dfrac{1}{x+3}=\dfrac{2}{y+2}; \end{cases}$$

выразим $y=2x+4$ и подставим в 1-е уравнение: $\frac{1}{x+2}+\frac{3}{2x+5}=2$;

$$\frac{2x+5+3(x+2)}{(x+2)(2x+5)}=2;\quad 5x+11=2(x+2)(2x+5);\quad 4x^2+13x+9=0.$$

Корням $x_1=-1$ и $x_2=-\frac{9}{4}$ соответствуют значения $y_1=2$ и $y_2=-\frac{1}{2}$ и суммы $x_1+y_1=1$ и $x_2+y_2=-\frac{11}{4}=-2{,}75$. ■

2.5.28. 1; -3. ● Выразить y^2 через x из 1-го уравнения и подставить во 2-е уравнение.

2.5.29. $(3;2)$. □ Сделав замену $u=\frac{1}{x-1}$ и $v=\frac{1}{1+y}$, получим систему:

$$\begin{cases} u+2v=\dfrac{7}{6}, \\ 3u-v=\dfrac{7}{6}, \end{cases}\quad \text{откуда}$$

$u=\frac{7}{6}-2v,\ 3\left(\frac{7}{6}-2v\right)-v=\frac{7}{6};\quad \frac{7}{2}-7v=\frac{7}{6};\quad v=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.\quad u=\frac{7}{6}-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$

Значит, $v=\frac{1}{3}=\frac{1}{1+y}$, $y+1=3$; $y=2$; $u=\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}$, $x-1=2$, $x=3$. ■

2.5.30. $\left(1;-\frac{3}{2}\right)$, $(-2;3)$. ● Сделать замену $u=\frac{1}{x+y}$ и $v=x$. **2.5.31.** $\left(-\frac{7}{4};-3\right)$, $\left(-\frac{7}{6};-2\right)$. ● Сделать замену $u=\frac{1}{2x-y}$ и $v=y$. **2.5.32.** $\left(\frac{11}{13};-\frac{24}{5}\right)$. ● Сделать замену $u=\frac{1}{x+1}$ и $v=\frac{1}{y}$.

2.5.33. $(1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2};-2+\sqrt{2})$. □ Запишем первое уравнение в виде

$$x(x+1)=y(y+1),\Longrightarrow x^2+x=y^2+y,\ x^2-y^2+x-y=0=(x-y)(x+y+1),$$

откуда $x=y$ или $x=-1-y$. Из 2-го уравнения при $x=y$ имеем: $y^2+2y+1=0$ и $y=-1$ — не подходит (см. 1-е уравнение), при $x=-1-y$ имеем: $(-1-y)^2+2y+1=0$, $y^2+4y+2=0$, $y_1=-2+\sqrt{2}$, $y_2=-2-\sqrt{2}$, $x_1=1-\sqrt{2}$ и $x_2=1+\sqrt{2}$. ■

2.5.34. $(0;0)$, $\left(-\frac{6}{5},-\frac{9}{5}\right)$. **2.5.35.** 5. ● Записать 2-е уравнение системы в виде $xy(x+y)$ и сделать замену $u=x+y$, $v=xy$. **2.5.36.** $(1;4)$, $(4,1)$. ● Записать 1-е уравнение системы в виде $xy+(x+y)+1=10$ и сделать замену $u=x+y$, $v=xy$. **2.5.37.** 4. ● Сделать замену $u=x+y$, $v=xy$, учитывая, что $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$. **2.5.38.** $(3;2)$, $(-2;-3)$, $(\sqrt{10}+3;\sqrt{10}-3)$, $(3-\sqrt{10};-3-\sqrt{10})$. ● Сделать замену $u=x-y$, $v=xy$. **2.5.39.** 4. ● Сделать замену $u=x-y, v=xy$, учитывая, что $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=u^2+2v$. **2.5.40.** 4. ● Сделать замену $u=x+y$, $v=xy$, учитывая, что $x^2y+y^2x=xy(x+y)=uv$, а $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=u(u^2-3v)$.

2.5.41. $(3;1)$, $\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3}\right)$. □ Исходная система эквивалентна объединению двух систем:

$$\begin{cases}2u+v=7\\ u-v=2\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}2u+v=7\\ u-v=-2,\end{cases}\quad \text{т. е.}\quad \begin{cases}u=3\\ v=1\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}u=\frac{5}{3}\\ v=\frac{11}{3}.\end{cases}\quad ■$$

2.5.42. $\left(\frac{17}{4};-\frac{1}{8}\right)$, $\left(-\frac{23}{4};\frac{39}{8}\right)$. □ Выразив x из 2-го уравнения ($x=4-2y$), подставим это выражение в 1-е уравнение: $3|4-2y+1|+2|y-2|=20$, $3|2y-5|+2|y-2|=20$. Это уравнение эквивалентно объединению следующих трех систем:

а) $$\begin{cases}y\geqslant\frac{5}{2}\\ 3(2y-5)+2(y-2)=20\end{cases}\Longrightarrow 8y=39,\ y=\frac{39}{8};\ x=4-2\cdot\frac{39}{8}=-\frac{23}{4}.$$

б) $$\begin{cases}y\in\left[2;\frac{5}{2}\right)\\ 3(5-2y)+2(y-2)=20\end{cases}\Longrightarrow -4y=9,\ y=-\frac{9}{4}\notin\left[2;\frac{5}{2}\right),\ y\in\varnothing.$$

в) $$\begin{cases}y<2\\ 3(5-2y)+2(2-y)=20\end{cases}\Longrightarrow -8y=1,\ y=-\frac{1}{8};\ x=4-2\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{17}{4}.\ ■$$

2.5.43. $\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right)$. ● Так как $y-5=|x-1|$ (из 2-го уравнения), то $y-5\geqslant0$ и $|y-5|=y-5$. Сделать замену $u=|x-1|$, $v=|y-5|$.

2.5.44. $(4;2)$, $\left(\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$. $\square$ Из 2-го уравнения имеем $x=0$ или $\sqrt{x^2-4y^2}=0$. Подставляя $x=0$ в 1-е уравнение, получим уравнение $-y+\sqrt{-4y^2}=2$, левая часть которого имеет смысл лишь при $-4y^2 \geqslant 0$, т. е. при $y=0$, но тогда $0+0=2$ — неверно. Если же $\sqrt{x^2-4y^2}=0$, т. е. $x^2=4y^2$, $x=2y$ или $x=-2y$, то в 1-м уравнении будет $x-y=2$, т. е. $x=y+2$. Итак, имеем 2 системы:

$$\begin{cases} x=2y \\ x=y+2 \end{cases} \Longrightarrow x=4;\ y=2, \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=-2y \\ x=y+2 \end{cases} \Longrightarrow x=\frac{4}{3};\ y=-\frac{2}{3}. \ \blacksquare$$

2.5.45. $\left(0;-\frac{7}{2}\right)$, $(0;3)$, $(21;21)$.

2.5.46. $(9;2)$. $\square$ Из 1-го уравнения выразим $\sqrt{x}=9-3y$ и подставим во 2-е уравнение: $(9-3y)^2-1=(9-3y+1)y$; $12y^2-64y+80=0$, $3y^2-16y+20=0$. Корни $y_1=2$ и $y_2=\frac{10}{3}$ (не подходит в 1-е уравнение), $x=(9-3\cdot 2)^2=9$. $\blacksquare$

2.5.47. $(17;10)$, $(17;-10)$. $\bullet$ Сделав замену $u=\sqrt{2x+3y}$, $v=\sqrt{2x-3y}$, записать систему в виде $\begin{cases} u+v=10 \\ uv=16, \end{cases}$ откуда $u=2$, $v=8$ или $u=8$, $v=2$.

2.5.48. $(2;2)$. $\square$ Сделав замену $\sqrt{x+y}=u$, $\sqrt{7x+y}=v$, $x=\frac{v^2-u^2}{6}$; $y=\frac{7u^2-v^2}{6}$, запишем систему в виде

$$\begin{cases} v+u=6, \\ u-\dfrac{7u^2-v^2}{6}+\dfrac{v^2-u^2}{6}=2. \end{cases}$$

Выразим $v=6-u$ и подставим во 2-е уравнение: $u-\frac{4}{3}u^2+\frac{1}{3}(6-u)^2=2$, $-u^2-3u+10=0$, корни $u_1=2$ и $u_2=-5$ (не подходит), $v_1=4$. $\blacksquare$

2.6.1. $a=2$, $b=-8$, $c=8$. $\square$ Условие равносильно системе:

$$\begin{cases} a+b+c=2, \\ a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=0, \\ D=b^2-4ac=0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a+b+c=2, \\ 4a+2b+c=0, \\ b^2-4ac=0; \end{cases} \quad \text{т. е.}$$

$$\begin{cases} c=2-a-b, \\ 4a+2b+2-a-b=0 \iff 3a+b+2=0 \iff b=-2-3a, \\ (-2-3a)^2-4a\cdot\big(2-a-(-2-3a)\big)=0 \iff (3a+2)^2-4a(2a+4)=0. \end{cases}$$

Решим последнее уравнение системы: $a^2-4a+4=0$, т. е. $(a-2)^2=0$, откуда $a=2$, $b=-2-3\cdot 2=-8$, $c=2-2-(-8)=8$. $\blacksquare$

2.6.2. $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$. $\square$ Так как $a<0$, то произведение x_1x_2 корней квадратного уравнения, равное $\frac{2}{a}$, отрицательно, значит, второй корень x_2 отрицателен. Так как у биквадратного уравнения корни только $\pm\sqrt{x_1}$ и $\pm\sqrt{x_2}$, то действительными являются только корни $\pm\sqrt{3}$. $\blacksquare$

2.6.3. $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{4}$. ● Условие равносильно системе:

$$\begin{cases} a+b+c=1, \\ a(-1)^2+b\cdot(-1)+c=0, \\ D=b^2-4ac=0. \end{cases}$$

2.6.4. $a=6$. ● Так как дискриминант положителен при всех значениях a, то условие равносильно системе:

$$\begin{cases} x_1+x_2>0, \\ x_1x_2>0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} \dfrac{2a}{a+1}>0, \\ \dfrac{a-5}{a+1}>0. \end{cases}$$

2.6.5. $a\in\left(-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right)$. □ Условие равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}>0, \\ x_1x_2>0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 4a^4+2a^2-2>0, \\ \dfrac{1-a^2}{2}>0. \end{cases}$$

Решая квадратное неравенство $4t^2+2t-2>0$, получим $t\in(-\infty;-1)\cup\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, откуда решение биквадратного неравенства $4a^4+2a^2-2>0$ выглядит так: $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$. Решение неравенства $1-a^2>0$ выглядит так: $a\in(-1;1)$. Итак, решение системы: $a\in\left(-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right)$. ■

2.6.6. $a=-5$. ● $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$.

2.6.7. $a=-3$; $S=18$. □ Так как

$$S=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-2a)^2-2(2a^2+4a+3)=-8a-6$$

убывает на всей числовой прямой, то наибольшее значение S достигается при наименьшем значении a (таком, что $D\geqslant 0$). Так как $\frac{D}{4}=-a^2-4a-3\geqslant 0$ при $a\in[-3;-1]$, то наименьшее возможное значение $a=-3$, $S=-8\cdot(-3)-6=$ $=18$. ■

2.6.8. $a=2$, $S=8$. ● $S=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. Далее аналогично номеру 2.6.7. **2.6.9.** $a=8$. ● Представить сумму кубов корней в виде: $x_1^3+x_2^3=$ $=(x_1+x_2)\big((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\big)$.

2.6.10. $S=-2a^2-8a$; $S_{\max}=6$ при $a=-3$. □ По теореме Виета $x_1+x_2=$ $=-2(a^2+4a)=S(a)$. Максимум этой функции достигается в точке $a=-2$ и равен 8. Однако должно быть $0\leqslant\frac{D}{4}=(a^2+4a)^2-(8a^3+18a^2+63)$, откуда $a\leqslant-3$ или $a\geqslant 3$. Функция $S(a)$ растет при $a\leqslant-3$ и убывает при $a\geqslant 3$, значит, остается сравнить $S(-3)$ и $S(3)$. ■

2.6.11. $a\in\{0\}\cup(2+\sqrt{3};2+\sqrt{5})$. ● При $a=0$ получим уравнение $-x=0$, имеющее единственный корень $x=0$. При $a\neq 0$ корни уравнения $x_1=\frac{1}{3a}$ и $x_2=-a(a-4)$, и условие равносильно системе: $\begin{cases} \left|\dfrac{1}{3a}\right|<1, \\ |-a^2+4a|<1. \end{cases}$

2.6.12. $k = \frac{18}{5}$. □ Условие равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{D}{4} \geqslant 0, \\ x_{\text{в}} > 0, \\ (k-3)\cdot f(0) > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} k^2 - 6k(k-3) \geqslant 0, \\ \frac{k}{k-3} > 0, \\ (k-3)\cdot 6k > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.}$$

$$\begin{cases} k \in \left[0; \frac{18}{5}\right], \\ k \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty), \\ k \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty) \end{cases} \implies k \in \left(3; \frac{18}{5}\right]. ■$$

2.6.13. $a \in \left(\frac{11}{9}; +\infty\right)$. ● Условие равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{D}{4} \geqslant 0, \\ x_{\text{в}} > 3, \\ f(3) > 0, \end{cases}$$

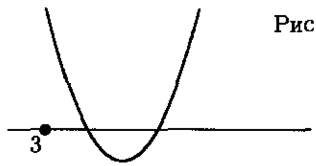


Рис. 3

$$\text{или} \quad \begin{cases} 2a - 2 \geqslant 0 \iff a \geqslant 1, \\ 3a > 3 \iff a > 1, \\ 3^2 - 6a\cdot 3 + 2 - 2a + 9a^2 > 0 \iff 11 - 20a + 9a^2 > 0 \iff \\ \qquad \iff a \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{11}{9}; +\infty\right). \end{cases}$$

Решение системы: $a > \frac{11}{9}$.

2.6.14. $b \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right]$. □ Так как дискриминант $D = 4b^2 + 4$ — положителен при любом значении b, то уравнение всегда имеет два действительных корня, и условие равносильно системе:

$$\begin{cases} x_{\text{в}} \in (-2; 2), \\ f(-2) \geqslant 0, \\ f(2) \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{т. е.}$$

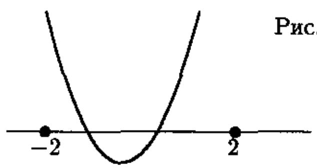


Рис. 4

$$\begin{cases} b \in (-2; 2), \\ (-2)^2 - 2b(-2) - 1 \geqslant 0, \\ 2^2 - 2b\cdot 2 - 1 \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} b \in (-2; 2), \\ 4b + 3 \geqslant 0 \iff b \geqslant -\frac{3}{4}, \\ -4b + 3 \geqslant 0 \iff b \leqslant \frac{3}{4}, \end{cases}$$

значит, $b \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right]$. ■

2.6.15. $m = 2$. ● Условие равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} \geqslant 0, \\ x_{\text{в}} \in (-2; 4), \\ f(-2) > 0, \\ f(4) > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 1 \geqslant 0, \\ -2 < m < 4, \\ m^2 + 4m + 3 > 0, \\ m^2 - 8m + 15 > 0. \end{cases}$$

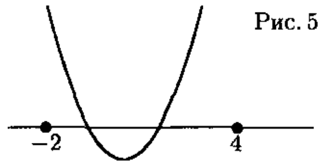


Рис. 5

2.7.1. $x_1 = -8$, $x_2 = 4$. □ Так как $(x-1)(x+5) = x^2 + 4x - 5$, и $(x-3)(x+7) = x^2 + 4x - 21$, то, делая замену $t = x^2 + 4x - 21$, получим уравнение $(t+16)t = 297$, т. е. $t^2 + 16t - 297 = 0$, откуда $t = 11$ или $t = -27$. Решим уравнение $x^2 + 4x - 21 = 11$, т. е. $x^2 + 4x - 32 = 0$, откуда $x = 4$ или $x = -8$. Решая уравнение $x^2 + 4x - 21 = -27$, получим уравнение $x^2 + 4x + 6 = 0$ с отрицательным дискриминантом, т. е. корней нет. ■

2.7.2. $x_1 = -5$, $x_2 = 0$. ● Записав исходное уравнение в виде

$$(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x + 4) = 24,$$

сделать замену $t = x^2 + 5x + 4$.

2.7.3. $a \in \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 5\right)$. □ ОДЗ исходного уравнения $x \neq 3$; решая его, *получим* $a(x+2) + 1 = 5x - 15$, *откуда* $x(a-5) = -16 - 2a$, *т. е. при* $a = 5$ получим уравнение $0 \cdot x = -26$ — решений нет, при $a \neq 5$ получим $x = \dfrac{2a+16}{5-a}$. Это решение удовлетворяет условию $x > 2$ при $\dfrac{2a+16}{5-a} > 2$, или $\dfrac{2a+16-10+2a}{5-a} > 0$, т. е. $\dfrac{4a+6}{5-a} > 0 \Longrightarrow a \in \left(-\frac{3}{2}; 5\right)$. Учитывая ОДЗ, получим условие $\dfrac{2a+16}{5-a} \neq 3$, т. е. $a \neq \frac{1}{5}$. ■

2.7.4. $k = -5$. □ Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2(kx-2) + (2x-k) = 0, \\ 2x - k \neq 0, \quad kx - 2 \neq 0, \end{cases}$$

откуда, решая уравнение $2(kx-2) + (2x-k) = 0$, получим $x = \dfrac{k+4}{2(k+1)}$ при $k \neq -1$. Это значение x будет положительным при $\dfrac{k+4}{k+1} > 0$, то есть $k \in (-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$. Наибольшее целое отрицательное значение k в этом множестве: $k = -5$. *Проверим выполнение условий* $2x - k \neq 0$ *и* $kx - 2 \neq 0$. При $k = -5$ будет $x = \frac{1}{8}$ и $2 \cdot \frac{1}{8} - (-5) \neq 0$, $(-5) \cdot \frac{1}{8} - 2 \neq 0$. ■

2.7.5. $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{(4a+3)}{8}$ при $a \notin \left\{-3, -\frac{11}{4}, -\frac{9}{4}, -\frac{1}{4}; 1\right\}$; $x = -1$ при $a \in \left\{-\frac{11}{4}, -\frac{9}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$; $x = -\frac{9}{8}$ при $a = -3$; $x = \frac{7}{8}$ при $a = 1$. □ Приводя правую и левую части уравнения к общему знаменателю, получим уравнение:

$$\frac{(x+2)(x+a) + 3 - x}{(3x-a)(x+a)} = \frac{(3x+2)(3x-a)}{(3x-a)(x+a)} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 8x^2 + x(5-4a) - (4a+3) = 0, \\ (3x-a)(x+a) \neq 0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $8x^2 + x(5-4a) - (4a+3) = 0$, найдем дискриминант: $D = (4a+11)^2 \geqslant 0$ при всех значениях a. Отсюда при $a = -\frac{11}{4}$ у квадратного уравнения один корень $x = -1$; при $a \neq -\frac{11}{4}$ — два корня $x_1 = \frac{(4a+3)}{8}$, $x_2 = -1$. Подставляя эти выражения для x во вторую строку системы, получим следующие выражения: $\frac{(4a+3)}{8} = -a$ при $a = -\frac{1}{4}$, $\frac{(4a+3)}{8} = \frac{a}{3}$ при $a = -\frac{9}{4}$ (и тогда у системы нет решения $x = \frac{(4a+3)}{8}$), $-1 = -a$ при $a = 1$, $\frac{a}{3} = -1$ при $a = -3$ (и тогда у системы нет решения $x = -1$). ■

2.7.6. $x_1 = \frac{n+1}{n-1}$, $x_2 = -1$ при $n \notin \{0, 1, -2\}$; $x = \frac{1}{3}$ при $n = -2$; $x = -1$ при $n = 1$. ● Решение аналогично номеру 2.7.5.

2.7.7. □ Записав x в виде $\sqrt[3]{4+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{80}}$, возведем это выражение в куб:

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right)^3 =$$

$$= 4+\sqrt{80} + 3\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}\right)^2 \sqrt[3]{4-\sqrt{80}} + 3\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right)^2 + 4 - \sqrt{80} =$$

$$= 8 + 3\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}\sqrt[3]{4-\sqrt{80}} \cdot \left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right) =$$

$$\left(\text{т. к. } \sqrt[3]{4+\sqrt{80}}\sqrt[3]{4-\sqrt{80}} = \sqrt[3]{(4+\sqrt{80})(4-\sqrt{80})} = \sqrt[3]{16-80} = -\sqrt[3]{64} = -4\right)$$

$$= 8 - 12\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right) = 8 - 12x,$$

откуда $x^3 + 12x - 8 = 0$. ■

2.7.8. $x_1 = 3-\sqrt{21}$, $x_2 = 3+\sqrt{21}$, $x_3 = -2$, $x_4 = 6$. □ Сделаем замену $t = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$, тогда $t^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} - \frac{8}{3}$, откуда $t^2 + \frac{8}{3} = \frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2}$, т. е. $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 3\left(t^2 + \frac{8}{3}\right) = 3t^2 + 8$. Исходное уравнение запишем в виде: $3t^2 + 8 = 10t$, или $3t^2 - 10t + 8 = 0$. Его корни $t = 2$ и $t = \frac{4}{3}$. При $t = 2$ получим уравнение $2 = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$, т. е. $x^2 - 6x - 12 = 0$; корни $x = 3-\sqrt{21}$, $x = 3+\sqrt{21}$. При $t = \frac{4}{3}$ получим уравнение $\frac{4}{3} = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$, т. е. $x^2 - 4x - 12 = 0$, корни $x = -2$ и $x = 6$. ■

2.7.9. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. □ Сделаем замену $t = x - \frac{1}{2}$ и запишем уравнение в виде $\left(t - \frac{3}{2}\right)^4 + \left(t + \frac{3}{2}\right)^4 = 17$, откуда $(2t-3)^4 + (2t+3)^4 = 2^4 \cdot 17$. Возведем выражения в скобках в левой части в четвертую степень и приведем подобные слагаемые. Получим уравнение: $32t^4 + 432t^2 + 162 = 272$, или $16(t^2)^2 + 216t^2 - 55 = 0$ — биквадратное уравнение с дискриминантом $\frac{D}{4} = 12544 = 112^2$. Отсюда $t^2 = \frac{1}{4}$ или $t^2 = -\frac{220}{16}$ — не имеет решения. При $t = \frac{1}{2}$ будет $x = 1$, при $t = -\frac{1}{2}$ будет $x = 0$. ■

2.7.10. $(3; 3)$, $(-3; -3)$, $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. □ Так как $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, то исходное уравнение можно записать в виде: $(3x - a^2 + ab - b^2)^2 + (2x^2 - a^2 - ab)^2 + (x-3)^2 = 0$, что равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} 3x - a^2 + ab - b^2 = 0, \\ 2x^2 - a^2 - ab^2 = 0, \\ x - 3 = 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 9 - a^2 + ab - b^2 = 0, \\ 18 - a^2 - ab = 0, \\ x = 3, \end{cases}$$

откуда, умножая 1-е уравнение на 2 и вычитая из 2-го уравнения, получим уравнение $a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$, или $(a-b)(a-2b) = 0$. Отсюда $a = b$ или $a = 2b$. При $a = b$ из 2-го уравнения системы получим $18 - b^2 - b^2 = 0$, т. е. $b^2 = 9$ и $b = 3$ $(a = 3)$ или $b = -3$ $(a = -3)$. При $a = 2b$ из 2-го уравнения системы получим уравнение $18 - 4b^2 - 2b^2 = 0$, $b^2 = 3$ и $b = \sqrt{3}$ $(a = 2\sqrt{3})$ или $b = -\sqrt{3}$ $(a = -2\sqrt{3})$. ■

2.7.11. $(2;-2)$, $(-2;2)$, $(2\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2},-\sqrt{2})$. ● Т. к. $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, то исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x^2 - 2m^2 + mn = 0, \\ 3m^2 - mn + 2n^2 - 12x = 0, \\ x - 2 = 0. \end{cases}$$

Далее аналогично 2.7.10.

2.7.12. $k \in (-\infty; -6] \cup [3; +\infty)$. □ Сделав замену $t = x^2$, получим квадратное уравнение $f(t) = t^2 - 2kt + k + 6 = 0$ с дискриминантом $\frac{D}{4} = k^2 - k - 6$. Полученное уравнение должно иметь хотя бы один неотрицательный корень, что равносильно совокупности трех условий:

1) $f(0) < 0$ (уравнение имеет два корня, один из которых — положительный), т. е. $k + 6 < 0$, или $k < -6$;

2) $f(0) = 0$ (хотя бы один из корней равен нулю), т. е. $k + 6 = 0$, $k = -6$;

3) уравнение имеет два или один (в случае совпадения) положительных корня —

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ x_{\text{в}} > 0 \\ \frac{D}{4} \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k + 6 > 0, \\ k > 0 \\ k^2 - k - 6 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k > -6, \\ k > 0 \\ k \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty) \end{cases} \iff$$

$\iff k \in [3; +\infty)$. ■

2.8.1. $x = 12$. □ После возведения в квадрат обеих частей уравнения приведем подобные и умножим обе части уравнения на x, получим уравнение: $40 + 2\sqrt{20+x} \cdot \sqrt{20-x} = 6x$. Перенесем 40 в правую часть уравнения, разделим обе части на 2 и возведем в квадрат. Получившееся квадратное уравнение имеет два корня $x = 12$ и $x = 0$ (это значение отбросим при проверке). ■

2.8.2. $x_1 = -6$, $x_2 = -1$. ● Сделать замену $t = \sqrt{x^2 + 7x + 10}$. **2.8.3.** $x = \frac{1}{2}$. ● Сделать замену $t = \sqrt{12 + 16x - 16x^2}$.

2.8.4. $x \in [13; +\infty)$. □ Сделав замену $t = \sqrt{x-4}$ (тогда $t^2 = x - 4$, $x = t^2 + 4$), получим уравнение $\sqrt{t^2 + 4 - 3 - 2t} - \sqrt{t^2 + 4 + 5 - 6t} = 2$, т. е. $\sqrt{t^2 - 2t + 1} - \sqrt{t^2 - 6t + 9} = 2$, откуда $\sqrt{(t-1)^2} - \sqrt{(t-3)^2} = 2$. Так как $\sqrt{z^2} = |z|$, то получим уравнение $|t-1| - |t-3| = 2$, которое равносильно объединению трех систем:

$$\begin{cases} t<1, \\ -(t-1)+(t-3)=2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} t\in[1;3), \\ t-1+(t-3)=2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} t\in[3;+\infty), \\ t-1-(t-3)=2, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} t<1, \\ -2=2 \text{ — неверно}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} t\in[1;3), \\ 2t-4=2;\ t=3, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} t\in[3;+\infty), \\ 2=2 \text{— верно} \\ \text{при любом } t. \end{cases}$$

$$\varnothing \qquad \text{или} \qquad \varnothing \qquad \text{или} \qquad t\in[3;+\infty)$$

Итак, исходное уравнение равносильно неравенству $\sqrt{x-4}\geqslant 3$. Возводя обе части неравенства в квадрат, получим неравенство $x-4\geqslant 9$, т. е. $x\geqslant 13$. ■

2.8.5. $x=15$. ● Сделать замену $t=\sqrt{2x-5}$. **2.8.6.** $x\in[5;8]$. ● Аналогично 2.8.4. **2.8.7.** $x=5$. ● После возведения в квадрат обеих частей уравнения оставить в левой части выражение, содержащее радикалы, остальные слагаемые перенести в правую часть и все разделить на 6. Обе части полученного уравнения $\sqrt{2x^2-9x+4}\cdot\sqrt{2x-1}=2x-1$ возвести в квадрат и выделить в обеих частях полученного уравнения множитель $(2x-1)^2$. **2.8.8.** $x=-1$. ● Аналогично 2.8.7.

2.8.9. 13. □ Введем новые переменные $u=\sqrt[3]{2-x}$ и $v=\sqrt{x-1}$. Тогда $u^3=2-x$, $x=2-u^3$, и $v^2=x-1$, $x=v^2+1$. Записав исходное уравнение, используя переменные u и v, а также приравнивая выражение для x через u и v, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} v=1-u, \\ 2-u^3=(1-u)^2+1;\ 2-u^3=1-2u+u^2+1;\ u^3+u^2-2u=0;\ u(u^2+u-2)=0. \end{cases}$$

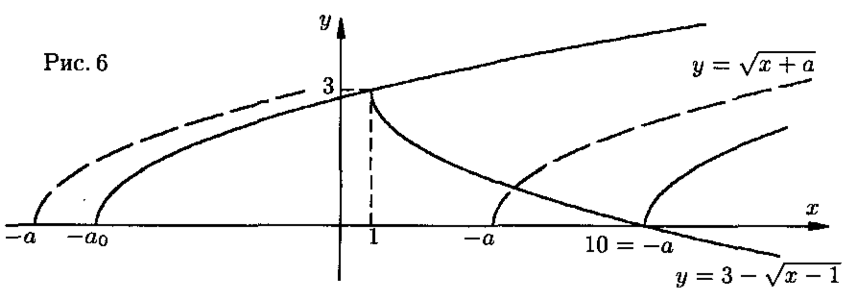
Решения второго уравнения этой системы $u_1=0$, $u_2=1$, $u_3=-2$. Отсюда $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=10$. Проверка показывает, что все эти три значения x являются корнями исходного уравнения. ■

2.8.10. $x=3$. ● Сделать замену $u=\sqrt{x-2}$, $v=\sqrt{x+1}$.

2.8.11. $x=-1$. □ Так как $(x^2+2x)^2=x^4+4x^3+4x^2$, то можно записать уравнение в виде: $(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1-1+\sqrt{x^2+2x+10}=2$, т. е. $(x^2+2x+1)^2+\sqrt{x^2+2x+10}=3$. Сделав замену $y=\sqrt{x^2+2x+10}$, получим квадратное уравнение $(y^2-9)^2+y=3$, т. е. $(y-3)^2(y+3)^2+(y-3)=0$, откуда $y=3$ и $x=-1$. ■

2.8.12. $a\in[-10;8]$. □ Если изобразить графики функций $y=3-\sqrt{x-1}$ и $y=\sqrt{x+a}$, то очевидно, что они пересекаются (и исходное уравнение имеет решение) при $-a\in[-a_0;10]$ (рис. 6).

Рис. 6



Значение a_0 найдем из условия $\sqrt{x+a_0}=3$ при $x=1$, т. е. $\sqrt{1+a_0}=3$; $a_0=8$, откуда $-a\in[-8;10]$. ■

2.8.13. При $m\leqslant 0$, $m>3$ решений нет; при $m\in(0;3]$ будет $x=\left(\dfrac{9-m^2}{2m}\right)^2+3$. ● Так как $\sqrt{x+6}>\sqrt{x-3}$, то $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-3}=m>0$. Положим $y=\sqrt{x-3}$, получим $x=y^2+3$, и исходное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{y^2+9}-y=m,\\ y\geqslant 0,\end{cases}\quad\text{т. е.}\quad\begin{cases}\sqrt{y^2+9}=y+m,\\ y\geqslant 0,\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}y^2+9=(y+m)^2\iff y=\dfrac{9-m^2}{2m},\\ y+m\geqslant 0,\quad y\geqslant 0.\end{cases}\qquad\text{И т. д.}$$

2.8.14. $x=a-\sqrt{a}$ при $a>\frac{1}{4}$. □ Сделав замену $t=\sqrt{x+\frac{1}{4}}$, запишем уравнение в виде: $t^2-\frac{1}{4}+\sqrt{t^2+\frac{1}{4}+t}=a$, т. е. $t^2-\frac{1}{4}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}=a$, или $t^2-\frac{1}{4}+\left|t+\frac{1}{2}\right|=$ $=a$. Так как $t>0$, то $\left|t+\frac{1}{2}\right|=t+\frac{1}{2}$, и имеем уравнение $t^2-\frac{1}{4}+t+\frac{1}{2}=a$, или $\left(t+\frac{1}{2}\right)^2=a$, откуда $t+\frac{1}{2}=+\sqrt{a}$. Значит, $\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\sqrt{a}-\frac{1}{2}$ (это выражение неотрицательно при $a>\frac{1}{4}$), $x=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=a-\sqrt{a}$. ■

2.9.1. $x\leqslant -1$, $x=\frac{1}{5}$. □ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим равносильное уравнение $25(1+|x^2-1|)=9+6|5x+3|+|5x+3|^2$, или $25+25|x^2-1|=9+6|5x+3|+25x^2+9+30x$, откуда $6|5x+3|=25|x^2-1|-$ $-25x^2-30x+7$. Это уравнение равносильно совокупности четырех систем:

а) $\begin{cases}x<-1,\\ -6(5x+3)=25(x^2-1)-25x^2-30x+7;\end{cases}$ или

б) $\begin{cases}-1\leqslant x<-\frac{3}{5},\\ -6(5x+3)=25(1-x^2)-25x^2-30x+7;\end{cases}$ или

в) $\begin{cases}-\frac{3}{5}\leqslant x<1,\\ 6(5x+3)=25(1-x^2)-25x^2-30x+7;\end{cases}$ или

г) $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ 6(5x+3)=25(x^2-1)-25x^2-30x+7.\end{cases}$

Решая 2-е уравнение из системы а), получим уравнение $0=0$, откуда x — любое действительное число. Итак, решение системы а): $x<-1$.

Решая 2-е уравнение системы б), получим уравнение $50x^2=50$, т. е. $x=1$ или $x=-1$. Неравенству $-1\leqslant x<-\frac{3}{5}$ удовлетворяет лишь значение $x=-1$. Итак, решение системы б): $x=-1$.

Решая 2-е уравнение системы в), получим уравнение $50x^2+60x-14=0$, или $25x^2+30x-7=0$. Корни этого уравнения $x=\frac{1}{5}$ и $x=-\frac{7}{5}$, неравенству

$-\frac{3}{5} \leqslant x < 1$ удовлетворяет только значение $x = \frac{1}{5}$. Итак, решение системы в): $x = \frac{1}{5}$.

Решая 2-е уравнение системы г), получим уравнение $60x = -36$, то есть $x = -\frac{6}{10}$, но это значение не удовлетворяет неравенству $x \geqslant 1$. Итак, система г) решений не имеет.

Объединяя решения систем а)–г), получим окончательный ответ. ■

2.9.2. $x \leqslant -\frac{5}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. ● Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение: $25 + |16x^2 - 25| = 16 + 32|x+1| + 16(x+1)^2$, которое равносильно совокупности 4-х систем при различных условиях на x: 1) $x < -\frac{5}{4}$; 2) $x \in \in \left[-\frac{5}{4}; -1\right)$; 3) $x \in \left[-1; \frac{5}{4}\right)$; 4) $x \in \left[\frac{5}{4}; \infty\right)$. Далее аналогично 2.9.1.

2.9.3. $a \in (2; 3)$. □ Исходное уравнение равносильно совокупности 2-х систем:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x - 3 \geqslant 0, \\ 3x - 3 + 2 = ax, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x = \dfrac{1}{3-a}, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 3x - 3 < 0, \\ -3x + 3 + 2 = ax; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x = \dfrac{5}{3+a}. \end{cases}$$

Далее, в случае а):

$$x = \frac{1}{3-a} \geqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{1-(3-a)}{3-a} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{a-2}{3-a} \geqslant 0 \Longleftrightarrow a \in [2; 3);$$

а в случае б):

$$x - 1 = \frac{5-(3+a)}{3+a} < 0 \Longleftrightarrow \frac{2-a}{3+a} < 0 \Longleftrightarrow a \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty).$$

Итак, у системы а) при $a \in [2; 3)$ одно решение $x = \frac{1}{3-a}$, при других значениях a решений нет; у системы б) при $a \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$ одно решение $x = \frac{5}{3+a}$, при других значениях a решений нет. Значит, ровно 2 решения у исходного уравнения при $a \in [2; 3)$. ■

2.9.4. $a \in \left(0; \frac{1}{8}\right)$. ● Условие задачи равносильно тому, что исходное уравнение, рассматриваемое как квадратное относительно $|x+1|$, должно иметь 2 различных положительных корня, т. е. дискриминант и коэффициент при x должны быть положительными: $D = 1 - 8a > 0$ и $2a > 0$.

2.9.5. $p = 2$. □ Построим графики функций $y = x^2 - 4|x| + 2$ и $y = p$ на одном чертеже (рис. 7). Очевидно, что исходное уравнение имеет ровно 3 корня тогда и только тогда, когда графики пересекаются ровно в трех точках, т. е. при $p = 2$. ■

2.9.6. $m = 9$. □ Построим графики функций $y = |x^2 - 6x|$ и $y = m$ на одном чертеже (рис. 8). Очевидно, что исходное уравнение имеет ровно 3 решения тогда и только тогда, когда графики двух вышеуказанных функций пересекаются ровно в трех точках, т. е. при $m = 9$. ■

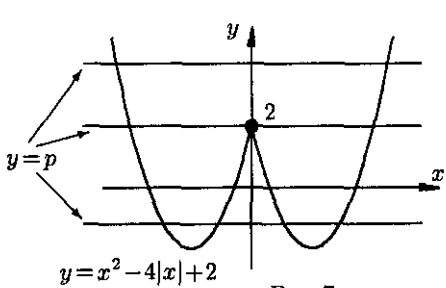


Рис. 7

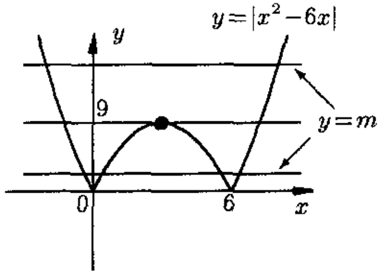


Рис. 8

2.9.7. $a_1 = 1$, $a_2 = -1$. □ Построим графики функций $y = 1$ и $y = |x^2 + 2ax|$ (рис. 9).

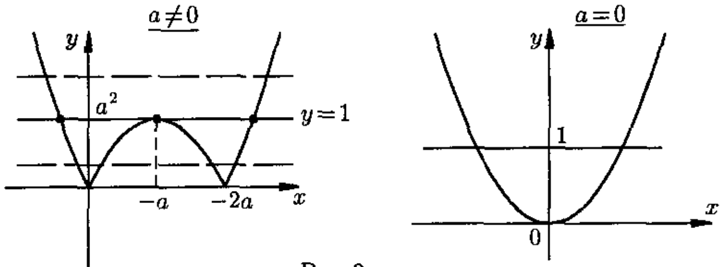


Рис. 9

Очевидно, что при $a = 0$ графики пересекаются не более чем, в двух точках, а при $a < 0$ и $a > 0$ пересекаются ровно в трех точках, когда $a^2 = 1$, т. е. при $a = -1$ *и* $a = 1$. ■

2.9.8. $a \in (-\infty; -1)$. □ Построим график функции $y = |x^2 + 2x + a|$:

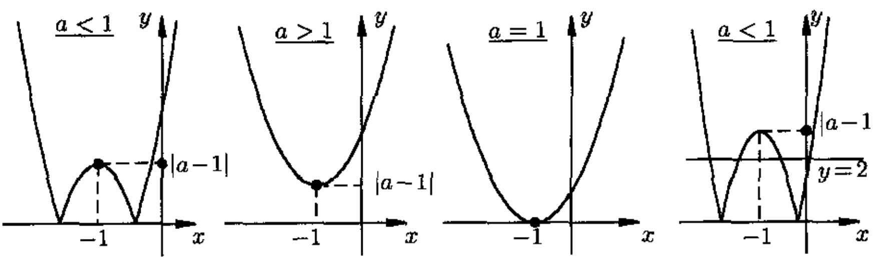


Рис. 10

Тогда графики функций $y = |x^2 + 2x + a|$ и $y = 2$ пересекаются в 4-х точках в случае, показанном на правом рисунке. Значит, $|a - 1| > 2$, и так как $a < 1$, то $1 - a > 2$, $a < -1$. ■

2.9.9. $a \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$. □ Исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x \geqslant a, \\ 2(x-a) + a - 4 + x = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < a, \\ -2(x-a) + a - 4 + x = 0, \end{cases} \quad \text{т. е.}$$

$$\begin{cases} x \geqslant a, \\ 3x = a + 4 \iff x = \dfrac{a+4}{3}; \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x < a, \\ 3a - 4 = x; \end{cases}$$

$$\frac{a+4}{3} \geqslant a \iff a + 4 \geqslant 3a \iff a \leqslant 2 \quad \text{или} \quad 3a - 4 < a \iff a < 2.$$

Итак, при $a = 2$ исходное уравнение имеет решение $x = \dfrac{2+4}{3} = 2 \in [0;4]$, а при $a < 2$ уравнение имеет два решения $x_1 = \dfrac{a+4}{3}$ и $x_2 = 3a - 4$. Теперь потребуем, чтобы полученные решения принадлежали отрезку $[0;4]$:

$$\begin{cases} 0 \leqslant \dfrac{a+4}{3} \leqslant 4, \\ 0 \leqslant 3a - 4 \leqslant 4; \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant a + 4 \leqslant 12, \\ 4 \leqslant 3a \leqslant 8; \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant 8, \\ \frac{4}{3} \leqslant a \leqslant \frac{8}{3}; \end{cases} \iff \frac{4}{3} \leqslant a \leqslant \frac{8}{3}.$$

Условие задачи выполняется при $\begin{cases} a \leqslant 2, \\ \frac{4}{3} \leqslant a \leqslant \frac{8}{3}, \end{cases}$ т. е. при $\frac{4}{3} \leqslant a \leqslant 2$. ■

2.9.10. Если $a \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$, то $x_1 = -3$, $x_2 = -a$, $x_3 = a$; если $a \in [-3; 3]$, то $x_1 = -3$, $x_2 = |a|$. □ Так как $|a(x+3)| = |a| \cdot |x+3|$, то исходное уравнение равносильно совокупности трех систем:

$$\text{а)} \begin{cases} x + 3 = 0, \\ x \cdot 0 = |a| \cdot 0, \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x + 3 > 0, \\ x(x+3) = |a| \cdot (x+3), \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x + 3 < 0, \\ x(x+3) = -|a| \cdot (x+3). \end{cases}$$

Система а) имеет решение $x = -3$ при любом $a \in (-\infty; +\infty)$.

Решая систему б), получим

$$\begin{cases} x > -3, \\ x = |a|. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $x = |a|$ при любом $a \in (-\infty; +\infty)$.

Решая систему в), получим

$$\begin{cases} x < -3, \\ x = -|a|. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $x = -|a|$ при $|a| > 3$, т. е. при $a \in (-\infty; -3) \cup \cup (3; +\infty)$.

Сводя вместе решения систем а), б) и в), получаем ответ. ■

2.9.11. $x = 4$ при $a < -1$ или $a > 1$; $x \geqslant 4$ при $a = -1$; $x_1 = 4$, $x_2 = \dfrac{4a-8}{a+1}$ при $-1 < a < 1$; $-2 \leqslant x \leqslant 4$ при $a = 1$. □ Исходное уравнение равносильно совокупности трех систем:

а) $\begin{cases} x < -2, \\ -(x+2) - a(x-4) = 6; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ 4a - 8 = x(a+1); \end{cases} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < -2, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4a-8}{a+1} \text{ при } a \neq -1, \\ \text{нет решений при } a = -1; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

б) $\begin{cases} -2 \leqslant x < 4, \\ x + 2 - a(x-4) = 6; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x < 4, \\ x(1-a) = 4 - 4a; \end{cases} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 \leqslant x < 4, \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \text{ при любом значении } a \neq 1, \\ x \text{ — любое при } a = 1; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

в) $\begin{cases} x \geqslant 4, \\ x + 2 + a(x-4) = 6; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geqslant 4, \\ x(1+a) = 4 + 4a; \end{cases} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant 4, \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \text{ при любом значении } a \neq -1, \\ x \text{ — любое при } a = -1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

а): $\dfrac{4a-8}{a+1} < -2 \iff \dfrac{4a-8+2(a+1)}{a+1} < 0 \iff \dfrac{6a-6}{a+1} < 0 \iff \dfrac{a-1}{a+1} < 0,$ т. е. $-1 < a < 1$. Отсюда имеем решение системы а): решений нет при $a = -1$; $x = \dfrac{4a-8}{a+1}$ при $-1 < a < 1$.

Решение системы б): $-2 \leqslant x < 4$ при $a = 1$.

Решение системы в): $x = 4$ при любом значении $a \neq 1$; $x \geqslant 4$ при $a = -1$.

Все возможные значения a попадают в 4 множества: $a = -1$, $-1 < a < 1$, $a < -1$ или $a > 1$, откуда получаем ответ. ■

2.9.12. $-1 \leqslant x \leqslant 2$ при $a = 1$; $x = 2$ при $a > 1$; $x = 2$ при $a < -1$; $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{2a-4}{a+1}$ при $-1 < a < 1$; $x \geqslant 2$ при $a = -1$. ● Исходное уравнение равносильно совокупности трех систем:

а) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ (x+1) + a(x-2) = 3; \end{cases}$ или б) $\begin{cases} x \in [-1; 2), \\ (x+1) - a(x-2) = 3; \end{cases}$ или

в) $\begin{cases} x < 1, \\ -(x+1) - a(x-2) = 3. \end{cases}$

2.9.13. Нет решений при $a < 1$; $x = 0$ при $a = 1$; $x_1 = a - 1$, $x_2 = \dfrac{1-a}{3}$ при $1 < a \leqslant 2$; $x_1 = \dfrac{1+a}{3}$, $x_2 = \dfrac{1-a}{3}$ при $a > 2$. ● Рассмотреть три случая: $x < 0$, $0 \leqslant x < 1$, $x \geqslant 1$. **2.9.14.** $x = 1$ при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $x \in [-3; 1]$ при $a = -1$; $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{7+a}{a-1}$ при $a \in (-1; 1)$; $x \in [1; +\infty)$ при $a = 1$.

2.9.15. $a \in \left(-2; -\frac{5}{4}\right) \cup \left(-1; -\frac{1}{5}\right)$. ● Уравнение равносильно совокупности 4-х систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -5, \\ ax = -2x - 9; \end{cases} \iff x = -\dfrac{9}{a+2} \quad \text{при} \quad a \in \left(-2; -\frac{1}{5}\right); \\ \\ \begin{cases} -5 \leqslant x < -4, \\ ax = 4x + 21; \end{cases} \iff x = \dfrac{21}{a-4} \quad \text{при} \quad a \in \left(-\frac{5}{4}; -\frac{1}{5}\right]; \\ \\ \begin{cases} -4 \leqslant x < -3, \\ ax = -2x - 3; \end{cases} \iff x = -\dfrac{3}{a+2} \quad \text{при} \quad a \in \left[-\frac{5}{4}; -1\right); \\ \\ \begin{cases} x \geqslant -3, \\ ax = 2x + 9; \end{cases} \iff x = \dfrac{9}{a-2} \quad \text{при} \quad a \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty). \end{array}\right.$$

2.10.1. $(4; 4)$, $(-5; -5)$, $\left(\frac{1+\sqrt{77}}{2}; \frac{1-\sqrt{77}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{77}}{2}; \frac{1+\sqrt{77}}{2}\right)$. □ Вычитая 2-е уравнение из 1-го, получим уравнение $x^2 + y - y^2 - x = 0$, или $(x-y)(x+y) - (x-y) = 0$, т. е. $(x-y)(x+y-1) = 0$, откуда $x = y$ или $x = 1 - y$. Если $x = y$, то $x^2 + x + 20 = 0$, $x_1 = 4$ (и $y_1 = 4$) или $x_2 = -5$ (и $y_2 = -5$). Если $x = 1 - y$, то $y^2 + (1 - y) - 20 = 0$, $y^2 - y - 19 = 0$, $y_3 = \frac{1-\sqrt{77}}{2}$ $\left(\text{и } x_3 = \frac{1+\sqrt{77}}{2}\right)$ или $y_4 = \frac{1+\sqrt{77}}{2}$ $\left(\text{и } x_4 = \frac{1-\sqrt{77}}{2}\right)$. ■

2.10.2. $(2; 2)$, $(2; -2)$, $(-2; 2)$, $(-2; -2)$. ● Сделать замену $u = x^2$, $v = y^2$. Далее аналогично номеру 2.10.1.

2.10.3. $(0; 0)$, $(2; 2)$, $(\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$. □ Сложив 1-е и 2-е уравнения, получим уравнение $4y = x^2 + y^2$, а из 1-го уравнения имеем $y = x^2 - x$, откуда $4(x^2 - x) = x^2 + (x^2 - x)^2$, т. е. $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x = 0$. Далее имеем уравнение $x(x^3 - 2x^2 - 2x + 4) = 0$, откуда $x = 0$ (и $y = 0$) или $x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$, т. е. $x^2(x - 2) - 2(x - 2) = 0$, значит $(x - 2)(x^2 - 2) = 0$, следовательно, $x = 2$ (и $y = 2$) или $x = \sqrt{2}$ (и $y = 2 - \sqrt{2}$) или $x = -\sqrt{2}$ (и $y = 2 + \sqrt{2}$). ■

2.10.4. $\left(\frac{17 \pm \sqrt{33}}{8}; \frac{-1 \mp \sqrt{33}}{4}\right)$, $\left(\frac{9 \pm \sqrt{17}}{4}; \frac{-1 \mp \sqrt{17}}{2}\right)$. ● Разделив 1-е уравнение на x^2, получить квадратное уравнение относительно $\frac{y^2}{x}$:

$$\left(\frac{y^2}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y^2}{x}\right) + 2 = 0.$$

2.10.5. $(5; 3)$, $(5; -3)$. □ Из 1-го уравнения получим $y^2 = x^2 - 16$ и подставим это выражение во 2-е уравнение: $3x(x^2 - 16) + x^3 = 260$, откуда $4x^3 - 48x - 260 = 0$, т. е. $1 \cdot x^3 - 12x - 65 = 0$. Будем искать рациональные корни уравнения (если они есть) среди дробей вида $\frac{n}{m}$, где n — все целые делители 65, а m — все натуральные делители 1 (т. е. $m \in \{1\}$, а $n \in \{\pm 1, \pm 5, \pm 13, \pm 65\}$). Подстановкой убеждаемся в том, что корнем является число $x_1 = 5$. Значит, $x^3 - 12x - 65 = (x - 5) \cdot P_2(x)$, где $P_2(x)$ — какой-то многочлен 2-й степени. Разделив $x^3 - 12x - 65$ на $x - 5$, получим $P_2(x) = x^2 + 5x + 13$. Уравнение $x^2 + 5x + 13 = 0$ не имеет действительных корней. Итак, $x_1 = 5$, откуда $y^2 = 5^2 - 16 = 9$, т. е. $y = 3$ или $y = -3$. ■

2.10.6. $(2;-3)$, $(c;1)$, $c\in\mathbb{R}$. □ Умножив 1-е уравнение на 2, вычтем из него 2-е уравнение и получим уравнение $5y^2+10y-15=0$, т. е. $y^2+2y-3=0$, откуда $y_1=-3$ или $y_2=1$. Подставив значение $y_1=-3$ в 1-е уравнение, получим уравнение $-3x+3\cdot 3^2-x-4\cdot 3-7=0$, откуда $x_1=2$. Подставив значение $y_2=1$ в 1-е уравнение, получим равенство $0=0$, верное при любом $x=c$, $c\in\mathbb{R}$. ■

2.10.7. $\left(\frac{2}{3};-\frac{14}{3}\right)$, $\left(\frac{11}{6};\frac{14}{3}\right)$. ● Прибавив к обеим частям 1-го уравнения $(x-3)^2$, получить уравнение $\big(y+(x-3)\big)^2=9(x-3)^2$, откуда $y+x-3=\pm3(x-3)$.

2.10.8. $(1;2;3)$. ● Записав систему в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{6}{5},\\ \dfrac{x+z}{zx}=\dfrac{4}{3},\end{cases}$$

и сделав замену $u=\dfrac{1}{x}$, $v=\dfrac{1}{y}$, $w=\dfrac{1}{z}$, получить систему:

$$\begin{cases}u+v=\dfrac{3}{2},\\ v+w=\dfrac{6}{5},\\ u+w=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

2.10.9. $(-1;-2)$, $(-2;-1)$, $\left(\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2};\dfrac{-3\mp\sqrt{21}}{2}\right)$. ● Умножив 1-е уравнение на x^2, получить квадратное уравнение $(xy)^2+(xy)-6=0$, откуда $xy=2$ или $xy=-3$. **2.10.10.** $(\sqrt[3]{4};9)$. ● Сделав замену $u=x^3$, $v=\sqrt{y}$, выразить $v=u-1$ и подставить это выражение во 2-е уравнение: $5u^2-8u(u-1)+2(u-1)=2$.
2.10.11. $(1;1)$, $\left(\frac{5}{2};-2\right)$. ● Сделать замену $u=\sqrt{2x-1}$, $v=\sqrt{y+3}$ и записать систему в виде: $\begin{cases}u+v=3,\\ u^2v^2=2.\end{cases}$ **2.10.12.** $(9;4)$, $(4;9)$, $(4\pm\sqrt{15};4\mp\sqrt{15})$. ● Сделав замену $u=x+y$, $v=\sqrt{xy}$, записать систему в виде: $\begin{cases}u^2-2v^2-v^2=61,\\ u-v=7.\end{cases}$

2.10.13. $\left(2;\dfrac{18}{41-24\sqrt{2}}\right)$. □ Сделав замену $t=x+\dfrac{1}{x}$, запишем 2-е уравнение в виде: $7t-2(t^2-2)=9$, или $2t^2-7t+5=0$, откуда $t_1=1$ и $t_2=\dfrac{5}{2}$. Уравнение $x+\dfrac{1}{x}=1$ корней не имеет, а у уравнения $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ два корня $x_1=2$ и $x_2=\dfrac{1}{2}$. При $x=\dfrac{1}{2}$ в 1-м уравнении получим $\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3}-\sqrt{2}<0$, и решений нет. При $x=2$ из 1-го уравнения получим $y=\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}\right)^2$. ■

2.10.14. $(4;4;-4)$. □ Выразим y из 1-го уравнения и подставим во 2-е уравнение: $\begin{cases}y=4-x-z,\\ 2x(4-x-z)-z^2=16,\end{cases}$ откуда $2x^2+2(z-4)x+(z^2+16)=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно x, найдем дискриминант: $\dfrac{D}{4}=-z^2-8z-16=-(z+4)^2\geqslant 0$ лишь при $z=-4$. Тогда $x=-\dfrac{z-4}{2}=4$, и $y=4-4-(-4)=4$. ■

2.10.15. $(2;\,2;\,2)$, $(2;\,2;\,-2)$, $(2;\,-2;\,2)$, $(2;\,-2;\,-2)$, $(-2;\,2;\,2)$, $(-2;\,2;\,-2)$, $(-2;\,-2;\,2)$, $(-2;\,-2;\,-2)$. □ Выразив y из 1-го уравнения: $y=4+z^2-x^2$, подставим его во 2-е уравнение:

$$2x^2\cdot(4+z^2-x^2)-z^4=16,\ \text{ т. е. }\ 2(x^2)^2-2(z^2+4)x^2+(z^4+16)=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно x^2, найдем дискриминант: $\frac{D}{4} = (z^2+4)^2 - 2(z^4+16) = -z^4 + 8z^2 - 16 = -(z^2-4)^2 \geqslant 0$ лишь при $z^2 = 4$, т. е. $z = 2$ или $z = -2$, откуда $x^2 = 4$ (и $x = 2$ или $x = -2$) и $y^2 = 4$ (и $y = 2$ или $y = -2$). ■

2.10.16. $(1; 2; 3)$, $(-1; -2; -3)$. □ Сложив все три уравнения, получим уравнение $2xy + 2yz + 2zx = 22$, т. е. $xy + yz + zx = 11$. Вычитая из этого уравнения по очереди 1-е, 2-е и 3-е уравнения системы, получим систему

$$(*) \qquad \begin{cases} zx = 3, \\ xy = 2, \\ yz = 6. \end{cases}$$

Перемножив все три уравнения, получим $x^2y^2z^2 = 36$, откуда $xyz = 6$ или $xyz = -6$. Разделив уравнение $xyz = 6$ на каждое из уравнений системы $(*)$, получим $\{y = 2,\ z = 3,\ x = 1\}$. Разделив уравнение $xyz = -6$ на каждое из уравнений системы $(*)$, получим $\{y = -2,\ z = -3,\ x = -1\}$. ■

2.10.17. $(a;\ b;\ c)$. □ Сделав замену $u = \frac{a+b}{x+y}$, $v = \frac{b+c}{y+z}$, $w = \frac{c+a}{z+x}$, получим систему

$$(*) \qquad \begin{cases} u + v - w = 1, \\ u - v + w = 1, \\ -u + v + w = 1. \end{cases}$$

Сложив все три уравнения, получим уравнение $u + v + w = 3$, из которого вычтем каждое из уравнений системы $(*)$ и получим систему:

$$\begin{cases} 2w = 2, \\ 2v = 2, \\ 2u = 2, \end{cases} \qquad \text{откуда } u = 1,\ v = 1,\ w = 1.$$

Следовательно, мы имеем систему

$$(**) \qquad \begin{cases} x + y = a + b, \\ y + z = b + c, \\ z + x = c + a. \end{cases}$$

Сложив все три уравнения, получим уравнение $2x + 2y + 2z = 2a + 2b + 2c$, т. е. $x + y + z = a + b + c$. Вычитая из последнего уравнения каждое из уравнений системы $(**)$, получим $z = c$, $x = a$, $y = b$. ■

2.10.18. 3. ● Вычтя из удвоенного первого уравнения системы второе уравнение, получим уравнение $x \cdot (3 - a) = 0$.

2.10.19. $a \in \{2\} \cup (-2; 1]$. □ Так как $x < 0$ и $y = 1$ (из 1-го уравнения), то уравнение $(x+a)^2 + 1 + a = 3$ должно иметь один отрицательный корень. Решая уравнение $x^2 + 2ax + (a^2 + a - 2) = 0$, найдем дискриминант $\frac{D}{4} = a^2 - (a^2 + a - 2) =$ $= 2 - a \geqslant 0$ при $a \leqslant 2$. Если у квадратного уравнения есть корни x_1 и x_2, то $x_1 \cdot x_2 = a^2 + a - 2 = 0$, $x_1 + x_2 = -2a$. Это квадратное уравнение будет иметь ровно один отрицательный корень в одном из трех случаев:

1) $x_1 \cdot x_2 < 0$, т. е. $a^2 + a - 2 < 0$ или $(a+2)(a-1) < 0$, значит $a \in (-2; 1)$.

2) $x_1 = 0$, $x_2 < 0$, т. е. $x_1 \cdot x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 < 0$, значит, $(a+2)(a-1) = 0$ и

$-2a < 0$, следовательно, $\{a = 1$ или $a = -2\}$ и $a > 0$, откуда $a = 1$.
3) $x_1 = x_2 < 0$, т.е. $\frac{D}{4} = 0$, значит, $2 - a = 0$, и $a = 2$. ■

2.10.20. 10. □ Выразив y из 2-го уравнения: $y = 4 - 2x$, подставим это выражение в 1-е уравнение: $kx + 5(4 - 2x) = 3$, т.е. $(k - 10)x = -17$. Это уравнение (и исходная система) не имеет решений лишь при $k = 10$. ■

2.10.21. $-0{,}25$. ● Аналогично номеру 2.10.20. **2.10.22.** $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$. ● При $x \geqslant 0$ будет $y = 0$ (из 1-го уравнения), и $0 = a+1+\frac{(x-a)^2}{2}$ (из 2-го уравнения), т.е. $x^2 - 2ax + (a^2 + 2a + 2) = 0$. При $x < 0$ будет $2y = -2x$, т.е. $y = -x$ (из 1-го уравнения) и, подставив это выражение во 2-е уравнение, получим $-x = a+1+\frac{(x-a)^2}{2}$. Итак, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 2ax + (a^2 + 2a + 2) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 2(1-a)x + (a^2 + 2a + 2) = 0 \end{cases}$$

и имеет решение тогда и только тогда, когда хотя бы одна из этих систем имеет решение. **2.10.23.** $a \in \left(-2; \frac{1}{4}\right]$. ● Так как $x^2 - 2x = a - y$ (из 1-го уравнения), то, подставив это выражение во 2-е уравнение, получим квадратное уравнение (*) $y^2 - y + a = 0$ с дискриминантом $D = 1 - 4a$. Так как из 1-го уравнения системы $\max\{y = f(x) = a - x^2 + 2x\} = f(1) = a + 1$, то условие задачи эквивалентно тому, чтобы хотя бы один из корней уравнения (*) был не больше, чем $a + 1$.

2.10.24. 1. □ Из 1-го уравнения выразим $x = 3 + (a + 1)y$ и подставим во 2-е уравнение: $2(3 + (a + 1)y) - (a + 3)y = a + 5$, т.е. $(a - 1)y = a - 1$. Это уравнение (и исходная система) имеет бесконечно много решений лишь при $a = 1$ (уравнение будет иметь вид $0 \cdot y = 0$). ■

2.10.25. $(-2; 6)$, $(6; -2)$. □ Выразим y из 1-го уравнения: $y = \frac{2 - (\alpha+\beta)x}{26}$ и подставим это выражение во 2-е уравнение: $8x+(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\cdot\frac{2-(\alpha+\beta)x}{26} = 4$, или

$$x \cdot \left(8 - \frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{26}\right) = 4 - \frac{1}{13}(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2).$$

Это уравнение (и исходная система) имеет бесконечно много решений, если оно имеет вид $0 \cdot x = 0$, т.е. если выполняются два равенства:

$$\begin{cases} 8 - \dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{26} = 0, \\ 4 - \dfrac{1}{13}(\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 0; \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} 8 - \dfrac{(\alpha+\beta)}{26} \cdot 52 = 0, \\ \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 52; \end{cases}$$

откуда $\beta = 4 - \alpha$ и $\alpha^2 - \alpha(4 - \alpha) + (4 - \alpha)^2 = 52$, т.е. $\alpha_1 = -2 \quad (\beta_1 = 6)$ или $\alpha_2 = 6 \quad (\beta_2 = -2)$. ■

2.10.26. -2. □ Выразив из 1-го уравнения $x = 3+ay$, подставим это выражение во 2-е уравнение и получим уравнение

$$a(3 + ay) - 4y = a + 4 \ \text{т.е.} \ (a - 2)(a + 2)y = 2(2 - a).$$

Это уравнение (и исходная система) не имеет решений при тех значениях a, при которых уравнение записывается в виде $0 \cdot y = c$, где $c \neq 0$. Так как

$(a-2)(a+2)=0$ при $a=2$ или $a=-2$, а $2(2-a)\neq 0$ при $a\neq 2$, то условие выполняется при $a=-2$. ■

2.10.27. $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. □ Уравнение $x^2+y^2=1$ задает на плоскости окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Уравнение $x+y=a$ задает множество прямых $y=a-x$ (см. рис. 11).

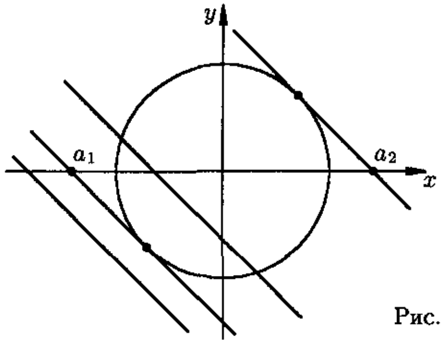


Рис. 11

Очевидно, что прямая и окружность имеют единственную общую точку (а система имеет единственное решение) при $a=a_1$ или $a=a_2(=-a_1)$, когда прямая касается окружности. В обоих случаях точка касания имеет координаты $(x;x)$, удовлетворяющие равенствам:

$$\begin{cases} x^2+x^2=1, \\ x+x=a, \end{cases}$$

откуда $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, значит, $a=\pm\sqrt{2}$. ■

2.10.28. 2. □ Уравнение $(x+y)^2=12$ задает на плоскости пару прямых $x+y=$ $=2\sqrt{3}$ и $x+y=-2\sqrt{3}$, а уравнение $x^2+y^2=2(a+1)$ — окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2(a+1)}$ (при $a>-1$) — см. рис. 12.

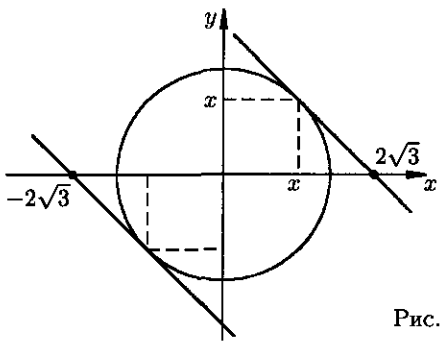


Рис. 12

Система имеет ровно 2 решения в случае, когда обе прямые касаются окружности, при этом точки касания имеют координаты $(x;x)$, удовлетворяющие равенствам:

$$\begin{cases} (x+x)^2=12, \\ x^2+x^2=2(a+1), \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} 2x^2=6, \\ 2x^2=2(a+1), \end{cases} \text{ откуда } 2(a+1)=6 \Longrightarrow a=2. ■$$

2.10.29. $a \in \{-\sqrt{2}\} \cup (-1;1)$. □ Уравнение $x^2+y^2=1$ задает на плоскости окружность с центром в начале координат и радиусом 1, а уравнение $y-|x|=a$ — угол (пару лучей с общей вершиной $(0;a)$) — см. рис. 13.

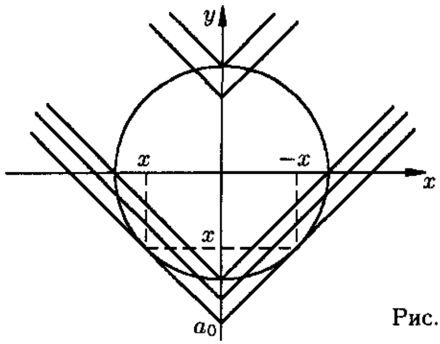


Рис. 13

Очевидно, что угол и окружность имеют ровно 2 общие точки (а система — ровно 2 решения) при $a \in (-1;1) \cup \{a_0\}$, причем при $a=a_0$ лучи касаются окружности в точках с координатами $(x;x)$ и $(-x;x)$, удовлетворяющими равенствам:

$$\begin{cases} x^2+x^2=1, \\ x-|x|=a_0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=\frac{1}{2},\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=a_0, \end{cases} \quad \text{т. е. } a_0=-\sqrt{2}.\ \blacksquare$$

2.10.30. $a \in [-1;-\frac{7}{8})$. □ Из 2-го уравнения имеем $(y-x-a)\cdot(y+x+a)=0$, т. е. $y=x+a$ или $y=-(x+a)$. Подставляя выражение $y=x+a$ в 1-е уравнение, получим уравнение $x+\sqrt{x-2}=0$, у которого нет решений. Подставляя выражение $y=-(x+a)$ в 1-е уравнение, получим уравнение $x+\sqrt{-x-2a-2}=0$, равносильное системе:

$$\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x^2=-x-2a-2. \end{cases}$$

У квадратного уравнения $x^2+x+(2a+2)=0$ будут 2 неположительных корня при одновременном выполнении 3-х условий:

$$\begin{cases} D>0, \\ x_1\cdot x_2 \geqslant 0, \\ x_1+x_2<0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} -7-8a>0, \\ 2a+2 \geqslant 0, \\ -\frac{1}{2}<0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} a<-\frac{7}{8}, \\ a \geqslant -1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

2.10.31. $a \in (-\infty;-3] \cup [4;+\infty)$. ● Из 2-го уравнения получим $(y+4)^2-(x-1)^2=0$, т. е. $x=y+5$ или $x=-y+3$. Далее аналогично 2.10.30.

2.10.32. $a \in \left(-\infty;\frac{-5\sqrt{5}}{4}\right] \cup \left[\frac{5\sqrt{5}}{4};+\infty\right)$. □ Выразим y из 2-го уравнения: $y=x^2-2x$ и подставим это выражение во 2-е уравнение: $8x(x^2-2x)-25=0$, или $8x^3-16x^2-25=0$. Найдем рациональный корень этого уравнения $x=\frac{5}{2}$, выбирая из дробей вида $\frac{m}{n}$, где m — все целые делители числа 25, а n — все натуральные делители числа 8 ($m \in \{\pm1,\pm5,\pm25\}$, $n \in \{1,2,4,8\}$). Итак,

$8x^3 - 16x^2 - 25 = (2x-5)(4x^2+2x+5) = 0$. Других корней у этого уравнения нет. При $x = \frac{5}{2}$ будет $y = \frac{5}{4}$, и $x^2 + y^2 = \frac{125}{16} \leqslant a^2$ при $|a| \geqslant \frac{5\sqrt{5}}{4}$. ■

2.11.1. а) $a \in \left[\frac{7-2\sqrt{7}}{7}; 1\right]$; б) $b = \frac{1}{2}$. ● а) Условие равносильно системе

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ \dfrac{a+1}{2(a-1)} < 1, \\ (a-1)f(1) > 0. \end{cases}$$

б) Так как

$$(x_1 - b)(x_2 - b) = x_1x_2 - b(x_1 + x_2) + b^2 = \frac{2a-1}{a-1} - b\frac{a+1}{a-1} + b^2 =$$
$$= 2 + \frac{1}{a-1} - b\left(1 + \frac{2}{a-1}\right) + b^2 = b^2 - b + 2 + \frac{1-2b}{a-1},$$

то это выражение не зависит от a лишь при $b = \frac{1}{2}$.

2.11.2. $S = 2$; $a = 1$; $a = 2$. □ Найдем дискриминант:

$$\frac{D}{4} = (a^2 - 3a)^2 + (6a^3 - 14a^2 + 4) = a^4 - 5a^2 + 4 = (a^2-1)(a^2-4).$$

Дискриминант неотрицателен при $a \in U = (-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; +\infty)$. Сумма корней $S = 3a - a^2$ принимает наибольшее значение при $a = \frac{3}{2}$, но при этом значении a дискриминант отрицателен, и корни не являются действительными числами. На промежутке $a \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ сумма S возрастает и принимает наибольшее значении при наибольшем a из множества $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cap U$, т. е. при $a = 1$. Тогда $S = 2$. На промежутке $a \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$ сумма S убывает и принимает наибольшее значение при наименьшем a из множества $\left(\frac{3}{2}; \infty\right) \cap U$, т. е. при $a = 2$. Тогда $S = 2$. ■

2.11.3. $b \in (-\infty; -2-\sqrt{21}) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$. □ Записав исходное уравнение в виде: $2(3-b)x^2 + 4(1-b)x + (|2b-5| - |2b+7|) = 0$, видим, что условие равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} > 0, \\ x_{\text{в}} < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4(1-b)^2 - 2(3-b)(|2b-5| - |2b+7|) > 0, \\ -\dfrac{4(1-b)}{2 \cdot 2(3-b)} < 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Первое неравенство равносильно совокупности трех систем:

$$\text{а)} \begin{cases} b < -\frac{7}{2}, \\ 4(1-b)^2 - 2(3-b) \cdot 12 > 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)} \begin{cases} b \in \left[-\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right), \\ 4(1-b)^2 - 2(3-b)(-2-4b) > 0; \end{cases}$$

$$\text{или в)} \begin{cases} b \geqslant \frac{5}{2}, \\ 4(1-b)^2 - 2(3-b) \cdot (-12) > 0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство системы а): $4b^2+16b-68>0$, или $4(b^2+4b-17)>0$: $b\in(-\infty;-2-\sqrt{21})\cup(-2+\sqrt{21};+\infty)$. Получим систему:

$$\text{а)}\ \begin{cases} b<-\frac{7}{2}, \\ b\in(-\infty;-2-\sqrt{21})\cup(-2+\sqrt{21};+\infty), \end{cases} \quad \text{откуда } \underline{b\in(-\infty;-2-\sqrt{21})}.$$

Решим второе неравенство системы б): $-4b^2+12b+16>0$, или $4(b^2-3b-4)<0$: $b\in(-1;-4)$. Получим систему:

$$\text{б)}\ \begin{cases} b\in\left[-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right), \\ b\in(-1;4), \end{cases} \quad \text{откуда } \underline{b\in(-1;5/2)}.$$

Решим второе неравенство системы в): $4b^2-32b+76>0$, откуда b — любое действительное число. Итак, решение системы в): $\underline{b\geqslant 5/2}$.

Решим второе неравенство системы $(*)$: $\frac{b-1}{b-3}>0$, откуда $\underline{b\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)}$. Окончательно, из системы $(*)$ следует, что

$$b\in\left\{(-\infty;-2-\sqrt{21})\cup\left(-1;\frac{5}{2}\right)\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right)\right\}\cap\left\{(-\infty;1)\cup(3;+\infty)\right\},$$

откуда $b\in(-\infty;-2-\sqrt{21})\cup(-1;1)\cup(3;+\infty)$. ■

2.11.4. $a\in(7;+\infty)$. ● Исходное уравнение равносильно совокупности трех систем:

$$\text{а)}\ \begin{cases} a<-10, \\ (a+1)x^2+8x+a-5=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)}\ \begin{cases} a\in[-10;-2), \\ (a+1)x^2-(2a+12)x+a-5=0, \end{cases}$$

$$\text{или в)}\ \begin{cases} a\geqslant -2, \\ (a+1)x^2-8x+a-5=0. \end{cases}$$

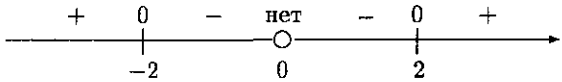
Условие на корни равносильно системе

$$\begin{cases} D>0, \\ x_{\text{в}}>0, \\ f(0)>0. \end{cases}$$

Далее аналогично номеру 2.11.3.

2.11.5. $-1<x_1<x_2<4$ при $a\in\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{5}{6};1\right)\cup(9;+\infty)$; $x_1<-1<x_2<4$ при $a\in\left(-\frac{5}{3};0\right)$; $-1<x_1<4<x_2$ при $a\in\left(0;\frac{5}{6}\right)$; при $a\in(1;9)$ корней нет; $x_1=-1$, $x_2=\frac{11}{5}$ при $a=-\frac{5}{3}$; $x=\frac{7}{3}$ при $a=0$; $x_1=\frac{13}{5}$, $x_2=4$ при $a=\frac{5}{6}$; $x_1=x_2=3$ при $a=1$; $x_1=x_2=\frac{5}{3}$ при $a=9$.

2.12.1. $a\in(-\infty;-32]\cup[32;+\infty)$. □ Исследуем функцию $y=x^3+\frac{48}{x}$ и построим ее график. Найдем производную $y'=3x^2-\frac{48}{x^2}=3\cdot\frac{x^4-16}{x^2}=$ $=3\cdot\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x^2}$. Найдем точки, в которых $y'=0$: $x=2$ или $x=-2$. Расставим знаки производной на оси x:



Значит, $x = -2$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума, и график функции $y = x^3 + \dfrac{48}{x}$ выглядит так, как показано на рис. 14. Очевидно, этот график пересекается с графиком функции $y = a$ при (а) $a \geqslant 32$ или при (б) $a \leqslant -32$. ■

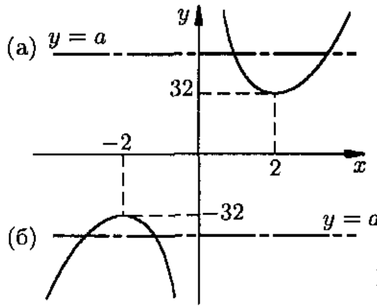


Рис. 14

2.12.2. $x = 0$ при $a = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{-1+\sqrt{1+a} \pm \sqrt{a-2+2\sqrt{1+a}}}{2}$ при $a \in (0; 8)$;

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$, $x_3 = -2$ при $a = 8$; $x_{1,2} = \dfrac{-1+\sqrt{1+a} \pm \sqrt{a-2+2\sqrt{1+a}}}{2}$,

$x_{3,4} = \dfrac{-1-\sqrt{1+a} \pm \sqrt{a-2-2\sqrt{1+a}}}{2}$ при $a > 8$; нет решений при $a < 0$.

□ Преобразуем левую часть уравнения:

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1)^2 + x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^4+2x^3+2x^2}{(x+1)^2} = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + 2\frac{x^2}{x+1}.$$

Сделав замену $t = \dfrac{x^2}{x+1}$, получим квадратное уравнение $t^2 + 2t = a$, или $t^2 + 2t - a = 0$. Найдем дискриминант: $\dfrac{D}{4} = 1 + a \geqslant 0$ при $a \geqslant -1$. Итак, при $a < -1$ решений нет; при $a = -1$ будет $t = -1$, откуда $\dfrac{x^2}{x+1} = -1$, т. е. $x^2 = -x - 1$, или $x^2 + x + 1 = 0$ — это уравнение решений не имеет, значит, и при $a = -1$ — решений нет. При $a > -1$ получим решение $t = \pm\sqrt{1+a}$.

Рассмотрим случай, когда $t = -1-\sqrt{1+a}$, т. е. $\dfrac{x^2}{x+1} = -1-\sqrt{1+a}$, откуда $x^2 + (1+\sqrt{1+a})x + (1+\sqrt{1+a}) = 0$. Найдем дискриминант $D = a-2-2\sqrt{1+a}$ и выясним, при каких значениях a он неотрицателен: $a-2-2\sqrt{1+a} \geqslant 0$, или $a - 2 \geqslant 2\sqrt{1+a} \iff$

$$\iff \begin{cases} a-2 \geqslant 0, \\ (a-2)^2 \geqslant 4(1+a) \end{cases} \iff \begin{cases} a \geqslant 2, \\ a^2 - 8a \geqslant 0 \iff a \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty); \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow a \in [8; +\infty)$. Итак, при $a \in [8; +\infty)$ исходное уравнение имеет 2 решения, совпадающие при $a = 8$: $x_{1,2} = \dfrac{-1-\sqrt{1+a} \pm \sqrt{a-2-2\sqrt{1+a}}}{2}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $t = -1+\sqrt{1+a}$, т. е. $\dfrac{x^2}{x+1} = -1+\sqrt{1+a}$, откуда $x^2 + (1-\sqrt{1+a})x + (1-\sqrt{1+a}) = 0$. Найдем дискриминант $D = a - 2 + 2\sqrt{1+a}$ и выясним, при каких значениях a он неотрицателен: $a - 2 - 2\sqrt{1+a} \geqslant 0$, т. е. $2\sqrt{1+a} \geqslant a - 2$, что равносильно совокупности двух систем:

$$\text{а) } \begin{cases} a-2 \geqslant 0, \\ 1+a \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 2, \\ a \geqslant -1 \end{cases} \Longleftrightarrow a \geqslant 2$$

или

$$\text{б) } \begin{cases} 2-a > 0, \\ 4(1+a) \geqslant (2-a)^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a < 2, \\ a^2 - 8a \leqslant 0 \Longleftrightarrow a \in [0; 8]; \end{cases} \Longleftrightarrow a \in [0; 2).$$

Итак, при $a \in [0; +\infty)$ исходное уравнение имеет еще 2 решения: $x_{3,4} = \dfrac{-1+\sqrt{1+a} \pm \sqrt{a-2+2\sqrt{1+a}}}{2}$ (совпадающие при $a = 0$). ■

2.12.3. 3. □ Сделаем замену $x = \cos t$ и получим уравнение

$$8\cos t(2\cos^2 t - 1)(8\cos^4 t - 2\cos^2 t + 1) = 1,$$

которое на промежутке $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет ровно столько же корней, сколько исходное уравнение на промежутке $x \in (0; 1]$. Так как $2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$, а $8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1 = -2\sin^2 2t + 1 = \cos 4t$, то получим равносильное уравнение $8\cos t \cos 2t \cos 4t = 1$ или, умножая обе части на $\sin t \neq 0$, получим уравнение $8\sin t \cos 2t \cos 4t = \sin t$, т. е. $\sin 8t = \sin t$, значит, $\sin \frac{7t}{2} \cos \frac{9t}{2} = 0$. Если $\sin \frac{7t}{2} = 0$, то $t = \frac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$, и на промежутке $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ — один корень $\frac{2\pi}{7}$. Если $\cos \frac{9t}{2} = 0$, то $t = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi m}{9}$, $m \in \mathbb{Z}$, и на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ — еще два корня: $\frac{\pi}{9}$ и $\frac{3\pi}{9} = \frac{\pi}{3}$. ■

2.12.4. 4. ● Аналогично 2.12.3. Сделать замену $x = \cos t$.

2.12.5. $(6; 4)$. □ Вычитая из первого уравнения второе, убеждаемся, что их общие корни являются корнями уравнения $(*)$: $x^2 - 2x = u - v$. Умножив это уравнение на x и вычитая из 2-го уравнения, получим, что эти корни также удовлетворяют уравнению $(**)$: $2x^2 + (u - v - 6)x - v = 0$. Умножив уравнение $(*)$ на 2 и вычитая из уравнения $(**)$, получим, что линейное уравнение $(u - v - 2)x + 2u - 3v = 0$ имеет два различных корня. Это возможно лишь тогда, когда $u - v - 2 = 0$ и $2u - 3v = 0$, откуда $u = 6$, $v = 4$. ■

2.12.6. $(2; 3)$. ● Аналогично 2.12.5. Вычесть из 1-го уравнения второе и получить уравнение $(*)$: $-5x^2 + 15x - b = a$, для которого корнями являются общие корни 1-го и 2-го уравнений. Умножив это уравнение на x и сложив его со вторым уравнением, умноженным на 5, получить уравнение $(**)$: $15x^2 - 40x - bx + 5b = ax$. Умножив уравнение $(*)$ на 3 и сложив его с уравнением $(**)$, получить линейное уравнение $x(5 - a - b) + 2b = 3a$, имеющее два различных корня.

2.13.1. $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = 1 - \sqrt{2}$. □ Перенеся выражение $\sqrt{3-x}$ в правую часть уравнения, возведем обе части в квадрат и получим уравнение: $x^2(1+x) = 4(x^2+1) + 3 - x - 4\sqrt{x^2+1}\sqrt{3-x}$, т. е. $4\sqrt{x^2+1}\sqrt{3-x} = -x^3 + 3x^2 - x + 3 + 4$, или $4\sqrt{x^2+1}\sqrt{3-x} = (x^2+1)(3-x) + 4$. Сделав замену $t = \sqrt{x^2+1}\sqrt{3-x}$, получим квадратное уравнение: $4t = t^2 + 4$, или $(t-2)^2 = 0$, т. е. $\sqrt{x^2+1}\sqrt{3-x} = 2$, откуда $(x^2+1)(3-x) = 4$, $-x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$. Очевидно, значение $x = 1$ — корень этого уравнения, поэтому левую часть уравнения можно записать в другом виде: $(x-1)(-x^2 + 2x + 1) = 0$, значит $x^2 - 2x - 1 = 0$, откуда $x = 1 + \sqrt{2}$ или $x = 1 - \sqrt{2}$. ■

2.13.2. $x = -\frac{1}{5}$. □ Введем функцию $f(t) = t(2 + \sqrt{t^2+3})$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде: $f(2x+1) + f(3x) = 0$, или $f(2x+1) = -f(3x)$, откуда (в силу нечетности функции f) получим $f(2x+1) = f(-3x)$. Так как функция $f(t)$ монотонно возрастает при $t > 0$ (как произведение возрастающих положительных функций t и $2 + \sqrt{t^2+3}$) и нечетна, то она возрастает и при всех $t \in (-\infty; +\infty)$. Значит, равенство $f(2x+1) = f(-3x)$ равносильно равенству $2x + 1 = -3x$, т. е. $x = -\frac{1}{5}$. ■

2.13.3. $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. □ Перенеся в правую часть уравнения выражение $2x^2$ и возведя обе части в квадрат, получим уравнение $\frac{1 + 2x\sqrt{1-x^2}}{2} = 1 - 4x^2 + 4x^4$. Сделав замену $t = 2x\sqrt{1-x^2}$ (тогда $t^2 = 4x^2 - 4x^4$), запишем уравнение в виде: $\frac{(1+t)}{2} = 1 - t^2$, откуда $t = -1$ или $t = \frac{1}{2}$. Если $t = -1$, то, подставляя выражение $2x\sqrt{1-x^2} = -1$ (очевидно, что $x < 0$) в условие, получим уравнение $2x^2 = 1$, откуда $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Если же $t = \frac{1}{2}$, то подставляя выражение $2x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}$ (очевидно, $x > 0$) в условие, получим уравнение

$$\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} + 2x^2 = 1, \quad 2x^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}},$$

то есть

$$x = +\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}. ■$$

2.13.4. $x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$. • Сделать замену $t = 4x\sqrt{1-4x^2}$. Далее аналогично 2.13.3.

2.13.5. 1. □ Перенеся 1 в правую часть уравнения, возведем обе части в квадрат и получим уравнение: $x + 1 - 2\sqrt{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{x-1}{x} = 1$. Перенесем слагаемое с радикалами в правую часть уравнения, запишем дробь $\frac{x-1}{x}$ в виде $1 - \frac{1}{x}$ и приведем подобные слагаемые. Получив уравнение $x - \frac{1}{x} + 1 = 2\sqrt{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x}}$, представим правую часть в виде $2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} = 2\sqrt{x - \frac{1}{x}}$, после чего сделаем замену $t = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$. Получим квадратное уравнение относительно переменной t: $t^2 + 1 = 2t$, откуда $1 = t = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$, значит $x - \frac{1}{x} = 1$. Умножая обе части на x, получим квадратное уравнение: $x^2 - x - 1 = 0$. Так как дискриминант равен $5 > 0$, то существуют два различных действительных корня, сумма которых по теореме Виета равна 1. ■

2.13.6. $k \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. □ Сделав замену $t = \sqrt{x+1} \geqslant 0$, получим квадратное уравнение $(*)$: $t^2 + 2kt - k + 2 = 0$. Исходное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение $(*)$ имеет хотя бы один неотрицательный корень. Положим $f(t) = t^2 + 2kt - k + 2$. У квадратного уравнения $f(t) = 0$ найдется неотрицательный корень в одном из двух случаев:

$$\text{а)} \begin{cases} D \geqslant 0, \\ x_{\text{в}} \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)} \begin{cases} x_{\text{в}} < 0, \\ f(0) \leqslant 0, \end{cases}$$

где D — дискриминант квадратного уравнения $(*)$, а $x_{\text{в}}$ — первая координата вершины параболы $y = f(t)$. Найдем $\frac{D}{4} = k^2 + k - 2$ и $x_{\text{в}} = -\frac{2k}{2} = -k$. Отсюда системы а) и б) запишутся следующим образом:

$$\text{а)} \begin{cases} k^2 + k - 2 \geqslant 0, \\ -k \geqslant 0; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} -k < 0, \\ f(0) = 2 - k \leqslant 0. \end{cases}$$

Решая квадратное неравенство $k^2 + k - 2 \geqslant 0$, получим $k \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. Решим системы:

а) $\begin{cases} k \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty), \\ k \leqslant 0. \end{cases}$ Решение: $k \in (-\infty; -2]$.

б) $\begin{cases} k > 0, \\ k \geqslant 2. \end{cases}$ Решение: $k \in [2; +\infty)$. ■

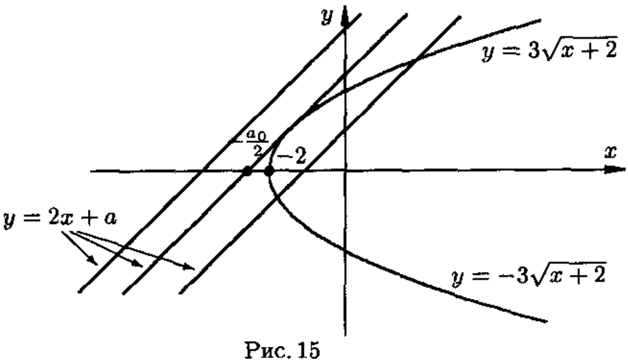


Рис. 15

2.13.7. $a \in \left(-\infty; \frac{41}{8}\right]$. □ Возведем обе части уравнения в квадрат и перенесем все слагаемые в правую часть, получим квадратное уравнение

$$(*) \qquad 4x^2 + x(4a - 9) + a^2 - 18 = 0.$$

Найдем дискриминант $D = 369 - 72a$. Так как $D \geqslant 0$ при всех значениях $a \leqslant \frac{41}{8} = a_0$, то при каждом таком значении a имеется хотя бы одно решение у уравнения $(*)$, а значит, и у уравнения $3\sqrt{x+2} = 2x + a$ (см. рис. 15). ■

2.13.8. $a \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. □ Возведем обе части уравнения в квадрат: $2xy + a = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$, откуда $a + 1 = (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = (x+1)^2 + (y+1)^2$. Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + y + 1 \geqslant 0, \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = a + 1. \end{cases}$$

Неравенство $x + y + 1 \geqslant 0$ задает полуплоскость с границей $y = -1 - x$. Уравнение $(x+1)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{a+1})^2$ задает на плоскости окружность с центром в точке $O(-1; -1)$ и радиусом $\sqrt{a+1}$ (см. рис. 16). Эта окружность имеет общие точки с полуплоскостью $x + y + 1 \geqslant 0$ при радиусе окружности $\sqrt{a+1}$ не меньшем, чем расстояние от центра окружности до ближайшей точки P на прямой $y = -1 - x$: $OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Итак, $\sqrt{a+1} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $a \geqslant -\frac{1}{2}$. ■

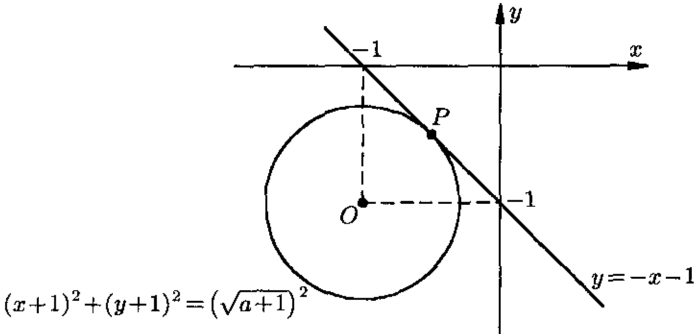


Рис. 16

2.13.9. $a \in \left[-\frac{1}{12}; 0\right]$. □ Сделаем замену $t = 2x - x^2$. Тогда $t \in (-\infty; 1]$, и для решения задачи надо найти, при каких значениях параметра a имеет решение уравнение $\sqrt{3a + \sqrt{3a + t}} = t$, причем $t \in [0; 1]$. Возведем обе части последнего уравнения в квадрат, получим уравнение $(*)$: $\sqrt{3a + t} = t^2 - 3a$. График функции $y = \sqrt{3a + t}$ — верхняя часть параболы (I) с вершиной $(-3a; 0)$ и ветвями, направленными вправо (рис. 17), а график функции $y = t^2 - 3a$ — парабола (II) с вершиной $(0; -3a)$ и ветвями, направленными вверх (см. рис. 18). Очевидно, что части парабол (I) и (II) (соответственно верхняя и правая половина) симметричны относительно прямой $y = t$, и точки пересечения парабол лежат на этой прямой. Построим графики (I) и (II) при $a = 0$ (рис. 19). Очевидно, что уравнение $(*)$ имеет два корня $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$. Если теперь увеличить значение a, то часть параболы (I) сдвинется влево, а часть параболы (II) — вниз (рис. 20). Уравнение $(*)$ по-прежнему имеет положительное решение, но оно, очевидно, больше единицы. Если же сделать значение a немного меньше нуля, то часть параболы (**I**) сдвинется вправо, часть параболы (**II**) сдвинется вверх, и точки их пересечения начнут сближаться, причем $0 < t_1 < t_2 < 1$. При некотором значении $a = a_0$ достигается крайнее положение, при котором кривые еще имеют общую точку, лежащую на прямой $y = t$ (рис. 21).

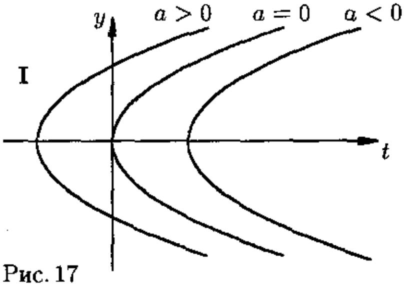


Рис. 17

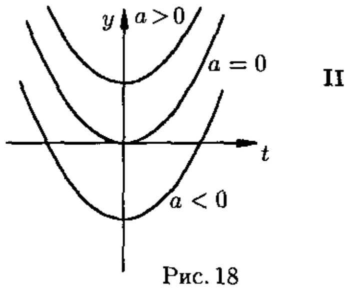


Рис. 18

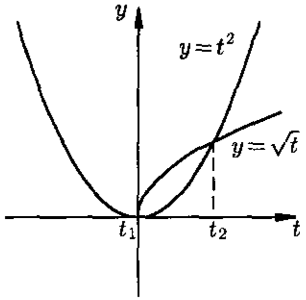


Рис. 19

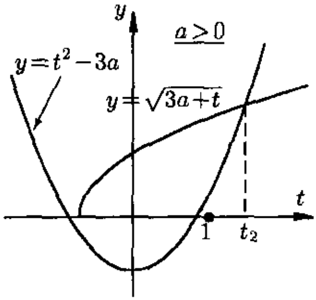


Рис. 20

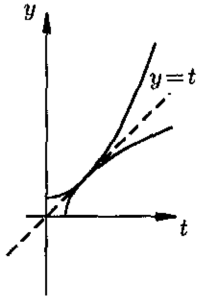


Рис. 21

Решим уравнение $t^2 - 3a = t$, т.е. $t^2 - t - 3a = 0$. Найдем дискриминант $D = 1 + 12a$, он неотрицателен при $a \geqslant -\frac{1}{12}$. При $a = -\frac{1}{12}$ уравнение имеет единственный корень, а при $a < -\frac{1}{12}$ все точки на параболе $y = t^2 - 3a$ лежат выше прямой $y = t$. ■

2.13.10. $a = \dfrac{(1-\sqrt{2})}{2}$. □ Запишем уравнение в виде:

$$x^2a^2 + 2(\sqrt{2}-1)\cdot x\cdot a + (\sqrt{x-2} + 3 - 2\sqrt{2}) = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно a, которое имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант $D(x)$ неотрицателен. Вычислим $\dfrac{D(x)}{4} =$ $= \left((\sqrt{2}-1)x\right)^2 - x^2(\sqrt{x-2} + 3 - 2\sqrt{2}) = -x^2\sqrt{x-2}$. Очевидно, $-x^2\sqrt{x-2} \geqslant 0$ лишь при $x = 2$. При этом условии получим $a = \dfrac{(1-\sqrt{2})}{2}$. ■

2.13.11. $a \in [2; 3) \cup (3; 4]$. □ Запишем исходное уравнение в виде:

$$3 - \sqrt{6x - x^2 - 8} = a - \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2},$$

а затем — в виде

$$3 - \sqrt{1 - (x-3)^2} = a - \sqrt{1 - (x-a)^2}.$$

Теперь проведем несколько преобразований этого уравнения: $(y-a)^2 + (x-a)^2 = 1$ — это уравнение задает на плоскости окружность с центром в точке $(a;a)$ и радиусом 1. Отсюда $(y-a)^2 = 1-(x-a)^2$, т.е. $y-a = \pm\sqrt{1-(x-a)^2}$. Из этого ясно, что уравнение $y = 3-\sqrt{1-(x-3)^2}$ задает нижнюю полуокружность окружности радиуса 1 с центром в точке $(3;3)$, а уравнение $y = a-\sqrt{1-(x-a)^2}$ задает нижнюю полуокружность окружности радиуса 1 с центром в точке $(a;a)$. Очевидно, что указанные полуокружности пересекаются при любом значении $a \in [2;3]$, причем при $a=3$ они совпадают, т.е. множество решений исходного уравнения бесконечно. ■

2.13.12. $a \in [1;2) \cup (2;3]$. ● Аналогично 2.13.11.

2.13.13. $x_1 = 1-\sqrt{a^2-2a+5}$, $x_2 = 1+\sqrt{a^2+4a+8}$ при $a < -2$; $x_1 = 1-\sqrt{a^2-2a+5}$, $x_2 = 1-\sqrt{a^2+4a+8}$ при $a \in \left[-2;-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};1\right]$; $x_1 = 1+\sqrt{a^2-2a+5}$, $x_2 = 1-\sqrt{a^2+4a+8}$ при $a > 1$; $x = -\frac{3}{2}$ при $a = -\frac{1}{2}$.

□ Заметим, что подкоренное выражение $\dfrac{x+1}{x-3}$ неотрицательно при $x \leqslant -1$ или при $x > 3$. При $x > 3$ имеем

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = \sqrt{(x-3)(x-3)}\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = \sqrt{(x-3)(x+1)},$$

а при $x \leqslant -1$ будет

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -\sqrt{(x-3)(x-3)}\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -\sqrt{(x-3)(x+1)}.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно объединению двух систем:

$$(\mathbf{I}) \quad \begin{cases} (x-3)(x+1)+3\sqrt{(x-3)(x+1)} = (a-1)(a+2), \\ x > 3, \end{cases}$$

или

$$(\mathbf{II}) \quad \begin{cases} (x-3)(x+1)-3\sqrt{(x-3)(x+1)} = (a-1)(a+2), \\ x \leqslant -1. \end{cases}$$

Решим систему (**I**). Сделав замену $t = \sqrt{(x-3)(x+1)}$, находим, что первое уравнение системы равносильно системе

$$(\mathbf{I}.1) \begin{cases} t^2+3t = (a-1)(a+2), \\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение $t^2+3t-(a-1)(a+2) = 0$. Находим дискриминант $D = 4a^2+4a+1 = (2a+1)^2$, т.е. $D \geqslant 0$ при всех значениях a. Получаем два корня $t_1 = a-1$ и $t_2 = -a-2$ и, соответственно, два решения системы (**I**.1): при $a \geqslant 1$ будет $t = a-1$, при $a \leqslant -2$ будет $t = -a-2$.

а) Рассмотрим случай $a \geqslant 1$: $t = a-1 = \sqrt{(x-3)(x+1)}$, значит, $(a-1)^2 = (x-3)(x+1)$, или $x^2-2x-(a^2-2a+4) = 0$. Дискриминант этого квадратного уравнения $\frac{D}{4} = a^2-2a+5$ положителен при любом a, значит, $x_1 = 1+\sqrt{a^2-2a+5}$ и $x_2 = 1-\sqrt{a^2-2a+5}$. Вспоминая условие $x > 3$

из системы (**I**), *видим, что x_2 этому условию не удовлетворяет.* Решая неравенство $1+\sqrt{a^2-2a+5}>3$, легко видеть, что оно верно при всех значениях $a\neq 1$. Итак, имеем решение системы (**I**) при $a>1$: $x_1=1+\sqrt{a-2a+5}$.

б) Рассмотрим случай $a\leqslant -2$: $t=-a-2=\sqrt{(x-3)(x+1)}$, значит, $(-a-2)^2=(x-3)(x+1)$, или $x^2-2x-(a^2+4a+7)=0$. Дискриминант этого квадратного уравнения $\dfrac{D}{4}=a^2+4a+8$ положителен при любом значении a, значит, $x_1=1-\sqrt{a^2+4a+8}$ и $x_2=1+\sqrt{a^2+4a+8}$. Условию $x>3$ из системы (**I**) корень x_1 не удовлетворяет. Решая неравенство $1+\sqrt{a^2+4a+8}>3$ легко видеть, что оно верно при всех значениях $a\neq -2$. Итак, имеем еще одно решение системы (**I**) при $a<-2$: $x_2=1+\sqrt{a^2+4a+8}$.

Теперь решим систему (**II**). Сделав замену $t=\sqrt{(x-3)(x+1)}$, находим, что первое уравнение системы (**II**) равносильно системе

$$(\mathbf{II}.1)\ \begin{cases} t^2-3t=(a-1)(a+2),\\ t\geqslant 0.\end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $t^2-3t-(a-1)(a+2)=0$, получаем два корня $t_1=1-a$ *и* $t_2=a+2$ *при любом значении a и, соответственно, два решения* системы (**II**.1): при $a\leqslant 1$ будет $t=1-a$, при $a\geqslant -2$ будет $t=a+2$.

в) Рассмотрим случай $a\leqslant 1$: $t=1-a=\sqrt{(x-3)(x+1)}$. Как и в пункте а) это уравнение имеет два корня: $x_1=1-\sqrt{a^2-2a+5}$ и $x_2=1+\sqrt{a^2-2a+5}$ при любом значении a. Условию $x\leqslant -1$ из системы (**II**) корень x_2 не удовлетворяет. Решая неравенство $1-\sqrt{a^2-2a+5}\leqslant -1$, легко видеть, что оно верно при всех значениях a. Итак, имеем решение системы (**II**): при $a\leqslant 1$ будет $x_1=1-\sqrt{a^2-2a+5}$.

г) Рассмотрим случай $a\geqslant -2$: $t=a+2=\sqrt{(x-3)(x+1)}$. Как и в пункте б) это уравнение имеет два корня $x_1=1+\sqrt{a^2+4a+8}$ и $x_2=1-\sqrt{a^2+4a+8}$ при любом значении a. Условию $x\leqslant -1$ из системы (**II**) корень x_1 не удовлетворяет. Решая неравенство $1-\sqrt{a^2+4a+8}\leqslant -1$, легко видеть, что оно верно при всех значениях a. Итак, имеем еще одно решение системы (**II**): при $a\geqslant -2$ будет $x_2=1-\sqrt{a^2+4a+8}$.

Теперь рассмотрим возможность совпадения различных корней. Очевидно, что при $a<-2$ и при $a>1$ значения x_1 и x_2 могут совпадать, только если одновременно $\sqrt{a^2+4a+8}=0$ и $\sqrt{a^2-2a+5}=0$, чего не бывает ни при каком значении a. При $a\in[-2;1]$ значения

$$x_1=1-\sqrt{a^2-2a+5}\quad \text{и}\quad x_2=1-\sqrt{a^2+4a+8}$$

могут совпадать лишь при условии $\sqrt{a^2-2a+5}=\sqrt{a^2+4a+8}$, т. е. при $a^2-2a+5=a^2+4a+8$, $a=-\frac{1}{2}\in[-2;1]$. ■

2.13.14. $x=\dfrac{1-a+\sqrt{3a^2+1}}{2}$ при $a\in\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $x_1=1$, $x_2=0$ при $a=0$; $x_1=\dfrac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1-a-\sqrt{3a^2-3}}{2}$ при $a\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]\cup$ $\cup\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. □ Положив $y=x+\frac{a}{2}$ и $b=\dfrac{3a^2}{4}$, получим уравнение $y^2-b=$ $=\sqrt{y+b}$, которое после замены $z=\sqrt{y+b}$ равносильно системе

$$\begin{cases} y^2 - b = z, \\ z^2 - b = y, \\ \quad z \geqslant 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим уравнение $(y-z)(y+z) = z-y$, т. е. $y = z$ или $y + z = -1$.

1) Решим уравнение $y = z$, или $y = \sqrt{y+b}$, т. е. $x + \frac{a}{2} = \sqrt{x + \frac{a}{2} + \frac{3a^2}{4}}$. Возведем обе части этого уравнения в квадрат, учитывая условие $x + \frac{a}{2} \geqslant 0$:

$$\begin{cases} x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = x + \frac{a}{2} + \frac{3a^2}{4} \Longleftrightarrow x^2 + (a-1)x - \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} = 0; \\ x \geqslant -\frac{a}{2}. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $x^2 + (a-1)x - \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} = 0$, получаем два корня: $x_1 = \dfrac{1 - a + \sqrt{3a^2+1}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{1 - a - \sqrt{3a^2+1}}{2}$ при всех действительных значениях a. Условию $x \geqslant -\frac{a}{2}$ удовлетворяет x_1 при любом значении a и x_2 при $a = 0$ (в этом случае $x_2 = 0$, а $x_1 = 1$). Итак, при любом значении $a \neq 0$ есть решение $x_1 = \dfrac{1 - a + \sqrt{3a^2+1}}{2}$, а при $a = 0$ — два решения: $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$.

2) Решим уравнение $y + z = -1$, т. е. $x + \frac{a}{2} + \sqrt{x + \frac{a}{2} + \frac{3a^2}{4}} = -1$, или $\sqrt{x + \frac{a}{2} + \frac{3a^2}{4}} = -\left(x + \frac{a}{2} + 1\right)$. Возведем обе части уравнения в квадрат, учитывая условие $x + \frac{a}{2} + 1 \leqslant 0$, и получим систему:

$$\begin{cases} x + \frac{a}{2} + \frac{3a^2}{4} = x^2 + \frac{a^2}{4} + 1 + xa + 2x + a \Longleftrightarrow x^2 + x(a+1) + 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2} = 0; \\ x + \frac{a}{2} + 1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $x^2 + x(a+1) + 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$, получим два корня: $x_1 = \dfrac{-1 - a + \sqrt{3a^2-3}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{-1 - a - \sqrt{3a^2-3}}{2}$ при $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Условие $x + \frac{a}{2} + 1 \leqslant 0$ записывается в виде неравенства

$$\frac{-1 - a + \sqrt{3a^2-3}}{2} + \frac{a}{2} + 1 \leqslant 0 \quad \text{для } x = x_1$$

и в виде неравенства

$$\frac{-1 - a - \sqrt{3a^2-3}}{2} + \frac{a}{2} + 1 \leqslant 0 \quad \text{для } x = x_2.$$

То есть при $x = x_1$ имеем неравенство $\frac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3a^2-3}}{2} \leqslant 0$ — не имеет решений ни при каких значениях a, при $x = x_2$ имеем неравенство $\frac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3a^2-3}}{2} \leqslant 0$, т. е. $1 \leqslant \sqrt{3a^2 - 3}$, значит $a^2 \geqslant \frac{4}{3}$, откуда $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$. Значит, при этих значениях a имеется решение $x_2 = \frac{-1 - a - \sqrt{3a^2 - 3}}{2}$. ■

2.14.1. $a \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$. □ Построим графики функций $y = a - 1$ и $y = x|x + 2a|$ в случаях $a < 0$, $a = 0$ и $a > 0$ (рис. 22–24). Ясно, что при любом значении $a < 0$ решение исходного уравнения единственно (рис. 22). При $a = 0$ решение исходного уравнения также единственно (рис. 23).

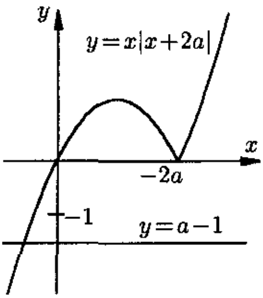


Рис. 22

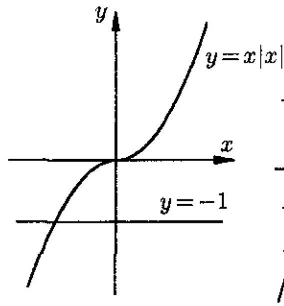


Рис. 23

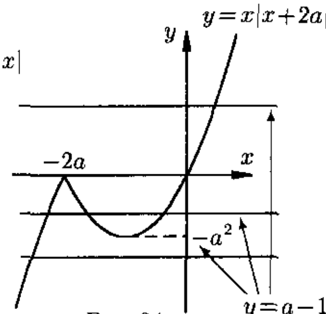


Рис. 24

Наконец, при $a > 0$ графики выглядят так, как показано на рис. 24. Значит, исходное уравнение имеет единственное решение при $a - 1 > 0$ (т. е. при $a > 1$); или при $-a^2 > a - 1$ (и при $a > 0$). В последнем случае решим квадратное неравенство: $-a^2 > a - 1$; $a^2 + a - 1 < 0$. Соответствующее квадратное уравнение имеет корни $a_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ и $a_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, значит, решение неравенства таково: $a \in \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$. Условию $a > 0$ удовлетворяют значения $a \in \left(0; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$. Отсюда получаем ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup \{0\} \cup \left(0; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup$ $\cup\ (1; +\infty)$. ■

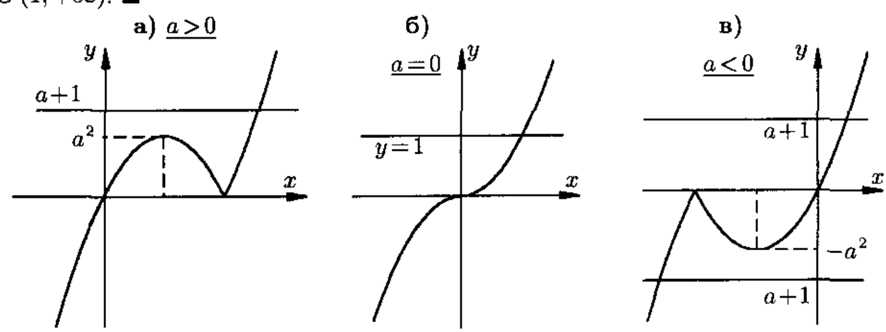


Рис. 25

2.14.2. $a \in \left(-1; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$. ● Построить графики функций $y = x|x - 2a|$ и $y = 1 + a$, рассмотрев отдельно варианты $a > 0$, $a = 0$ и $a < 0$. Решение уравнения единственно в случаях а)–в), показанных на рис. 25. Им соответствуют системы

$$\text{а) } \begin{cases} a > 0, \\ a+1 > a^2; \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б) } a = 0 \quad \text{или} \quad \text{в) } \begin{cases} a < 0, \\ a+1 > 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0, \\ a+1 < -a^2; \end{cases}$$

Остается решить указанные системы.

2.14.3. а) $k \in (-23; 0)$, б) $k \in (-\infty; -23) \cup (0; +\infty)$. □ Исходное уравнение равносильно совокупности четырех систем:

$$\text{а) } \begin{cases} x - k^2 \geqslant 0, \\ x + 4k \geqslant 0, \\ x = -\dfrac{k(k+1)}{4}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б) } \begin{cases} x - k^2 \geqslant 0, \\ x + 4k < 0, \\ x = \dfrac{k(k-23)}{2}; \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x - k^2 < 0, \\ x + 4k \geqslant 0, \\ x = \dfrac{k(k-1)}{6}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{г) } \begin{cases} x - k^2 < 0, \\ x + 4k < 0, \\ k(k+23) = 0. \end{cases}$$

Решим систему а), подставляя выражение для x из 3-го уравнения в 1-е и 2-е неравенства, получим систему:

$$\begin{cases} -\dfrac{k^2-k}{4} - k^2 \geqslant 0, \\ \dfrac{-k^2-k}{4} + 4k \geqslant 0, \\ x = -\dfrac{k(k+1)}{4}; \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} k(5k+1) \leqslant 0, \\ k(k-15) \leqslant 0, \\ x = -\dfrac{k(k+1)}{4}; \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} \left.\begin{array}{l} k \in \left[-\frac{1}{5}; 0\right] \\ k \in [0; 15] \end{array}\right\} k = 0 \\ x = -\dfrac{k(k+1)}{4} = 0, \end{cases}$$

т. е. $\{x = 0,\ k = 0\}$.

Решая систему б) (подставляя выражение для x из 3-го уравнения в 1-е и 2-е неравенства), получим, что эта система решений не имеет.

Система в) равносильна совокупности систем

$$\text{в}_1) \begin{cases} k > 0, \\ x = \dfrac{k(k-1)}{6}; \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{в}_2) \begin{cases} k \leqslant -23, \\ x = \dfrac{k(k-1)}{6}. \end{cases}$$

Система г) равносильна совокупности систем

$$\text{г}_1) \begin{cases} k = 0, \\ x < 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{г}_2) \begin{cases} k = -23, \\ x < 92. \end{cases}$$

Итак, при $-23 < k < 0$ решений нет, при $k < -23$ будет $x = \dfrac{k(k-1)}{6}$; при $k = -23$ будет $x \leqslant 92$; при $k = 0$ будет $x \leqslant 0$; при $k > 0$ будет $x = \dfrac{k(k-1)}{6}$. ■

2.14.4. а) $\varnothing$; б) $a \in (-\infty; -8) \cup (0; +\infty)$. ● Исходное уравнение равносильно *объединению четырех систем:*

$$\text{а) } \begin{cases} x - 3a \geqslant 0, \\ x - a^2 \geqslant 0, \\ x = \dfrac{a^2+16a}{10}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б) } \begin{cases} x - 3a \geqslant 0, \\ x - a^2 < 0, \\ x = \dfrac{-a^2+16a}{8}; \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} x-3a<0, \\ x-a^2 \geqslant 0, \\ a^2-14a=0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{г)}\ \begin{cases} x-3a<0, \\ x-a^2<0, \\ x=\dfrac{-a^2+14a}{2}. \end{cases}$$

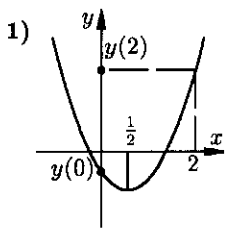
Решить каждую из систем а), б), г), подставляя значения x из 3-го уравнения в 1-е и 2-е неравенства; в системе в) из 3-го уравнения $a = 0$ или $a = 14$ подставить в 1-е и 2-е неравенства. Далее — аналогично номеру 2.14.3.

2.14.5. $c = 4$, $c = \frac{19}{4}$. ☐ Исходное уравнение равносильно совокупности 3-х систем:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x \in (-\infty;0) \cup [2;+\infty), \\ x^2-x+2-c=0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)}\ \begin{cases} x \in [0;1), \\ x^2-3x-2+c=0; \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} x \in [1;2), \\ 3x^2-9x+2+c=0. \end{cases}$$

Решим систему а). Так как график функции $y = x^2-x+2-c = 0$ представляет собой параболу (ветвями вверх) с абсциссой вершины $x_{\text{в}} = \frac{1}{2}$, то у системы а) в случае 1) (рис. 26) будет только одно решение (меньшее нуля), а в случае 2) (рис. 26) — ровно два решения (одно меньше нуля, другое больше 2):



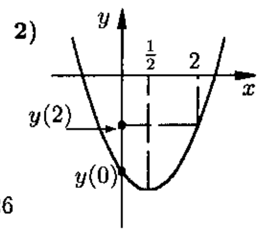


Рис. 26

Случаю 1) соответствует система

$$\begin{cases} y(0)<0, \\ y(2)>0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2-c<0, \\ 2^2-2+2-c>0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c>2, \\ c \geqslant 4. \end{cases}$$

Случаю 2) соответствует система

$$\begin{cases} y(0)<0, \\ y(2) \leqslant 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2-c<0, \\ 2^2-2+2-c \leqslant 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c>2, \\ c<4. \end{cases}$$

Итак, при $c \in (2;4)$ — у системы а) одно решение; при $c \geqslant 4$ — два решения; при $c \leqslant 2$ — ни одного решения.

Решим систему б). Так как график функции $y = x^2-3x-2+c$ является параболой (ветвями вверх) с абсциссой вершины $x_{\text{в}} = \frac{3}{2}$. то у системы будет одно решение только в случае

$$\begin{cases} y(0) \geqslant 0, \\ y(1)<0, \end{cases} \text{т. е.} \begin{cases} -2+c \geqslant 0, \\ 1^2-3\cdot1-2+c<0, \end{cases} \text{т. е.} \begin{cases} c \geqslant 2 \\ c<4, \end{cases}$$

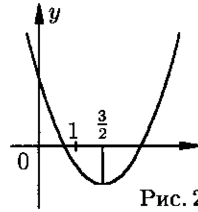


Рис. 27

а во всех остальных случаях — ни одного. Итак, у системы б) при $c \in [2;4)$ — одно решение, при остальных c — ни одного решения.

Решим систему в). Так как график функции $y = 3x^2 - 9x + c + 2$ выглядит качественно также как и предыдущий ($x_{\text{в}} = \frac{3}{2}$), то в случаях 1) и 3) у системы будет одно решение, в случае 2) — два решения (см. рис. 28).

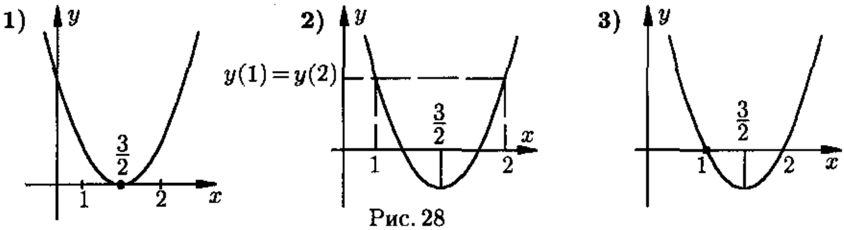


Рис. 28

1) $D = 0$, т. е. $9^2 - 4 \cdot 3(c+2) = 57 - 12c = 0$, $c = \frac{19}{4}$.

2) $\begin{cases} y(1) > 0, \\ D > 0, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + c + 2 > 0, \\ c < \frac{19}{4}, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} c > 4, \\ c < \frac{19}{4}. \end{cases}$

3) $y(1) = 0$, т. е. $c = 4$.

Итак, система в) при $c = \frac{19}{4}$ и $c = 4$ имеет ровно одно решение, при $c \in \left(4; \frac{19}{4}\right)$ имеет два решения.

Изобразим полученные результаты:

$c \in$	$(-\infty; 2)$	$\{2\}$	$(2;4)$	$\{4\}$	$\left(4; \frac{19}{4}\right)$	$\left\{\frac{19}{4}\right\}$	$\left(\frac{19}{4}; \infty\right)$
а)	0	0	1	2	2	2	2
б)	0	1	1	0	0	0	0
в)	0	0	0	1	2	1	0

Итак, три различных решения у систем а), б) и в) будут при $c = 4$ или $c = \frac{19}{4}$. ■

2.14.6. $c = 2$, $c = \frac{10}{3}$. ● Рассмотреть решения трех систем:

$\begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup [2; +\infty), \\ x^2 - 4x - 3 - c = 0; \end{cases}$ *или* $\begin{cases} x \in [1; 2), \\ x^2 + 2x + c - 1 = 0; \end{cases}$ *или*

$\begin{cases} x \in [1; 1), \\ 3x^2 + 2x + c - 3 = 0; \end{cases}$

аналогично номеру 2.14.5, используя график квадратичной функции.

2.14.7. $a \in (0;3) \cup \{5\}$. ● Рассмотреть 4 случая: $x < -3$, $x \in [-3; 2)$, $x \in [2; 4)$, $x \geqslant 4$.

2.14.8. $\frac{1}{5}$; $a = \pm\frac{2}{5}$; $b = \frac{4}{5}$. ☐ Сделаем замену $z = x - 4$ и преобразуем уравнение к виду $\big||z| - 2\big| = az + b$. Построим графики функций $y = \big||z| - 2\big|$ и $y = az + b$:

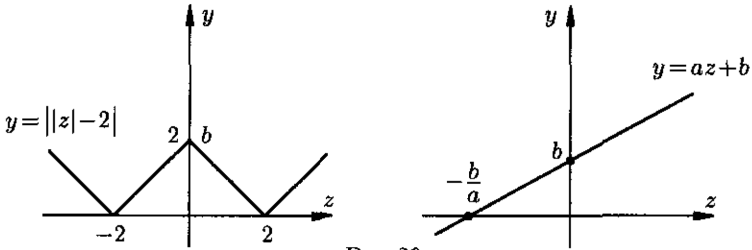


Рис. 29

Очевидно, эти графики могут пересекаться ровно в трех точках только в следующих случаях (см. рис. 30):

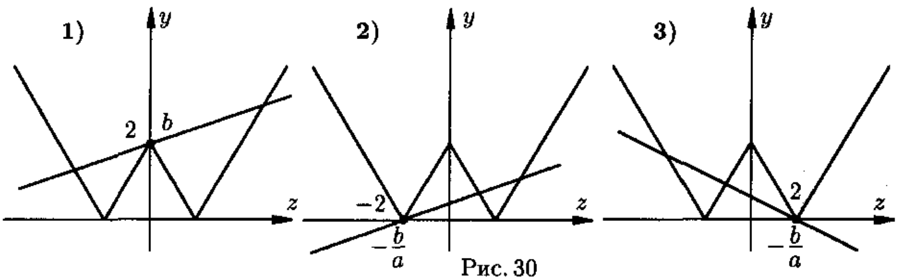


Рис. 30

В случае 1) будет $b = 2$, $-1 < a < 1$, в случае 2) будет $-\frac{b}{a} = -2$, $0 < a < 1$, в случае 3) будет $-\frac{b}{a} = 2$, $0 > a > -1$. В случае 1) подстановка значения $b = 2$ в выражение $a^2 + (b-1)^2$ дает выражение $a^2 + 1$, минимум которого равен 1 при значении $a = 0$. В случае 2) будет $b = 2a$; подставляя это значение в выражение $a^2 + (b-1)^2$ имеем $a^2 + (2a-1)^2 = 5a^2 - 4a + 1$; минимум достигается при $a = -\frac{-4}{2\cdot 5} = \frac{2}{5}$ и равен $\frac{1}{5}$ $\left(b = 2\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{5}\right)$. В случае 3) будет $b = -2a$, и подставляя это значение в выражение $a^2 + (b-1)^2$, получаем $a^2 + (-2a-1)^2 = 5a^2 + 4a + 1$; минимум достигается при $a = -\frac{4}{2\cdot 5} = -\frac{2}{5}$ и равен $\frac{1}{5}$ $\left(b = -2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}\right)$. ■

2.14.9. 8 пар. □ Записав уравнение в виде:

$$|(x^2-4) + (y^2-9) + 8| + |x^2-4| + |y^2-9| = 8,$$

сделаем замену $a = x^2-4$, $b = y^2-9$ и получим уравнение $|a+b+8|+|a|+|b| = 8$. Так как для любых значений u и v верно неравенство $|u-v| \geqslant |u| - |v|$, то $8 = |a| + |b| + |8+a+b| \geqslant |a| + |b| + 8 - |a+b|$, откуда $0 \geqslant |a| + |b| - |a+b|$, или $|a+b| \geqslant |a| + |b|$, что выполняется только тогда, когда значения a и b имеют одинаковые знаки, т. е.

$$\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0, \\ b < 0. \end{cases} \quad \text{Итак, либо а) } \begin{cases} x^2-4 \geqslant 0, \\ y^2-9 \geqslant 0, \end{cases} \text{ либо б) } \begin{cases} x^2-4 < 0, \\ y^2-9 < 0. \end{cases}$$

В случае а) имеем уравнение $x^2 - 4 + y^2 - 9 + 8 + x^2 - 4 + y^2 - 9 = 8$, или $2x^2 + 2y^2 = 26$, т. е. $x^2 + y^2 = 13$. Целочисленных пар решений этого уравнения всего 8: $(\pm2, \pm3)$ (4 пары) и $(\pm3, \pm2)$ (4 пары), но условиям а) удовлетворяют только 4 пары $(\pm2, \pm3)$.

В случае б) имеем уравнение: $|x^2 + y^2 - 5| + (4 - x^2) + (9 - y^2) = 8$, т. е. $|x^2 + y^2 - 5| = x^2 + y^2 - 5$, равносильное неравенству: $|x^2 + y^2 - 5| \geqslant 0$, или $x^2 + y^2 \geqslant 5$. Условиям б): удовлетворяют целочисленные пары (x, y) при $x \in \{-1, 0, 1\}$, $y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Среди всех пар такого вида условию $x^2 + y^2 \geqslant 5$ удовлетворяют только четыре пары $(\pm 1, \pm 2)$. ■

2.15.1. $(1; -1)$. □ Вычитая из 2-го уравнения 1-е, умноженное на 2, получим уравнение $2x^2(1 - y^2) + y^3 - 2y^2 + 3 = 0$. Разложив на множители выражение $y^3 - 2y^2 + 3$, получим $(y+1) \cdot (y^2 - 3y + 3)$ и запишем уравнение в виде $(y+1)\big(2x^2(1-y) + y^2 - 3y + 3\big) = 0$. Отсюда $y = -1$ (и тогда из 1-го уравнения получим уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$, т. е. $x = 1$) или $2x^2(1-y) + y^2 - 3y + 3 = 0$. Если $y \leqslant 1$, то $2x^2(1-y) \geqslant 0$ и, так как $y^2 - 3y + 3 > 0$ при всех значениях y, то решений нет. Найдем дискриминант в 1-м уравнении, если его рассматривать как квадратное относительно переменной x: $\dfrac{D(y)}{4} = 1 - y^2 \cdot y^2 = 1 - y^4$. Это выражение неотрицательно при $y \in (-1; 1)$, т. е. $y < 1$, и у системы решений больше нет. ■

2.15.2. $(1; 0; 0)$. □ Запишем 3-е уравнение системы в виде: $z^2 + y^2 - 6y + 9 = 9$, или $z^2 + (y-3)^2 = 9$, откуда $z^2 \leqslant 9$, т. е. $0 \leqslant z \leqslant 3$. Записав 1-е уравнение как квадратное относительно переменной x, найдем его дискриминант: $3x^2 - 2(z+3)x + (3z+3) = 0$; $\dfrac{D}{4} = z(z-3)$ — неотрицателен при $z \leqslant 0$ или $z \geqslant 3$. Отсюда $z = 0$ или $z = 3$. Если $z = 0$, то из 1-го уравнения получим уравнение $3x^2 - 6x + 3 = 0$, откуда $x = 1$. Подставляя это значение во 2-е уравнение, получим уравнение $y^3 + 3y^2 = 0$, откуда $y = 0$ или $y = -3$. Из 3-го уравнения при $z = 0$ получим $y = 0$ или $y = 6$, значит, $y = 0$. Если $z = 3$, то из 3-го уравнения $y = 3$, а из 1-го уравнения получим $3x^2 - 12x + 12 = 0$, откуда $x = 2$, тогда во 2-м уравнении $3^3 + 3 \cdot 3^2 = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2$, что неверно. ■

2.15.3. $(4; 5)$. □ Из 2-го уравнения получим уравнение $x + y - 9 = (y-5)^2$, откуда $\sqrt{x+y-9} = \sqrt{(y-5)^2} = |y-5|$. Умножив обе части 1-го уравнения на $\sqrt{y} - x + 4$, получим систему

$$\begin{cases} y - (x-4)^2 = \sqrt{x+y} + |y-5| + 2, \\ 9 + (y-5)^2 = x + y. \end{cases}$$

Если $y \geqslant 5$, то 1-е уравнение примет вид: $-(x-4)^2 = \sqrt{x+y} - 3$. Так как $x + y \geqslant 9$ (из 2-го уравнения), то получим неравенства

$$0 \geqslant -(x-4)^2 = \sqrt{x+y} - 3 \geqslant 0, \text{ откуда } x = 4 \quad \text{и} \quad x + y = 9, \text{ т. е. } y = 5.$$

Если $y < 5$, то 1-е уравнение примет вид $2y = \sqrt{x+y} + (x-4)^2 + 7$, т. е. $y = 3{,}5 + \dfrac{\sqrt{x+y}}{2} + (x-4)^2$, откуда

$$y \geqslant 3{,}5 + \frac{\sqrt{x+y}}{2} = 3{,}5 + \frac{\sqrt{9 + (y-5)^2}}{2} \geqslant 3{,}5 + \frac{3}{2} = 5,$$

что невозможно. ■

2.15.4. Нет решений. □ Умножив обе части 1-го уравнения на $y + 2x - 6$ и преобразовав 2-е уравнение, получим систему

$$\begin{cases} y - (2x-6)^2 = \sqrt{x-y-1} + 4\sqrt{x-y} \\ y + (x-3)^2 = 5 + \sqrt{x-y-1} - \sqrt{x-y}. \end{cases}$$

Вычитая 2-е уравнение из 1-го, получим уравнение $-5(x-3)^2 = 5\sqrt{x-y} - 5$, т. е. $1-(x-3)^2 = \sqrt{x-y}$. Так как $x - y \geqslant 1$ (из ОДЗ), то и $\sqrt{x-y} \geqslant 1$, откуда $1-(x-3)^2 \leqslant 1$, значит, равенство $1-(x-3)^2 = \sqrt{x-y}$ верно лишь при $x = 3$ и $x - y = 1$, т. е. $y = 2$. Однако решение $(3; 2)$ не удовлетворяет 2-му уравнению системы. ■

2.15.5. $(4; 4; -3)$. □ Так как $(x-y)^2 \geqslant 0$, то из 1-го уравнения получим неравенство $z+4 = \dfrac{1}{1+(x-y)^2} \leqslant 1$, откуда $z \leqslant -3$, но из 2-го уравнения $z - 3 \geqslant 0$, значит, $z = -3$. Отсюда $2x = 8$, т. е. $x = 4$, и из 1-го уравнения $\dfrac{1}{1+(4-y)^2} = 1$, откуда $y = 4$. ■

2.15.6. $(1; 1; -1)$, $(-1; 1; 1)$. ● Из 1-го уравнения $y \geqslant 1$, значит, $1 + \sqrt{y-1} = \dfrac{1}{y^2} - (x+z)^2 \leqslant 1$, т. е. $y = 1$. **2.15.7.** $(1; -10; -5)$. ● $x - 1 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 1$, и $2 - x - x^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x \in [-2; 1] \Longrightarrow x = 1$.

2.15.8. $(a+1;\ a;\ a-1)$, $(-(a+1);\ -a;\ -(a-1))$, $a \neq 0$, ± 1. □ Сложив все три уравнения, получим уравнение

$$2uv + 2vw + 2wu = 6a^2 - 2, \text{ т. е. } uv + vw + wu = 3a^2 - 1.$$

Вычитая из этого уравнения по очереди 1-е, 2-е и 3-е уравнения системы, получим систему

$$(*) \qquad \begin{cases} wu = a^2 - 1, \\ uv = a^2 + a, \\ vw = a^2 - a. \end{cases}$$

Перемножив все три уравнения, получим уравнение $u^2v^2w^2 = a^2(a-1)^2(a+1)^2$, откуда $uvw = a(a-1)(a+1)$ или $uvw = -a(a-1)(a+1)$. Разделим уравнение $uvw = a(a-1)(a+1)$ на каждое из уравнений системы $(*)$, получим решение $\{v = a;\ w = a - 1;\ u = a + 1\}$. Аналогично, решение $\{-(a+1);\ -a;\ -(a-1)\}$ получим, разделив на каждое из уравнений системы $(*)$ уравнение $uvw = -a(a-1)(a+1)$. ■

2.15.9. $a \in \left[-\frac{1}{15}; 8\right)$. ● Условие равносильно следующему: при каких значениях параметра a 1-е уравнение системы как квадратное относительно переменной y имеет корень, не превосходящий 2.

2.15.10. $1;\ -\frac{1}{2};\ \dfrac{-7+4\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{-1-4\sqrt{2}}{2}$. □ Выразим из 2-го уравнения x и подставим его в 1-е уравнение:

$$x = \frac{-2y-1}{y+1}; \quad a\left(\frac{-2y-1}{y+1}\right)y + \frac{-2y-1}{y+1} - y + \frac{3}{2} = 0,$$

откуда получим уравнение $(*)$: $2y^2(2a+1) + (2a+3)y - 1 = 0$ (при $y \neq -1$). При $a = -\frac{1}{2}$ получим уравнение $2y - 1 = 0$, $y = \frac{1}{2}$ $\left(x = -\frac{4}{3}\right)$. При $a \neq -\frac{1}{2}$ найдем дискриминант $\dfrac{D}{4} = 4a^2 + 28a + 17$, равный нулю при $a = \dfrac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$, тогда у квадратного уравнения $(*)$ будет единственный корень (и не равный -1). Два корня, один из которых равен -1, будут у уравнения $(*)$ при $a = 1$. ■

2.15.11. $(c; c)$, $c \in \mathbb{R}$ при $a = 0$; $\left\{\left(\frac{3a}{2}; \frac{9a}{2}\right), \left(\frac{3a}{4}; -\frac{9a}{4}\right), (0; 0)\right\}$ при $a \neq 0$.

□ Переписав систему в виде: $\begin{cases} x^2 - xy = -ay, \\ y^2 - xy = 9ax, \end{cases}$ и разделив 1-е уравнение на

2-е, получим уравнение $\dfrac{x(x-y)}{y(y-x)} = -\dfrac{y}{9x}$, т. е. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{9x}$, откуда $y = \pm 3x$ (при $a \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $y \neq x$). Если $a = 0$, то получим систему $\begin{cases} x(x-y) = 0, \\ y(x-y) = 0, \end{cases}$ решением которой является любая пара чисел $(c; c)$, $c \in \mathbb{R}$. Если же $a \neq 0$, то, подставляя выражение $y = 3x$ в 1-е уравнение исходной системы, получим уравнение $-2x^2 = -3ax$, откуда $x_1 = 0$ или $x_2 = \dfrac{3}{2}a$ (соответственно $y_1 = 0$ или $y_2 = \dfrac{9}{2}a$). Подставляя в 1-е уравнение исходной системы выражение $y = -3x$, получим уравнение $4x^2 = 3ax$, откуда $x_1 = 0$ или $x_2 = \dfrac{3a}{4}$ (соответственно, $y_1 = 0$ или $y_2 = -\dfrac{9a}{4}$). ■

2.15.12. -2; -1. □ Выразим в системе **I** переменную x из 1-го уравнения и подставим это выражение во 2-е уравнение, получим $y = \dfrac{2(1-a^2)}{2+a}$, т. е. система **I** при $a = -2$ не имеет решений, а при $a \neq -2$ имеет единственное решение $\left(\dfrac{3a^2}{a+2}; \dfrac{2(1-a^2)}{2+a}\right)$. При $a = -2$ в системе **II** 2-е уравнение $2x^2 - 11x + (y^2 + 24) = 0$, как квадратное относительно переменной x, имеет отрицательный дискриминант, т. е. система **II** не имеет решений. Так как в уравнениях системы **II** переменная y входит только в четных степенях, то каждому решению (x_0, y_0) соответствует решение $(x_0, -y_0)$, значит, единственное решение системы **II** должно иметь вид $(x_0, 0)$. В системе **I** при $y = 0$ получим $x = 1$ (при $a = 1$) или $x = 3$ (при $a = -1$). При $a = 1$ в системе **II** 2-е уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$ имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, и система **II** имеет 2 решения; при $a = -1$ это уравнение $x^2 - 6x + 9 = 0$ имеет один корень $x = 3$, и вся система имеет единственное решение. ■

2.15.13. $a \in \left[-2; \dfrac{1}{4}\right]$. □ Подставим $x = y^2 - 2y$ во 2-е уравнение, получим $x + x^2 + a^2 - 2ax = 0$, т. е. $(*)$: $x^2 + (1-2a)x + a^2 = 0$. Найдем дискриминант $D = (1-2a)^2 - 4a^2 = 1 - 4a$. Так как $\min\{x = f(y) = y^2 - 2y\} = f(1) = -1$, то потребуем, чтобы хотя бы один из корней уравнения $(*)$ был не меньше, чем -1. Это условие выполняется, если имеет решение одна из следующих систем:

$$1)\quad \begin{cases} D = 1 - 4a \geqslant 0; \\ x_0 = -\dfrac{1-2a}{2} \geqslant -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad 2)\quad \begin{cases} D = 1 - 4a \geqslant 0; \\ x^2 + (1-2a)x + a^2\Big|_{x=-1} \leqslant 0. \end{cases}$$

Соответствующие случаи изображены на рис. 31.

Решим систему 1):

$$\begin{cases} a \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ 1 - 2a \leqslant 2 \iff a \geqslant -\dfrac{3}{2}, \end{cases} \quad \text{т. е. } a \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right].$$

Решим систему 2):

$$\begin{cases} a \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ (-1)^2 + (1-2a)\cdot(-1) + a^2 \leqslant 0 \iff a^2 + 2a \leqslant 0 \iff a \in [-2; 0]. \end{cases}$$

Итак, $a \in [-2; 0] \cup \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{4}\right] \iff a \in \left[-2; \dfrac{1}{4}\right]$. ■

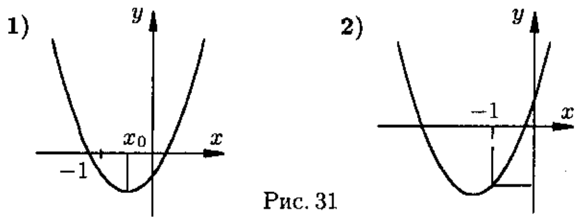


Рис. 31

2.15.14. $(1;\sqrt{2})$. □ Уравнение $x^2+y^2=1$ задает окружность с центром в точке $(0;0)$ и радиусом 1, а уравнение $y+|x|-a=0$ задает множество углов (пар лучей) с вершинами $(0;a)$ — см. рис. 32.

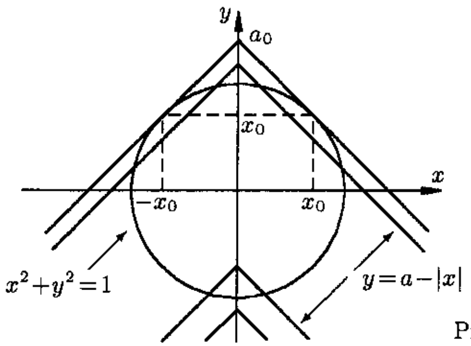


Рис. 32

Очевидно, что эти пары лучей пересекают окружность в четырех точках при $a\in(1;a_0)$. Заметим, что при $a=a_0$ оба луча касаются окружности в точках $(x_0;x_0)$ и $(-x_0;x_0)$:

$$\begin{cases} x_0^2+x_0^2=1, \\ x_0+|x_0|-a_0=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ 2\sqrt{2}-a_0=0 \Longrightarrow a_0=\sqrt{2}. \ \blacksquare \end{cases}$$

2.15.15. $m=-2$; $(6\pm\sqrt{2};-2\pm\sqrt{2})$, $(4\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{2})$. □ Запишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} x^2-8x+8+8m+4m^2-8y+2xy+y^2=0, \\ x^2-12x+40-4m-4m^2+12y-2xy+y^2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2-8(x+y)+(8+8m+4m^2)=0, \\ (x-y)^2-12(x-y)+(40-4m-4m^2)=0. \end{cases}$$

У 1-го уравнения найдем $\dfrac{D}{4}=4(2-2m-m^2)\geqslant 0$ при $m\in[-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3}]=$ $=U$. У второго уравнения $\dfrac{D}{4}=4(m^2+m-1)\geqslant 0$ при $m\in\left(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)=V$. В пересечении $U\cap V$ лежит одно целое число $m=-2$. Подставляя это значение в 1-е уравнение, получим $(x+y)^2-8(x+y)+8=0$, откуда $x+y=4\pm2\sqrt{2}$. Во втором уравнении получим $(x-y)^2-12(x-y)+32=0$, откуда $x-y=6\pm2$. Зная $x+y$ и $x-y$, находим x и y. ■

2.15.16. $-\frac{1}{32}$. ☐ Запишем систему в виде

$$(1)\qquad \begin{cases} \sqrt{7|y|}+\sqrt{|x-1|}=1, \\ \left(\sqrt{7|y|}\right)^4+\left(\sqrt{|x-1|}\right)^4=-4a. \end{cases}$$

Сделав замену $u=\sqrt{7|y|}$, $v=\sqrt{|x-1|}$, *получим систему*

$$(2)\qquad \begin{cases} u+v=1, \\ u^4+v^4=-4a. \end{cases}$$

Каждому решению $(u;v)$ системы (2) соответствует решение $(v;u)$ системы (2) и 4 пары $(x;y)$ решений системы (1) (т. к. $y=\pm\frac{u^2}{7}$, $x=1\pm v^2$), причем для различных пар $(u;v)$ соответствующие им четверки решений $(x;y)$ не имеют общих пар $(x;y)$. Значит, система (1) имеет ровно 4 решения тогда и только тогда, когда система (2) имеет ровно одно решение $(u;u)$, т. е.

$$\begin{cases} 2u=1 \\ 2u^4=-4a, \end{cases} \quad \text{откуда } u=\frac{1}{2}, \quad a=-\frac{1}{32}. \ ■$$

2.15.17. $a\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. ☐ Введя обозначение $t=a^4-4a^3+4a^2-12+\sqrt{105}$, умножим 1-е уравнение на t и вычтем его из 2-го уравнения, умноженного на 8: $(16-t)x^2+(32+2t)xy+(40+3t)y^2$. Разделим обе части уравнения на y^2 и найдем дискриминант получившегося квадратного уравнения:

$$\frac{D}{4}=(16+t)^2-(40+3t)\cdot(16-t)=4(t^2+6t-96)\geqslant 0$$

при $t\in(-\infty;-3-\sqrt{105}]\cup[-3+\sqrt{105};+\infty)$. Решим неравенство

$$a^4-4a^3+4a^2-12+105\geqslant -3+\sqrt{105}, \ \text{ т. е. } \ a^2(a-2)^2\geqslant 3^2,$$

откуда $a(a-2)\geqslant 3$ (и решение $a\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$) или $a(a-2)\leqslant -3$ (и решений нет). У неравенства $a^4-4a^3+4a^2-12+\sqrt{105}\leqslant -3-\sqrt{105}$ решений нет, т. к. оно равносильно неравенству $a^2(a-2)^2\leqslant 9-2\sqrt{105}$ (а $9-2\sqrt{105}<0$). ■

2.15.18. $(1;-2)$, $(-1;-2)$, $(a;2)$, $a\in\mathbb{R}$. ☐ Записав 1-е уравнение системы в виде $(x+y-1)(x-y+a)=0$, получим $x=y-a$ или $x=1-y$. Подставив выражение $x=1-y$ во 2-е уравнение, получим уравнение $(2-b)(y-1)y=0$. Если $b=2$, то этому уравнению удовлетворяет любое y, а системе — любая пара $(1-y;y)$. Если $b\neq 2$, то $y=0$ (и $x=1$) или $y=1$ (и $x=0$) — решения системы. Подставив во 2-е уравнение системы выражение $x=y-a$, получим уравнение $y^2(b+2)-a(b+2)y+(a^2-1)=0$ с дискриминантом $D=(b+2)\left(a^2(b-2)+4\right)$. При $b=-2$ получим уравнение $a^2-1=0$, $a=\pm1$, не содержащее y, т. е. при $b=-2$ и $a=\pm1$ решением 2-го уравнения будет любое y, а решение системы — любая пара $(y-a,y)$. При $b\neq-2$ получим квадратное уравнение, которое имеет не более 2-х корней y_1 и y_2 (при фиксированных a и b), которым соответствуют 2 решения системы $(y_1-a;y_1)$ и $(y_2-a;y_2)$. Итак, при всех парах значений $(a;b)$, кроме $(1;-2)$, $(-1;-2)$ и $(a;2)$ система имеет не более 4-х решений (x,y). ■

2.15.19. $-\frac{17}{48}$. ☐ Выражая из 1-го уравнения $z=x^2-x+4y^2-y$, подставим это выражение во 2-е уравнение: $x+2y+3(x^2-x+4y^2-y)=a$, откуда

$3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+12\left(y+\frac{1}{24}\right)^2=a+\frac{17}{48}$. Это уравнение, а вместе с ним и вся система, имеет единственное решение только при $a=-\frac{17}{48}$. ■

2.15.20. $0;\ \pm\frac{1}{(2\sqrt{3})}$. □ Записав систему в виде

$$(*)\qquad \begin{cases} a(x+2)^2+3a-(y-1)=0,\\ a(y-1)^2+3a-(x+2)=0, \end{cases}$$

сделаем замену $u=x+2$, $v=y-1$ и получим систему

$$(**)\qquad \begin{cases} au^2-v+3a=0,\\ av^2-u+3a=0. \end{cases}$$

Вычитая 2-е уравнение из 1-го, получим уравнение $a(u^2-v^2)+(u-v)=0$, откуда $(u-v)\big(1+a(u-v)\big)=0$, т. е. (1): $a(u+v)=-1$ или (2): $u=v$. Если $a=0$, то уравнение (1) не имеет решения, а система $(*)$ имеет единственное решение $(-2;1)$. Если же $a\neq 0$, то из уравнения (1) получим $v=-\frac{1}{a}-u$ и, подставляя это выражение в 1-е уравнение системы $(**)$, получим уравнение $au^2+u+\left(3a+\frac{1}{a}\right)=0$ с дискриминантом $D=-12a^2-3<0$ при всех a. Из уравнения (2) $u=v$ и, подставляя это выражение в 1-е уравнение системы $(**)$, получим уравнение $au^2-u+3a=0$. У систем $(**)$ и $(*)$ решение единственно, если $D=1-12a^2=0$ (при $a=\pm\frac{1}{(2\sqrt{3})}$). ■

2.15.21. $0;\ \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. ● Сделать замену $u=x+1$, $v=y-3$. Далее — аналогично номеру 2.15.20.

2.15.22. $a\in\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]$. □ Выразив из 1-го уравнения y, подставим это выражение во 2-е уравнение: $y=bx-az^2$, $(b-6)x+2b(bx-az^2)-4z=4$, т. е.

$$(*)\qquad 2abz^2+4z+\big(4+x(6-b-2b^2)\big)=0.$$

Найдем дискриминант:

$$(**)\qquad \frac{D}{4}=4-2ab\big(4+x(6-b-2b^2)\big)\geqslant 0 \iff 4-8ab\geqslant x\cdot 2ab(6-b-2b^2)$$

Это неравенство, а следовательно, и уравнение $(*)$ и исходная система, имеет решения x при любых значениях a и b, при которых множитель $2ab(6-b-2b^2)$ не равен 0. Если $a=0$, то получим неравенство $4\geqslant 0$, которое имеет решения (любое число x) при любом значении b. При $b=0$ получаем то же самое неравенство $4\geqslant 0$, которое имеет решения (любое число x). Решая уравнение $6-b-2b^2=0$, получим $b_1=-2$, $b_2=\frac{3}{2}$. При $b=-2$ получим неравенство $4-8a\cdot(-2)\geqslant 0$, т. е. $a\geqslant -\frac{1}{4}$. При $b=\frac{3}{2}$ получим неравенство $4-8a\cdot\frac{3}{2}\geqslant 0$, т. е. $a\leqslant\frac{1}{3}$. Если $a>\frac{1}{3}$, то при $b=\frac{3}{2}$ получим неравенство $(**)$: $4-12a\geqslant$ $\geqslant 0$, не выполняющееся ни при каком значении x. Если $a<-\frac{1}{4}$, то при $b=$ $=-2$ получим неравенство $(**)$: $4+16a>0$, не выполняющееся ни при каком значении x. ■

3. Преобразование тригонометрических выражений

3.1.1. ● Воспользоваться тригонометрическим кругом и теоремой Пифагора (см. рис. 1).

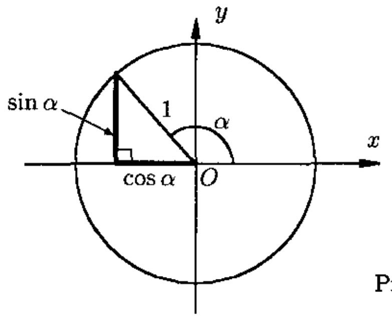


Рис. 1

3.1.2. □ $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{ctg}2\alpha$, что и требовалось доказать. ■

3.1.3. ● Учесть, что $1 + \sin\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$. **3.1.5.** ● При условии $\operatorname{tg}2\alpha \neq 0$, $\cos 2\alpha \neq -1$ имеем: $\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha} \iff \cos 2\alpha \operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}\alpha(1+\cos 2\alpha)$. **3.1.6.** ● Воспользоваться тождествами $1 + \sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$, $\cos 2\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)\cdot(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

3.1.7. □ $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta = \left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right) - \left(\frac{1}{\sin^2\beta} - 1\right) = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\beta} = \frac{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} = \frac{(1-\cos^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$, что и требовалось доказать. ■

3.1.8. ● Воспользоваться формулами $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta$, $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta - \frac{1}{2}\sin\beta$. **3.1.9.** ● Заменив $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ дробью $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$, воспользоваться формулами понижения степени. **3.1.10.** ● Применить формулы $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$, $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x\cos x$. **3.1.12.** ● Воспользоваться тем, что $1 - 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. **3.1.14.** ● Воспользоваться формулами понижения степени. **3.1.15.** ● Поделить числитель и знаменатель дроби в правой части исходного равенства на $\cos^2\alpha$. **3.1.16.** ● Воспользоваться цепочкой равенств

$$1 - \operatorname{tg}^2\alpha = 1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos^2\alpha}.$$

3.1.17. □ Выделяя полный квадрат в левой части равенства, имеем: $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = (\sin^2\alpha)^2 + (\cos^2\alpha)^2 + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1$, что и требовалось доказать. ■

3.1.19. Применить формулы

$$1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 \quad \text{и} \quad \cos 2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha).$$

3.1.21. □ Применяя формулу суммы кубов, имеем:

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\times$$

$$\times(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=(\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-$$

$$-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha.$$

Отсюда $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$, что и требовалось доказать. ■
3.1.22. ● Воспользоваться формулами приведения.

3.2.1. 3. □ При условии $\sin\alpha\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$ исходное выражение равно

$$1+\frac{1-\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1+\frac{\sin^2\alpha+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1+\frac{2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=3. \ ■$$

3.2.2. 13. ● Раскрыть скобки, воспользоваться основным тригонометрическим тождеством. **3.2.3.** 1. **3.2.4.** 1. **3.2.5.** $\cos^2\alpha$. ● Воспользоваться формулами приведения. **3.2.6.** 0. ● Применить формулу тангенса суммы. **3.2.7.** 4.
3.2.8. $\operatorname{tg}\alpha$. ● Воспользоваться равенством $\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha(1+\cos\alpha)$.
3.2.9. $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **3.2.10.** 4. ● Воспользоваться тождествами

$$1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2 \quad \text{и} \quad \cos 2x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x).$$

3.2.11. $\frac{1}{10}$. ● Воспользоваться формулой суммы косинусов, привести исходное выражение к виду $\frac{\sqrt{3}}{20\cos 6\alpha}$. **3.2.12.** 4. ● Учитывая, что $1-\cos^4 2\alpha=$ $=(1-\cos^2 2\alpha)(1+\cos^2 2\alpha)=\sin^2 2\alpha\cdot(1+\cos^2 2\alpha)$, привести исходное выражение к виду $1+\operatorname{ctg}^2 2\alpha$, после чего подставить $\alpha=\frac{\pi}{6}$. **3.2.13.** 1. ● Преобразовать числитель дроби следующим образом: $(1+\cos 2\alpha)+(\cos\alpha+\cos 3\alpha)=$ $=2\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos 2\alpha=2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)$. В знаменателе воспользоваться формулой понижения степени, после чего привести выражение к виду $2\cos\alpha$. **3.2.14.** 1. **3.2.15.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x$. ● Воспользоваться формулами $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=$ $=\frac{2}{\sin 2x}$ и $1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x=\frac{1}{\cos 2x}$. **3.2.16.** $1-\sin^2 4x$. ● Применить тождества $\cos^4 2x+\sin^4 2x=1-\frac{1}{2}\sin^2 4x$ и $\sin^2 2x\cos^2 2x=\frac{1}{4}\sin^2 4x$. **3.2.17.** 1. **3.2.18.** 0,75. ● Воспользоваться формулами понижения степени и произведения синусов. **3.2.19.** 0. **3.2.20.** $\frac{1}{\sin\alpha}$. ● Преобразовать знаменатель дроби следующим образом: $(\cos\alpha-\cos 3\alpha)+(\sin 3\alpha-\sin\alpha)=2\sin\alpha\sin 2\alpha+2\sin\alpha\cos 2\alpha=$ $=2\sin\alpha(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)$. **3.2.21.** 0. ● Используя формулы приведения и суммы синусов, преобразовать числитель дроби к виду $\sin 2\alpha\cdot(2\cos\alpha+1)$. **3.2.22.** 0. ● Привести дроби к общему знаменателю. **3.2.23.** $\sin x$. ● Воспользоваться формулами приведения и синуса разности. **3.2.24.** -1. ● Воспользоваться формулами приведения. **3.2.25.** 0. ● Преобразовать выражения $\cos(45^\circ-\alpha)$ и $\sin(30^\circ+\alpha)$ по формулам косинуса разности и синуса суммы соответственно.

3.3.1. 0,75. □ Поскольку $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \dfrac{1}{(0{,}8)^2} - 1 = \dfrac{9}{16}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \pm\dfrac{3}{4}$. Учитывая, что $0° < \alpha < 90°$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha > 0$, получим окончательно $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$. ■

3.3.2. 0,75. **3.3.3.** $\frac{12}{13}$. ● Воспользоваться формулой $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. **3.3.4.** $-0{,}6$. ● Учесть, что $\cos(2\alpha - \pi) = -\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$. **3.3.5.** 4.

3.3.6. $-0{,}5$. □ $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \pm\frac{1}{2}$. Так как $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то $\sin\alpha < 0$ и, следовательно, $\sin\alpha = -0{,}5$. ■

3.3.7. 0,25. **3.3.8.** 0,6. **3.3.9.** 0,5. ● Применить формулу для синуса двойного угла. **3.3.10.** 17,5. ● Воспользоваться формулой $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$.

3.3.11. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

3.3.12. 0,5. □ $\sin(-330°) = \sin(30° - 360°) = \sin 30° = 0{,}5$. ■

3.3.13. $\dfrac{2(\sqrt{10}+1)}{9}$. □ С учетом условия $\pi < \alpha,\ \beta < \frac{3\pi}{2}$ имеем:

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. Отсюда $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \dfrac{2(\sqrt{10}+1)}{9}$. ■

3.3.14. 1,5. ● Воспользоваться цепочкой равенств $\sin 735° = \sin(15° + 2\cdot 360°) = \sin 15°$. **3.3.15.** π. **3.3.16.** $\frac{5\pi}{6}$.

3.3.17. 0. □ Применяя формулу тангенса суммы, получим

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = 0. \blacksquare$$

3.3.18. $-50°$. □ Учитывая, что $-90° < \operatorname{arctg}\alpha < 90°$ для любого α и $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ при $x \in (-90°, 90°)$, имеем: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 130°) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(180° - 50°)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-50°)) = -50°$. ■

3.3.19. 11. **3.3.20.** 9. ● Воспользоваться формулой синуса двойного угла. **3.3.21.** -1. **3.3.22.** $\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}$. ● Так как $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$, то $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-a^2}$. Далее воспользоваться формулой $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. **3.3.23.** $-\frac{12}{13}$.

3.3.24. $\frac{12}{5}$. **3.3.25.** -20. **3.3.26.** $-\frac{4}{5}$. ● Воспользоваться формулой $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. **3.3.27.** 0,96. **3.3.28.** $-0{,}78$. **3.3.29.** 2. ● Применить формулу $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$. **3.3.30.** $-0{,}75$. **3.3.31.** $-\dfrac{30\sqrt{3}+26}{11}$. ● Учитывая, что

$$\frac{\sin\alpha - 3\cos\alpha}{0{,}5\sin\alpha} = 2 - \frac{6}{\operatorname{tg}\alpha},$$

найти $\operatorname{tg}\alpha$ из условия $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=2$. **3.3.32.** $\frac{1}{2}$. **3.3.33.** -4. **3.3.34.** 1. **3.3.35.** $-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. **3.3.36.** 0,8. ● По условию $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=3$, т. е. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{3}$. Отсюда $\dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{3}$, или $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Далее воспользоваться формулой $\sin\alpha=$ $=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. **3.3.37.** $-\frac{a+1}{\sqrt{1-a^2}}$. ● Воспользоваться формулой $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

3.3.38. 0,5. ● Представив $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$, воспользоваться формулами понижения степени и формулами приведения. **3.3.39.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}(a+\sqrt{1-a^2})$. ● Применить формулу $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$. **3.3.40.** $2a\sqrt{1-a^2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(2a^2-1-2a\sqrt{1-a^2})$. **3.3.41.** $-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$. **3.3.42.** $-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$. ● Воспользоваться формулой $\sin x=\operatorname{tg}x\cdot\cos x$. **3.3.43.** $-\frac{\sqrt{15}}{7}$. **3.3.44.** $-0{,}96$; 0,28; $-\frac{24}{7}$. **3.3.45.** $-\frac{120}{119}$. **3.3.46.** 0,3. ● Преобразовывая $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, привести исходное выражение к виду $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$. **3.3.47.** 4. **3.3.48.** 6. ● Учесть, что $\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$. **3.3.49.** 2. **3.3.50.** 8. **3.3.51.** 0,25. ● Воспользоваться равенствами

$$8\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=8\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$
$$=8\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=4\cos 2\alpha.$$

3.3.52. $\frac{112}{9}$. **3.3.53.** -1. ● Предварительно упростить: $\operatorname{ctg}115^\circ=-\operatorname{tg}25^\circ$, $\cos^2 155^\circ=\cos^2 25^\circ$, $2\sin^2 70^\circ-1=-\cos 140^\circ=\sin 50^\circ$.
3.3.54. 3. ● $\operatorname{ctg}^2(630^\circ+2x)=\operatorname{ctg}^2(2x+7\cdot 90^\circ)=\operatorname{tg}^2 2x$. Далее воспользоваться формулами $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ и $\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$. **3.3.55.** $-\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}$. **3.3.56.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. ● Воспользоваться тождеством $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$. **3.3.57.** 0,97. **3.3.58.** 0. ● $\sin 3105^\circ=\sin(9\cdot 360^\circ-135^\circ)=\sin(-135^\circ)=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3.3.59. $1-\sqrt{2}$. ● Учесть, что $\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha}=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$. **3.3.60.** 1,7. ● Учитывая, что $\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, привести исходное выражение к виду $1+\cos\alpha$. **3.3.61.** $-1{,}25$. ● Используя формулы для синуса и косинуса двойных углов, привести исходное выражение к виду $\operatorname{tg}\alpha$.

3.3.62. 0,28. ● Воспользоваться тождеством $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$. **3.3.63.** $\frac{5}{4}$.
3.3.64. 8. ● Привести исходное выражение к виду $\operatorname{tg}^2 4x$.
3.3.65. 0,5. □ $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$. Поделив числитель и знаменатель последней дроби на $\cos\alpha\cos\beta$, получим $\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{3}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$. ■

3.3.66. −0,75. **3.3.67.** 12,4. **3.3.68.** −0,8. ● Поскольку $4\sin^2\alpha + 6\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^2\alpha$, то, поделив на $\cos^2\alpha$, получим $4\operatorname{tg}^2\alpha + 6\operatorname{tg}\alpha = 4$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Далее воспользоваться формулой $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. **3.3.69.** −0,75.
● Воспользоваться тождеством $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1+\sin 2\alpha$. **3.3.70.** 1. ● Учесть, что $1+\cos x - 2\sin^2 2x = (1-2\sin^2 2x)+\cos x = \cos 4x + \cos x = 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}$.
3.3.71. 1. □ Приводя к общему знаменателю и используя формулу произведения синусов, имеем:

$$\frac{1-4\sin 10^\circ\sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ} = \frac{1-2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{2\sin 10^\circ} = \frac{\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} = 1. \blacksquare$$

3.3.72. 1. **3.3.73.** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. ● Используя формулы понижения степени, перейти к двойному аргументу. **3.3.74.** $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$. ● $\frac{\operatorname{ctg}15^\circ+1}{2\operatorname{ctg}15^\circ} = \frac{\operatorname{tg}15^\circ+1}{2}$.
Далее воспользоваться формулой $\operatorname{tg}^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}$.
3.3.75. $\sqrt{3}$. □ $\frac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ + (\cos 40^\circ - \cos 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - 2\sin 30^\circ\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}$. Так как $\cos 40^\circ = \sin 50^\circ$, то последняя дробь равна $\frac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ\cos 30^\circ}{\sin 20^\circ} = 2\cos 30^\circ = \sqrt{3}$. ■
3.3.76. −3. ● Принять во внимание, что $\cos\frac{4\pi}{9} = \cos 80^\circ$, $\sin\frac{19\pi}{18} = \sin 190^\circ = \sin 10^\circ$. **3.3.77.** 0,2. **3.3.78.** 3. **3.3.79.** −6. ● Учесть, что $\sin 251^\circ = \sin(270^\circ - 19^\circ) = -\cos 19^\circ$, $\cos 161^\circ = \cos(180^\circ - 19^\circ) = -\cos 19^\circ$.
3.3.80. 2. ● Воспользоваться формулой $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. **3.3.81.** 2.
3.3.82. 0. ● Используя формулы приведения, показать, что $\operatorname{tg}288^\circ = -\operatorname{ctg}18^\circ$, $\sin 148^\circ = \sin 32^\circ$, $\sin 302^\circ = -\sin 58^\circ$, $\sin 122^\circ = \sin 58^\circ$.
3.3.83. 0,5. □ Применяя формулу произведения косинусов, получим:

$$2\cos 20^\circ\cos 40^\circ - \cos 20^\circ = \cos 60^\circ + \cos 20^\circ - \cos 20^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}. \blacksquare$$

3.3.84. а). ● Воспользоваться равенством $\operatorname{tg}\left(\frac{31\pi}{36}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{36}\right)$ и формулой тангенса суммы.

3.4.1. $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$. □ По условию $\beta = \pi - \alpha$, т.е. $\sin\beta = \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ и $\sin(\alpha-\beta) = \sin(2\alpha-\pi) = -\sin 2\alpha = -2\sin\alpha\cos\alpha$. Поэтому исходное равенство приводится к виду $\sqrt{3}\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, откуда, учитывая, что $\sin\alpha \neq 0$, имеем $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поскольку $0 < \alpha < \pi$, то $\alpha = \frac{\pi}{6}$, а, значит, $\beta = \frac{5\pi}{6}$. ■

3.4.2. 1. ● Применяя формулы приведения и приводя дроби в левой части равенства к общему знаменателю, преобразовать ее к виду $\frac{1}{\cos\alpha}$. **3.4.3.** 1. ● Преобразовать левую часть равенства к виду $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. **3.4.4.** 2. **3.4.5.** 8. ● Учесть, что $\cos^4 2x - \sin^4 2x = \cos 4x$. **3.4.6.** ● Учитывая, что $1 - 2\sin^2 55^\circ = \cos 110^\circ$, воспользоваться далее формулой разности косинусов.

3.4.7. □ Искомый график получается из графика функции $y = \cos x$ сжатием его в два раза к оси ординат (см. рис. 2). ■

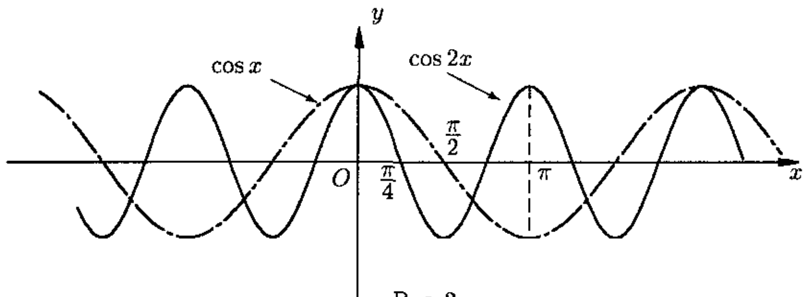


Рис. 2

3.4.8. ● Искомый график получается из графика функции $y = \sin x$ сжатием его в два раза к оси ординат, а затем перемещением вниз на 1. **3.4.9.** ● Поскольку $2^{\log_2 \cos x} = \cos x$ при $\cos x > 0$, то искомый график представляет собой верхнюю (т. е. лежащую над осью абсцисс) часть графика $y = \cos x$.

3.4.10. ● Поскольку $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, то задача сводится к построению графика функции $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Этот последний получается из графика функции $y = \cos x$ сдвигом его влево вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{3}$, а затем растяжением в два раза вдоль оси Oy.

3.4.11. □ Преобразовывая произведение $2\cos\alpha\cos x$ в сумму, получим:

$$\begin{gathered}\cos^2 x + \cos^2(\alpha + x) - 2\cos\alpha\cos x\cdot\cos(\alpha + x) = \\ = \cos^2 x + \cos^2(\alpha + x) - \cos(\alpha + x)\big(\cos(\alpha + x) + \cos(\alpha - x)\big) = \\ = \cos^2 x + \cos(\alpha + x)\big(\cos(\alpha + x) - \cos(\alpha + x) - \cos(\alpha - x)\big) = \\ = \cos^2 x - \cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x).\end{gathered}$$

Применяя к полученному выражению формулы понижения степени и произведения косинусов, имеем $\frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2x) = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$. Полученное выражение действительно не зависит от x, что и требовалось доказать. ■

3.4.12. Да. Период равен π. ● Так как $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, то период функции $y = \sin^2 x$ равен периоду функции $\cos 2x$. **3.4.13.** Нет. ● Учесть, что если функция периодична с периодом T, то вместе с каждым значением x из области ее определения ей должны принадлежать и значения $x + T$ и $x - T$.

Далее рассмотреть значения 0, $0+T$ и $0-T$ для данной функции. **3.4.14.** 1,5. **3.4.15.** б).

3.5.1. □ Используя формулы приведения, преобразуем исходное равенство к виду $\sin 5\alpha \sin 4\alpha + \sin 4\alpha \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin 3\alpha \cos \alpha \sin 5\alpha$. В правой части полученного равенства преобразуем в сумму произведение $2 \sin 3\alpha \cos \alpha$: $\sin 5\alpha \sin 4\alpha + \sin 4\alpha \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (\sin 4\alpha + \sin 2\alpha) \sin 5\alpha$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим $\sin 4\alpha \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha \sin 5\alpha$, или $\sin 4\alpha \sin 3\alpha = \sin 2\alpha(\sin 5\alpha + \sin \alpha)$. Сворачивая сумму в скобках в произведение и учитывая, что $\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha$, получим окончательно тождество $2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \sin 3\alpha \cos 2\alpha$.

Отсюда следует (с учетом равносильности всех преобразований), что исходное равенство также тождество. ■

3.5.2. ● Преобразовывая правую часть равенства, воспользоваться формулой $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, после чего в знаменателе полученной дроби применить формулу произведения косинусов. **3.5.3.** ● Упростить левую часть равенства, учитывая, что $1 - \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$.

3.5.4. ● С помощью формул приведения привести левую часть равенства к виду $\dfrac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}$. Затем использовать формулы для синуса и косинуса двойного угла.

3.5.5. □ Областью допустимых значений функции $\arcsin x$ является множество $[-1; 1]$. Очевидно, для $x \in [-1; 1]$ определены и функции $\cos(\arcsin x)$ и $\sqrt{1-x^2}$. Таким образом, областью допустимых значений для данного равенства является множество $[-1; 1]$. Далее, обозначим $\arcsin x = \alpha$. Так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha \geqslant 0$, откуда, с учетом формулы $\sin(\arcsin x) = x$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$. Окончательно, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leqslant 1$. ■

3.5.6. ● Решение аналогично решению задачи 3.5.5.

3.5.7. □ Областью допустимых значений функции $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ является множество $(-1; 1)$. На этом множестве определена и функция $\arcsin x$, а, значит, и функция $\operatorname{tg}(\arcsin x)$. Поэтому множество $(-1; 1)$ является ОДЗ первого равенства в условии задачи.

Далее, обозначим $\arcsin x = \alpha$. Тогда (см. задачу 3.5.5.) $\sin\alpha = x$, $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Таким образом, $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$, что и требовалось. Аналогично доказывается вторая формула (здесь $|x| \leqslant 1$, $x \neq 0$). ■

3.5.8. ● Обозначив $\arccos x = \alpha$ и учитывая, что $0 \leqslant \frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ (а, значит, $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$) и $\cos\alpha = x$, воспользоваться формулой $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$. ОДЗ — множество $[-1; 1]$. **3.5.9.** ● См. указание к задаче 3.5.8. (ОДЗ — множество $[-1; 1]$).

3.5.10. □ Поскольку областью допустимых значений функции $\operatorname{arcctg} x$ является множество $(-\infty; \infty)$, при этом $0 \leqslant \operatorname{arcctg} x \leqslant \pi$, то ОДЗ левой части равенства совпадает с ОДЗ его правой части, т. е. определяется неравенством $x \neq 0$. Таким образом, $x \neq 0$.

Далее, обозначив $\operatorname{arcctg} x = \alpha$, имеем $\operatorname{ctg}\alpha = x$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \dfrac{1}{x}$. Окончательно $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. Аналогично доказывается вторая формула, справедливая также при $x \neq 0$. ■

3.5.11. □ Обе части равенства определены при всех действительных значениях x. Для доказательства формулы обозначим $\operatorname{arctg} x = \alpha$. Тогда, поскольку $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha \geqslant 0$. Отсюда, учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha = x$, имеем $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Окончательно, $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Аналогично доказывается вторая формула (ОДЗ — множество $(-\infty;\infty)$). ■

3.5.12. ● Обозначив $\operatorname{arctg} x = \alpha$, воспользоваться формулой $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$ и указанием к задаче 3.5.11. **3.5.13.** ● С помощью формулы суммы кубов доказать, что $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$. **3.5.14.** ● Поскольку $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$, то $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, поэтому $\sqrt{1+\cos\alpha} = \sqrt{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = -\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sqrt{1-\cos\alpha} = \sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. **3.5.15.** ● Воспользоваться формулами $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg}2\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$.

3.6.1. $\sin 2\alpha$. □ Обозначим исходное выражение через A. Тогда, используя формулы понижения степени и формулу $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$, получим: $2A = 1-\cos(90^\circ+2\alpha)-1+\cos(60^\circ-2\alpha)-\sin(30^\circ+2\alpha)-\sin(-2\alpha) = \sin 2\alpha+\cos\Big(90^\circ-(30^\circ+2\alpha)\Big)-\sin(30^\circ+2\alpha)+\sin 2\alpha = 2\sin 2\alpha+\sin(30^\circ+2\alpha) - \sin(30^\circ+2\alpha) = 2\sin 2\alpha$. Таким образом, $A = \sin 2\alpha$. ■

3.6.2. 1. ● Преобразовать выражение $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, используя формулу суммы кубов. **3.6.3.** -1. ● Воспользоваться указанием к задаче 3.5.13. **3.6.4.** $\dfrac{1}{\cos^2 x}$. ● Воспользоваться формулами $1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ и $\operatorname{tg}^3 x - \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

3.6.5. 1.

3.7.1. $\frac{120}{119}$. □ Обозначим $\alpha = \arccos\frac{12}{13}$. Тогда $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ и т.к. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1} = \dfrac{5}{12}$. Наконец,

$$\operatorname{tg}\Big(2\arccos\frac{12}{13}\Big) = \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{120}{119}. \blacksquare$$

3.7.2. $\frac{4}{5}$. ● Воспользоваться формулами приведения и условием задачи 3.5.11.

3.7.3. $-\frac{3}{4}$. ● По формулам приведения $\operatorname{tg}\Big(\arcsin\frac{4}{5}+\frac{3\pi}{2}\Big) = -\operatorname{ctg}\Big(\arcsin\frac{4}{5}\Big) = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\Big(\arcsin\dfrac{4}{5}\Big)}$. Далее использовать формулу из условия задачи 3.5.7.

3.7.4. $\frac{14}{15}$. ● Преобразовав $\sin\left(2\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{3}\Big)\right)$ по формуле синуса двойного угла, применить далее формулы из условий задач 3.5.11 и 3.5.12. **3.7.5.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ● Условие $\cos 2\alpha = \sin\alpha$ с учетом формулы $1-2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ приводится к квадратному уравнению $2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1 = 0$, откуда $\sin\alpha = -1$ или

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Далее учесть ограничение $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. **3.7.6.** $-4|a|\cdot(2a^2-1)\cdot\sqrt{1-a^2}$. ● $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2a^2 - 1$. Далее воспользоваться формулами $\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$ (по условию $\sin x < 0$) и $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. **3.7.7.** 0,316. ● Упростить исходное выражение с помощью формулы разности кубов. **3.7.8.** 0,875. ● Воспользоваться формулами $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ и $\sin^2 2\alpha = \left[(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1\right]^2$. **3.7.9.** 0,8. ● Приводя дроби к общему знаменателю, привести равенство к виду $\frac{8 - 2\sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = 8$. **3.7.10.** $\frac{a(a^2-3)}{a^2-1}$. ● Возводя обе части равенства $\sin\alpha - \cos\alpha = a$ в квадрат, найти $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1-a^2}{2}$. Далее, преобразовывая исходное выражение, привести его к виду $\frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)(1 + \sin\alpha\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

3.7.11. 4. □ Обозначив исходное выражение через A и применяя формулы приведения, получим: $A = \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ = (\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ) - (\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 27^\circ)$. Далее воспользуемся формулой $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$, откуда $A = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ}$. С помощью формулы разности синусов получим окончательно: $A = \frac{4\sin 18^\circ\cos 36^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ} = \frac{4\cos 36^\circ}{\sin 54^\circ} = 4$. ■

3.7.12. $\frac{1}{8}$. □ Обозначив исходное выражение через A и неоднократно преобразовывая произведение в сумму, имеем: $4A = 2\sin 70^\circ(2\sin 50^\circ\sin 10^\circ) = 2\sin 70^\circ(\cos 40^\circ - \cos 60^\circ) = 2\sin 70^\circ\left(\cos 40^\circ - \frac{1}{2}\right) = 2\sin 70^\circ\cos 40^\circ - \sin 70^\circ = \sin 110^\circ + \sin 30^\circ - \sin 70^\circ = \sin(180^\circ - 70^\circ) + \frac{1}{2} - \sin 70^\circ = \sin 70^\circ + \frac{1}{2} - \sin 70^\circ = \frac{1}{2}$. Отсюда $A = \frac{1}{8}$. ■

3.7.13. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. ● См. указание к задаче 3.7.12. **3.7.14.** 1. **3.7.15.** $\frac{3}{4}$. ● Учитывая, что $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, применить формулы для преобразования в сумму $\sin\alpha\sin\beta$ и $\sin\alpha\cos\beta$. **3.7.16.** 4,5. ● См. указание к задаче 3.7.15. **3.7.17.** $\sqrt{3}$. ● Преобразовав по формулам приведения исходное выражение к виду $\frac{\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ}{\sin 70^\circ\sin 50^\circ\sin 10^\circ}$, воспользоваться задачами 3.7.12 и 3.7.15. **3.7.18.** 26. ● Решая данное квадратное уравнение и учитывая, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, получим $\operatorname{ctg}\alpha = 5$. Далее найти $\sin^2\alpha$ и $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$. **3.7.19.** 1. ● Преобразовать подкоренное выражение к виду $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **3.7.20.** $\frac{1-a^2}{2a}$, $\frac{4a}{a^2-3}$. ● Раскрывая тангенс разности в условии $2\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha$ и учитывая, что $\operatorname{tg}\beta = a$, получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\alpha$, решая которое получим два ответа. Далее воспользоваться формулой $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$. **3.7.21.** $\frac{b^2-1}{2b}$, $\frac{4+2b}{1-b^2-4b}$.

3.7.22. 24. ● Преобразовать знаменатель следующим образом в произведение:

$$(\sin 20^\circ + \sin 50^\circ) + \sin(180^\circ - 70^\circ) = 2\sin 35^\circ\cos 15^\circ + \sin 70^\circ = 2\sin 35^\circ\cos 15^\circ +$$

$+2\sin 35^\circ \cos 35^\circ = 2\sin 35^\circ(\cos 15^\circ + \cos 35^\circ) = 4\sin 35^\circ \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 10^\circ.$

3.7.23. $-0{,}5$. ● Воспользоваться цепочкой равенств $\cos 68^\circ - \sqrt{3}\sin 68^\circ = 2\cos(68^\circ + 60^\circ) = 2\cos 128^\circ = -2\cos 52^\circ$. **3.7.24.** 1,5. ● Воспользоваться формулой из условия задачи 3.5.6. **3.7.25.** 0,36. ● Обозначить $\alpha = \operatorname{arctg}(-2)$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Далее воспользоваться формулами $\cos^2 2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}$ и $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

3.8.1. ● При $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ значения функции равны $+1$ или -1 в зависимости от знака $\sin x$ (см. рис. 3).

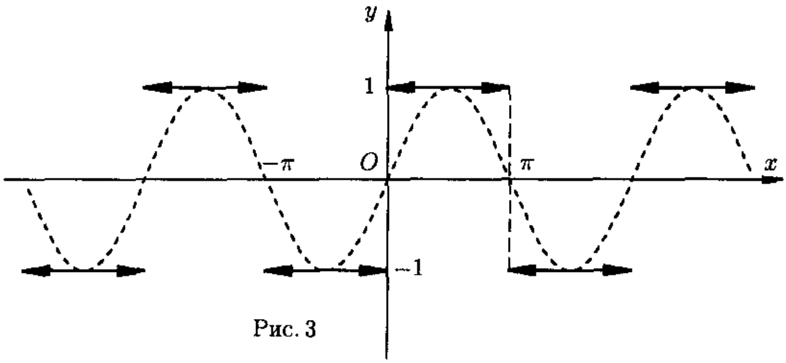


Рис. 3

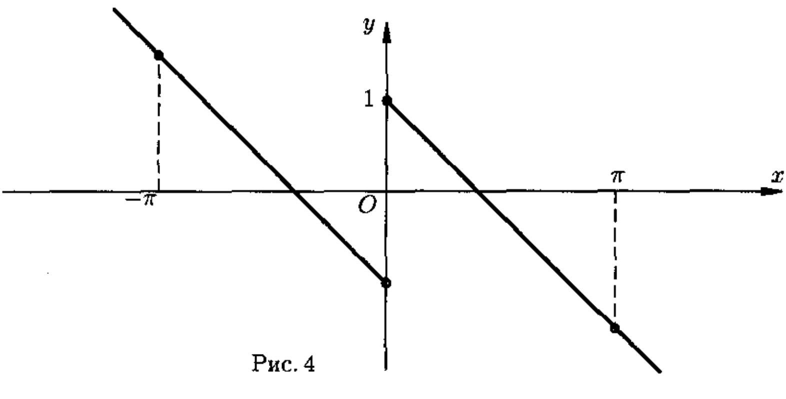


Рис. 4

3.8.2. □ ОДЗ функции определяется неравенством $x \neq \pi n$. При $x > 0$: $|x| = x$, поэтому $y = 1 - x$, а при $x < 0$: $|x| = -x$, $\sin(-x) = -\sin x$, т. е. $y = -1 - x$. Таким образом, искомый график имеет вид, изображенный на рис. 4. ■

3.8.3. ● Искомый график представляет собой параболу $y = x^2$ без точек с абсциссами $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.8.4.** ● ОДЗ функции определяется неравенством $\sin x - 0{,}5 \neq 0$, т. е. $x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$. В остальных точках $y = \dfrac{\sin x - 0{,}5}{\sin x - 0{,}5} = 1$. Таким образом, график функции — прямая $y = 1$, из которой выколоты точки с абсциссами $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

3.8.5. □ Так как функция $\sin x$ периодическая с периодом 2π, то функция

$\arcsin(\sin x)$ также периодическая с периодом 2π. Поэтому достаточно понять, как ведет себя функция на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ длиной 2π. Но на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ по определению арксинуса $\arcsin(\sin x) = x$, а при $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ выполнено неравенство $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и т. к. $\sin(\pi - x) = \sin x$, то $\arcsin(\sin x) = \pi - x$. Теперь можно строить искомый график (см. рис. 5). ■

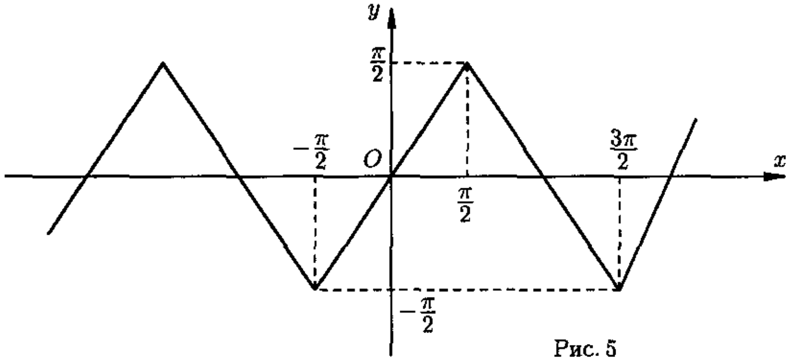


Рис. 5

3.8.6. ● ОДЗ функции определяется неравенством $\cos x < 0$. Далее, сначала построить график функции $y = -\cos x$ (на рисунке он изображен пунктиром), а затем, учитывая поведение функции $y = \lg x$ на промежутке $(0; 1]$, а также периодичность косинуса, построить искомый график (см. рис. 6).

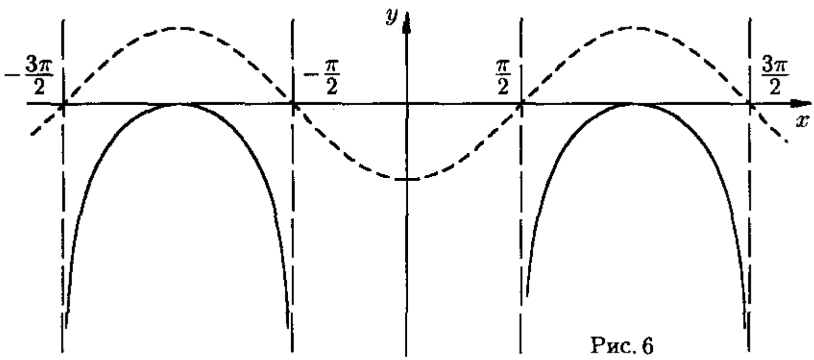


Рис. 6

3.8.7. $x_1 = 0$, $x_{2,3} \approx \pm 2{,}4$.

3.9.1. -313. □ Так как $\pi = 3{,}1415\ldots$, то $100\pi = 314{,}15\ldots > 313 > 100\pi - \pi = 99\pi$. Поэтому $313 \in (99\pi; 100\pi)$. Поскольку на интервале $(99\pi; 100\pi)$ функция $\sin x$ отрицательна, то значение $x = 313$ не подходит.

С другой стороны, $\sin(-313) = -\sin 313 > 0$, поэтому значение $x = -313$ подходит. ■

3.9.2. ● Корнями уравнения $4x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$ являются числа $x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{4}$. Далее показать, что $\sin 75^\circ$ совпадает с одним из них, учиты-

вая, что $\sin^2 75^\circ = \frac{1-\cos 150^\circ}{2} = \frac{1-\cos(180^\circ-30^\circ)}{2} = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.
3.9.3. Функция $f(x)$ нечетная. ● $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, поэтому

$$f(-x) = \lg\left(\sqrt{9\operatorname{tg}^2(-x)+1} - 3\operatorname{tg}(-x)\right) = \lg\left(\sqrt{9\operatorname{tg}^2 x+1} + 3\operatorname{tg} x\right).$$

Далее показать, что $\sqrt{9\operatorname{tg}^2 x+1} + 3\operatorname{tg} x = \left(\sqrt{9\operatorname{tg}^2 x+1} - 3\operatorname{tg} x\right)^{-1}$. **3.9.4.** πn, $n \in \mathbb{Z}$. ● Воспользоваться формулой $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. **3.9.5.** ● Заменяя с помощью формул приведения $\cos\frac{5\pi}{7}$ на $\left(-\cos\frac{2\pi}{7}\right)$ и домножая обе части исходного равенства на $-8\sin\frac{\pi}{7}$, перепишем его в виде

$$8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}.$$

Далее воспользоваться формулой для синуса двойного угла.
3.9.6. $\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)$. □ Обозначим исходное выражение через A. Тогда, учитывая, что $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, имеем: $2A = 2\sin\frac{5}{2}\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \sin 3\alpha - \frac{1}{2}$. Преобразовывая произведение в сумму, получим: $2A = (\sin 3\alpha + \sin 2\alpha) - \sin 3\alpha - \frac{1}{2} = \sin 2\alpha - \frac{1}{2} = \sin 2\alpha - \sin 30^\circ$. Воспользовавшись формулой разности синусов, получим окончательно $2A = 2\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)$, откуда $A = \sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)$. ■
3.9.7. $\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. ● Воспользоваться равенствами $\sec 60^\circ\cos 2\alpha\sin 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha\cos 2\alpha}{\cos 60^\circ} = 2\sin 3\alpha\cos 2\alpha = \sin 5\alpha + \sin\alpha$ и $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha + \cos\alpha$. **3.9.8.** Да, обязательно определено и равно (-2). ● По условию $\sin 2x = 2\sin x\cos x > 0$, поэтому $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ определен и также больше нуля. Отсюда следует, что $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}\operatorname{tg} x = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\operatorname{tg} x$ также определен. Далее, используя формулу для тангенса двойного угла, получить $\operatorname{tg} x = 3$.

3.10.1. 1. □ Возводя обе части данного в условии равенства в квадрат, получим $1 + 2\sin\left(\delta+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\delta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}$ или $\sin\left(2\delta+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5}$. Отсюда $\cos 2\delta = -\frac{1}{5}$. Далее, $\log_{\frac{14}{25}}|\cos\delta| + \log_{\frac{14}{25}}|\cos 3\delta| = \log_{\frac{14}{25}}|\cos\delta\cos 3\delta|$, при этом $\cos 3\delta\cos\delta = \frac{1}{2}(\cos 4\delta + \cos 2\delta) = \frac{1}{2}(2\cos^2 2\delta - 1 + \cos 2\delta)$. Подставляя $\cos 2\delta = -\frac{1}{5}$, найдем $\cos 3\delta\cos\delta = \frac{1}{2}\left(2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 1 + \left(-\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{25} - 1 - \frac{1}{5}\right) = -\frac{14}{25}$, откуда окончательно $\log_{\frac{14}{25}}|\cos 3\delta\cos\delta| = \log_{\frac{14}{25}}\left|-\frac{14}{25}\right| = \log_{\frac{14}{25}}\frac{14}{25} = 1$. ■
3.10.2. $-5{,}3$. ● Обозначив $\alpha = \arccos(\sin 5{,}3)$, имеем
$\sin\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha - 2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha = -\cos(\arccos(\sin 5{,}3)) = -\sin 5{,}3 = \sin(-5{,}3)$. Далее показать, что значения $\alpha - \frac{5\pi}{2}$ и $-5{,}3$ принадлежат отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$, на котором функция $y = \sin x$ монотонна. Отсюда $\alpha - \frac{5\pi}{2} = \arccos(\sin 5{,}3) - \frac{5\pi}{2} = -5{,}3$.

3.10.3. $-0{,}5$. ☐ Возводя обе части данного в условии равенства в квадрат, получим $1 + 2\sin x\cos x = a^2$, откуда $\sin x\cos x = \dfrac{a^2-1}{2}$. Применяя теперь формулу суммы кубов к исходному выражению, имеем

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{(a^2-3)a} =$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x)}{(a^2-3)a} = \frac{a\cdot\left(1 - \dfrac{a^2-1}{2}\right)}{(a^2-3)a} = \frac{3-a^2}{2(a^2-3)} = -\frac{1}{2}. \ ■$$

3.10.4. 0,5. ● Учитывая формулу $\left(\sin\frac{\alpha}{2} \pm \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 \pm \sin\alpha$, преобразовать числитель к виду $\left|\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right| - \left|\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right|$. Далее воспользоваться неравенством $\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} < 0$ при $0 < \frac{\alpha}{2} < 45°$.

3.10.5. 0. ☐ Обозначив исходное выражение через A, преобразуем его: $A = \sin 4\alpha(\sin 5\alpha + \sin 3\alpha) - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha - 2\sin 3\alpha\sin 5\alpha\cos\alpha$. Воспользовавшись формулой суммы синусов и вынося за скобки $\cos\alpha$, получим

$$A = 2\sin 4\alpha\sin 4\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha - 2\sin 5\alpha\sin 3\alpha\cos\alpha =$$
$$= \cos\alpha(2\sin^2 4\alpha - 2\sin^2\alpha - 2\sin 5\alpha\sin 3\alpha).$$

Применяя формулы понижения степени и произведения синусов, придем к окончательному ответу:

$$A = \cos\alpha\Big(1 - \cos 8\alpha - (1 - \cos 2\alpha) - (\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)\Big) = 0. \ ■$$

3.10.6. 1. ☐ Неоднократно применяя формулы преобразования произведения в сумму, получим:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\frac{\cos 2\alpha - \cos\dfrac{2\pi}{3}}{\cos 2\alpha + \dfrac{1}{2}} = \operatorname{tg}\alpha\frac{2\cos 2\alpha + 1}{2\cos 2\alpha - 1} = \frac{2\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin\alpha}{2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha} =$$

$$= \frac{-\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha - \cos\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha.$$

Отсюда исходное выражение равно $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha + 1 = 1$. ■

3.10.7. 1. ● Умножим $\sin 18°$ на $\dfrac{2\cos 18°}{2\cos 18°}$; тогда

$$\sin 18° = \frac{2\sin 18°\cos 18°}{2\cos 18°} = \frac{\sin 36°}{2\cos 18°} = \frac{\cos 54°}{2\cos 18°}.$$

Домножая последнюю дробь на $\dfrac{2\sin 54°}{2\sin 54°}$ и преобразовывая произведение в знаменателе в сумму, получим:

$$\sin 18° = \frac{2\sin 54°\cos 54°}{2\cdot(2\sin 54°\cos 18°)} = \frac{\sin 108°}{2(\sin 72° + \sin 36°)} =$$

$$= \frac{\sin(90^\circ + 18^\circ)}{2\big(\sin(90^\circ - 18^\circ) + 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ\big)} = \frac{\cos 18^\circ}{2(\cos 18^\circ + 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ)} = \frac{1}{4\sin 18^\circ + 2}.$$

Таким образом, $\sin 18^\circ = \dfrac{1}{4\sin 18^\circ + 2}$, откуда $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3.10.8. 1. ● Перейдя к тангенсу половинного угла в условии $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}4$, получим уравнение $\dfrac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)} + \dfrac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)} = \dfrac{7}{5}$, откуда $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$ или $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$. Учитывая, что $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{tg}\Big(2\cdot\dfrac{\pi}{8}\Big) = \dfrac{2\operatorname{tg}(\pi/8)}{1-\operatorname{tg}^2(\pi/8)} = 1$, показать далее, что если $0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{8}$, то $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{1}{2}$. **3.10.9.** 1. ● Обозначив $\alpha = \operatorname{arctg}\Big(-\dfrac{4}{3}\Big)$, воспользоваться формулами $\sin^2\Big(\dfrac{\alpha}{2}\Big) = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ и $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (см. задачу 3.5.11).

3.10.10. $x + y = 2xy$. □ Преобразовывая $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi$, перепишем систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} x\sin^2\alpha + y\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha, \\ x\cos^2\varphi + y\sin^2\varphi = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi, \\ x\operatorname{tg}\alpha = y\operatorname{tg}\varphi, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} (x-1)\sin^2\alpha = (1-y)\cos^2\alpha, \\ (x-1)\cos^2\varphi = (1-y)\sin^2\varphi, \\ x\operatorname{tg}\alpha = y\operatorname{tg}\varphi. \end{cases}$$

Поделив обе части первого уравнения на $\cos^2\alpha$, найдем $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1-y}{x-1}$. Аналогично, из второго уравнения $\operatorname{tg}^2\varphi = \dfrac{x-1}{1-y}$. С другой стороны, возводя обе части третьего уравнения в квадрат, получим $x^2\operatorname{tg}^2\alpha = y^2\operatorname{tg}^2\varphi$. Подставляя в это уравнение найденные значения $\operatorname{tg}^2\alpha$ и $\operatorname{tg}^2\varphi$, имеем: $\dfrac{x^2(1-y)}{x-1} = \dfrac{y^2(x-1)}{1-y}$, откуда $\big(x(1-y)\big)^2 = \big(y(x-1)\big)^2$. Отсюда $x(1-y) = \pm y(x-1)$, т. е.

$x(1-y) = y(x-1)$	$x(1-y) = -y(x-1)$
$x - xy = xy - y$	$x - xy = -xy + y$
$x + y = 2xy$	$x = y$. Полученное соотношение не подходит, т. к. по условию $x \neq y$.

Таким образом, $x + y = 2xy$. ■

4. Тригонометрические уравнения

4.1.1. Нет решений. □ Обозначим $y = 35^\circ + x$. Тогда $\sin y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $y = (-1)^n 45^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}$[1]. Так как по условию $-80^\circ < x < 0^\circ$, то

$$-80^\circ < -35^\circ + (-1)^n 45^\circ + 180^\circ n < 0^\circ,$$
$$-45^\circ < (-1)^n 45^\circ + 180^\circ n < 35^\circ,$$
$$-1 < (-1)^n + 4n < \frac{7}{9}.$$

[1] Везде далее, кроме случаев, которые будут особо оговариваться, мы будем опускать подобные пояснения относительно возможных значений k, l, m и n, предполагая, что они принимают лишь целые значения.

Поэтому $\dfrac{-1-(-1)^n}{4} < n < \dfrac{7/9-(-1)^n}{4}$. Отсюда при четных n: $-\frac{1}{2} < n <$ $< -\dfrac{1}{18}$, а при нечетных: $0 < n < \dfrac{4}{9}$.

В обоих случаях нет целых решений неравенств, а, значит, исходное уравнение также не имеет решений. ■

4.1.2. 10. **4.1.3.** $x = -\dfrac{\pi}{36} + \dfrac{\pi n}{3}$. **4.1.4.** $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$. ● Воспользовавшись равенством $\sin^2 7x + \cos^2 7x = 1$, привести уравнение к виду $\operatorname{tg} 2x = 1$.

4.1.5. 30. □ Исходное уравнение эквивалентно следующему: $\sin 2x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Так как $\sin x = \pm a$, где $0 < a < 1$, $\iff x = \pm \arcsin a + \pi n$, то в нашем случае $2x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, т. е. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$. С учетом ограничения $0 < x < \frac{\pi}{4}$ имеем $0 < \pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2} < \frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{1}{6} < \frac{n}{2} < \frac{1}{4}\pm\frac{1}{6}$, откуда $\pm\frac{1}{3} < n < \frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}$. Поскольку $n \in \mathbb{Z}$, то $n = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{6}$. Переводя в градусы, получим окончательно $x = 30°$. ■

4.1.6. $x = \dfrac{\pi}{15} \pm \dfrac{\pi}{30} + \dfrac{\pi n}{5}$. **4.1.7.** $x = \dfrac{\pi n}{3}$. ● Воспользоваться формулой понижения степени $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) - 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$. **4.1.8.** $1\frac{23}{24}$, $2\frac{7}{24}$, $2\frac{23}{24}$. ● Воспользоваться свойством: $\operatorname{tg}^2 x = a^2 \iff \operatorname{tg} x = \pm a$ $(a > 0)$ $\iff x =$ $= \pm \operatorname{arctg} a + \pi n$. **4.1.9.** $\frac{31}{12}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{43}{12}$, $\frac{17}{4}$. **4.1.10.** $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$. ● Воспользоваться формулой $1-\cos 6x = 2\sin^2 3x$, после чего привести исходное уравнение к виду $\operatorname{tg}^2 3x = 3$.

4.2.1. 2. □ Поскольку $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, исходное уравнение приводится к виду $1 - 2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = 1$ или $2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$. Последнее уравнение распадается на два:

$\sin x = 0$	$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$x_1 = \pi n$	Ответ к этому уравнению удобнее записать
	в виде объединения двух множеств
	$x_2 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m$ и $x_3 = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$

С учетом ограничения $-3 \leqslant x \leqslant 2$ имеем:

$$-3 \leqslant \pi n \leqslant 2; \quad -3 \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi m \leqslant 2; \quad -3 \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant 2,$$

откуда получим соответственно

$$-\frac{3}{\pi} \leqslant n \leqslant \frac{2}{\pi}; \quad -\frac{3}{2\pi} - \frac{1}{8} \leqslant m \leqslant \frac{1}{\pi} - \frac{1}{8}; \quad -\frac{3}{2\pi} - \frac{3}{8} \leqslant k \leqslant \frac{1}{\pi} - \frac{3}{8}.$$

Учитывая, что n, m и k — целые, получим $n = 0$ и $m = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, на отрезке $[-3, 2]$ находятся два решения исходного уравнения. ■

4.2.2. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$. ● Воспользоваться формулой $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. **4.2.3.** $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$. **4.2.4.** $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. **4.2.5.** $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$. **4.2.6.** $-90°$.

4.2.7. $x_1 = \pm \arccos\left(\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}\right) + 2\pi n$, $x_2 = \pm \arccos\left(\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}\right) + 2\pi n$. **4.2.8.** $x =$

$= (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n$. **4.2.9.** $x_1 = \pi + 2\pi n$, $x_2 = \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n$. **4.2.10.** 3. **4.2.11.** $x = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{4} + \pi n$. **4.2.12.** $x_1 = \frac{\pi n}{5}$, $x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}$. ● Воспользоваться равенствами $\sin\frac{13\pi}{3} = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 10x = 1 - 2\sin^2 5x$. **4.2.13.** 2. ● Воспользоваться формулами $\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$ и $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$. **4.2.14.** $x_1 = \frac{\pi n}{3}$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$. **4.2.15.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \neq 0$; $x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ● Преобразовав числитель дроби, решить квадратное уравнение $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$, после чего исключить из ответов корни знаменателя. **4.2.16.** $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. ● Воспользоваться формулами $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$ и $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. **4.2.17.** $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$. **4.2.18.** 120°.
4.2.19. $x = \frac{\pi n}{3}$. □ Так как $2\sin^2 3x = 1 - \cos 6x$, $\cos 12x = 2\cos^2 6x - 1$, то исходное уравнение приводится к виду $2\cos^2 6x + \cos 6x - 3 = 0$, откуда

$\cos 6x = 1$	$\cos 6x = -\frac{3}{2} < -1$
$6x = 2\pi n$	нет решений, т. к. $\lvert\cos 6x\rvert \leqslant 1$
$x = \frac{\pi n}{3}$	■

4.2.20. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$. ● Воспользоваться формулами $\cos 16x = 2\cos^2 8x - 1$, $8\sin^2 2x\cos^2 2x = 2(2\sin 2x\cos 2x)^2 = 2\sin^2 4x = 1 - \cos 8x$.
4.2.21. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$. ● *Воспользоваться равенствами* $8\cos^4 x = 2(2\cos^2 x)^2 = 2(1 + \cos 2x)^2 = 2\cos^2 2x + 4\cos 2x + 2$. **4.2.22.** 330°. **4.2.23.** $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pm\arccos(\sqrt{5} - 2) + 2\pi n$. ● Воспользоваться формулой $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. **4.2.24.** $x = \pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n$. ● Воспользоваться равенством $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, после чего привести уравнение к виду $5\cos^2 x + 24\cos x - 5 = 0$.
4.2.25. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. □ Так как $\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\lvert\sin x\rvert}$, то исходное уравнение приводится к виду (при условии $\sin x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi n$): $\cos 2x + \lvert\sin x\rvert = 0$. Но $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\lvert\sin x\rvert^2$, поэтому имеем $1 - 2\lvert\sin x\rvert^2 + \lvert\sin x\rvert = 0$ или $2\lvert\sin x\rvert^2 - \lvert\sin x\rvert - 1 = 0$, откуда

$\lvert\sin x\rvert = 1$	$\lvert\sin x\rvert = -\frac{1}{2}$
$\sin x = \pm 1$	нет решений, т. к. $\lvert\sin x\rvert \geqslant 0$
$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	■

4.2.26. 4. ● Воспользовавшись формулами $\cos(90° - 2x) = \sin 2x$ и $4\sin x\cos x = 2\sin 2x$, привести уравнение к виду $2\sin^2 2x + 7\sin 2x + 3 = 0$. **4.2.27.** $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$. ● Воспользовавшись тождеством $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, привести уравнение к виду $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$. Далее сделать замену $y = \sin x$.
4.2.28. $x_1 = -\frac{3\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$, $x_3 = -\pi + \operatorname{arctg} 5$, $x_4 = \operatorname{arctg} 5$. ● $\operatorname{tg}\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg} x$, $\sin\frac{13\pi}{2} = 1$, поэтому уравнение приводится к виду $\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} x = 6$ или $\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 5 = 0$ ($x \neq \pi n$). **4.2.29.** 45°. **4.2.30.** Нет решений. ● Воспользовавшись

формулой $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, привести уравнение к виду $2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$, либо использовать неравенство $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \geqslant 2$, верное для всех $a \neq 0$. **4.2.31.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$.

4.2.32. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ □ $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, поэтому $1 + \operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x = -2$ или $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$, откуда

$$\begin{array}{l|l} \operatorname{tg} x = 1 & \operatorname{tg} x = 3 \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n & x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n \end{array}$$

С учетом ограничения $4^{2x} - 2^{\pi} \geqslant 0$ или $2^{4x} \geqslant 2^{\pi}$, т. е. $x \geqslant \frac{\pi}{4}$, получаем ограничение на n: $n \geqslant 0$, т. е. $n = 0, 1, 2, \ldots$ ■

4.3.1. $x_1 = \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. □ I способ. $\sin \alpha x = \sin \beta x \iff \beta x = \alpha x + 2\pi n$ или $\beta x = \pi - \alpha x + 2\pi n$, поэтому исходное уравнение распадается на два:

$$\begin{array}{l|l} 3x = x + 2\pi n & 3x = \pi - x + 2\pi n \\ x_1 = \pi n & x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \end{array}$$

II способ. Преобразуем уравнение к виду $\sin 3x - \sin x = 0$. Используя формулу $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, получим $2\sin x \cos 2x = 0$, откуда

$$\begin{array}{l|l} \sin x = 0 & \cos 2x = 0 \\ x_1 = \pi n & 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ & x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}. \ ■ \end{array}$$

4.3.2. 3. □ I способ. $\cos\alpha x = \cos\beta x \iff \beta x = \pm\alpha x + 2\pi n$, поэтому исходное уравнение распадается на два:

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{\pi}{6} = x + 2\pi n & x - \frac{\pi}{6} = -x + 2\pi n \\ -\frac{\pi}{6} = 2\pi n & 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \text{нет решений} & x = \frac{\pi}{12} + \pi n \end{array}$$

Учитывая ограничение $-\pi \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$, придем к неравенству $-\pi \leqslant \frac{\pi}{12} + \pi n \leqslant \frac{7\pi}{6}$ или $-1 - \frac{1}{12} \leqslant n \leqslant \frac{7}{6} - \frac{1}{12}$, откуда n принимает значения -1, 0 и 1 (т. е. $x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi$, $x_2 = \frac{\pi}{12}$, $x_3 = \frac{\pi}{12} + \pi$). Всего таким образом на отрезке $\left[-\pi, \frac{7\pi}{6}\right]$ три решения.

II способ. Преобразуем уравнение к виду $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos x = 0$ и воспользуемся формулой $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Получаем $-2\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 0$, откуда $\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 0$, $x - \frac{\pi}{12} = \pi n$, $x = \frac{\pi}{12} + \pi n$ и далее как в I-ом способе. ■

4.3.3. 180°. **4.3.4.** 18°. **4.3.5.** $x = \pm 1 + \pi n$. **4.3.6.** $x_1 = \frac{5}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{6} + \frac{\pi n}{3}$.

4.3.7. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$. ● Применив формулу приведения $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, привести уравнение к виду $\cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$. Из двух получаемых далее множеств решений одно является частью другого. **4.3.8.** 210°. **4.3.9.** 1. **4.3.10.** $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$. **4.3.11.** а), г). ● $\sin(x - \pi) = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Далее привести уравнение к виду $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$ или $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Заметим еще, что данное уравнение можно свести к квадратному, применяя формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. **4.3.12.** $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$. **4.3.13.** $x = \frac{\pi n}{2}$. **4.3.14.** $x_1 = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{40} + \frac{\pi n}{10}$. ● Воспользоваться равенствами $1 - 2\sin^2 8x = \cos 16x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 16x\right)$.

4.3.15. $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. □ Сделаем замену $y = x - \frac{\pi}{6}$. Тогда $\sin 3x = \sin\left(3y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 3y$, и исходное уравнение при условии $\cos y \neq 0$ равносильно следующему: $\cos 3y + \cos y = 0$. Используя формулу для суммы косинусов, преобразуем его к виду $2\cos 2y \cos y = 0$, откуда (т. к. $\cos y \neq 0$) $\cos 2y = 0$. Отсюда $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, т. е. $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. ■

4.3.16. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$.

4.3.17. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$. □ <u>I способ.</u> $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, поэтому уравнение приводится к виду $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, откуда, с учетом соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha x = \operatorname{tg} \beta x \iff \beta x = \alpha x + \pi n,\ \alpha x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

имеем $2x = \frac{\pi}{2} - 3x + \pi n$ $\left(2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ или $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$.

<u>II способ.</u> $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x} =$

$$= \frac{\sin 2x \sin 3x - \cos 2x \cos 3x}{\cos 2x \sin 3x} = -\frac{\cos 5x}{\cos 2x \sin 3x},$$

поэтому исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \cos 5x = 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ \sin 3x \neq 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}. \ ■$$

4.3.18. 18°.

4.4.1. 375°. □ Используя формулу $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$, преобразуем уравнение к виду $\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ или $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Отсюда $3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$. По условию $\frac{7\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \leqslant \frac{9\pi}{4}$, откуда $\frac{7}{4} \leqslant \frac{1}{12} + \frac{2n}{3} \leqslant \frac{9}{4}$ или $\frac{5}{2} \leqslant n \leqslant \frac{13}{4}$. Поскольку n — целое, то $n = 3$, т. е. $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi$. Переводя в градусы, получим окончательно $x = 375^\circ$. ■

4.4.2. $x_1 = 8\pi n$, $x_2 = 2\pi + 8\pi n$. **4.4.3.** 1. **4.4.4.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$. **4.4.5.** 7. **4.4.6.** $x_1 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{3}$. ● Используя формулу $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, привести уравнение к виду $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x$. **4.4.7.** $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$.

4.4.8. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$. □ $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, поэтому уравнение приводится к виду $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$, откуда $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$. ■

4.4.9. $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **4.4.10.** $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$. **4.4.11.** $x_1 = \frac{11\pi}{12} + 2\pi n$, $x_2 = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi n$.

4.4.12. 15°. □ Преобразуем уравнение: $\cos 7x + \sqrt{3}\sin 7x = \sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x$, т. е. $\sin\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$, откуда

$$\begin{array}{l|l}
7x + \frac{\pi}{6} = 5x + \frac{\pi}{3} + 2\pi n & 7x + \frac{\pi}{6} = \pi - (5x + \frac{\pi}{3}) + 2\pi n \\
2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n & 12x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\
x = \frac{\pi}{12} + \pi n & x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}
\end{array}$$

По условию $0 < x < \frac{\pi}{6}$, поэтому

$$\begin{array}{l|l}
0 < \frac{\pi}{12} + \pi n < \frac{\pi}{6} & 0 < \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6} < \frac{\pi}{6} \\
0 < \frac{1}{12} + n < \frac{1}{6} & 0 < \frac{1}{24} + \frac{n}{6} < \frac{1}{6} \\
-\frac{1}{12} < n < \frac{1}{12} & -1 < 4n < 3 \\
n = 0 & n = 0 \\
x = \frac{\pi}{12}, \text{ т. е. } x = 15^\circ & x = \frac{\pi}{24}, \text{ т. е. } x = 7{,}5^\circ
\end{array}$$

Наибольшее целое решение $x = 15^\circ$. ■

4.4.13. 15°. **4.4.14.** $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi n$. ● Сначала воспользоваться формулой $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$. Затем, обозначив $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$, привести исходное уравнение к квадратному: $4y^2 - y - 5 = 0$. **4.4.15.** $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

4.5.1. -18°. □ Применяя формулу $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, преобразуем уравнение к виду $\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, откуда

$$\begin{array}{l|l}
5x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n & 5x + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\
5x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n & 5x = -\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \\
x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} & x = -\frac{7\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}
\end{array}$$

Переходя к градусам, имеем: $x_1 = 18^\circ + 72^\circ n$ или $x_2 = -42^\circ + 72^\circ n$. Наибольшее отрицательное решение получается в первой серии решений при $n = 0$: $x = -18^\circ$. ■

4.5.2. 1. **4.5.3.** $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

4.5.4. $x_1 = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $x_2 = \pi n$. ● <u>I способ.</u> Представить правую часть уравнения следующим образом: $\sin 6x = \sin(7x - x) = \sin 7x\cos x - \cos 7x \sin x$, после чего уравнение приведется к виду $\cos 7x \sin x = 0$.

<u>II способ.</u> Преобразовать левую часть уравнения по формуле

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)), \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{2}\sin 8x + \frac{1}{2}\sin 6x = \sin 6x,$$

откуда $\sin 8x = \sin 6x$.

4.5.5. $90°$. **4.5.6.** $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$.

4.5.7. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. □ На области допустимых значений ($\sin 2x \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi n}{2}$) исходное уравнение эквивалентно следующему: $\cos 3x + \sin 2x \sin x = 0$ или, поскольку $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$, такому: $\cos 2x \cos x = 0$, откуда

$$\left.\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \end{array}\right| \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n \text{ — это множество решений не входит в ОДЗ.} \end{array}$$

Таким образом, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. ■

4.5.8. $x_1 = \frac{\pi}{20}$, $x_2 = \frac{9\pi}{20}$. ● На области допустимых значений, определяемой условием $(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) \neq 0$, т. е. $\cos 2x \neq 0$, уравнение эквивалентно следующему: $\sin 6x \cos x - \cos 6x \sin x = \cos 6x \cos x + \sin 6x \sin x$, т. е. $\sin 5x = \cos 5x$, откуда $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$.

4.5.9. $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{7\pi}{6}$, $x_3 = \frac{5\pi}{6}$, $x_4 = \frac{11\pi}{6}$. □ Так как

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) + \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = \cos x,$$

то уравнение приводится к виду $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + 2\sin^2 x)$ или $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$, т. е. $\cos 2x = \frac{1}{2}$. *Отсюда* $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$. *С учетом ограничения* $x^2 - 2\pi x \leqslant 0$, т. е. $x(x - 2\pi) \leqslant 0$, откуда $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, имеем: $0 \leqslant \pm\frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant 2\pi$, т. е. $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$, $x_3 = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$ и $x_4 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$. ■

4.6.1. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. □ Преобразуем левую часть уравнения, используя формулу $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$:

$$2\sin\frac{x - \frac{\pi}{6} - x - \frac{2\pi}{3}}{2} \cdot \cos\frac{2x - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}}{2} = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Отсюда $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, т. е. $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. ■

4.6.2. $x=\frac{\pi n}{5}$. ● Воспользоваться формулой $\sin 3x+\sin 7x=2\sin 5x\cos 2x$. **4.6.3.** $x_1=\frac{\pi n}{2}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **4.6.4.** $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$. **4.6.5.** $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$.

4.6.6. 9. ☐ Преобразуем уравнение к виду $(\sin 7x+\sin x)-(\sin 5x+\sin 3x)=0$, откуда, применяя формулу для суммы синусов, имеем:

$$2\sin 4x\cos 3x-2\sin 4x\cos x=0 \implies \sin 4x(\cos 3x-\cos x)=0. \qquad \text{Отсюда}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin 4x=0 \\ 4x=\pi n \\ x_1=\dfrac{\pi n}{4} \end{array}\right| \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\cos 3x=\cos x} \\ 3x=x+2\pi n & 3x=-x+2\pi n \\ x_2=\pi n & x_3=\dfrac{\pi n}{2}. \end{array}$$

Множества решений $\{x_2\}$ и $\{x_3\}$ содержатся в $\{x_1\}$, поэтому, объединяя решения, получим окончательно $x=\frac{\pi n}{4}$. По условию $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, откуда $0\leqslant\frac{\pi n}{4}\leqslant 2\pi$, т.е. $0\leqslant n\leqslant 8$. Таким образом, n принимает 9 значений и, стало быть, на отрезке $[0,2\pi]$ имеется 9 решений. ■

4.6.7. $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $x_2=\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n$. **4.6.8.** $x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $x_2=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$. **4.6.9.** $x_1=\frac{\pi n}{2}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{5}$. **4.6.10.** $750°$.

4.6.11. $-22{,}5°$. ● I способ. Преобразовать в произведение $(\sin x+\sin 3x)$ и $(\cos x+\cos 3x)$, после чего получить уравнение $\cos x(\sin 2x+\cos 2x)=0$.

II способ. Воспользоваться формулами: $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ и $\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

4.6.12. $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x_2=\frac{2\pi n}{5}$, $x_3=\pi+2\pi n$. **4.6.13.** $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x_2=\pm\frac{2\pi}{9}+$ $+\frac{2\pi n}{3}$. **4.6.14.** $x_1=\frac{2\pi n}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $x_3=\frac{\pi}{4}+\pi n$. ● Применив формулы $\sin 2x+\sin 3x=2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}$ и $1-\cos 5x=2\sin^2\frac{5x}{2}$, привести уравнение к виду: $\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin^2\frac{5x}{2}$. **4.6.15.** $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **4.6.16.** $x_1=\pi n$, $x_2=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $x_3=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}$. **4.6.17.** $x_1=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. ● Учитывая, что $\sin x+\sin 3x=2\sin 2x\cos x$, а $\cos x+\cos 3x=2\cos 2x\cos x$, привести уравнение к виду $\sin 2x(2\cos x+1)=\cos 2x(2\cos x+1)$. **4.6.18.** $x=\frac{2\pi}{3}$. **4.6.19.** $x_1=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}$, $x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **4.6.20.** 5. **4.6.21.** $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $x_2=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $x_3=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi n}{7}$.

4.6.22. $x_1=\log_2\left(\frac{1}{2}+n\right)$, $x_2=\log_2\left((-1)^n\frac{1}{12}+\frac{n}{2}\right)$, $n=0,1,2,\ldots$

☐ Обозначив $y=\pi\cdot 2^x$, перепишем уравнение в виде $\sin 3y=\cos y-\sin y$ или $\sin 3y+\sin y=\cos y$. Применяя формулу для суммы синусов, имеем:

$2\sin 2y\cos y = \cos y$, откуда

$$\begin{array}{l|l} \cos y = 0 & 2\sin 2y = 1 \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n & \sin 2y = \frac{1}{2} \\ 2^x = \frac{1}{2} + n & y = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \\ & 2^x = (-1)^n\frac{1}{12} + \frac{n}{2}. \end{array}$$

Поскольку $2^x > 0$, то $\frac{1}{2} + n > 0$ и $(-1)^n\frac{1}{12} + \frac{n}{2} > 0$. Оба неравенства выполняются лишь при $n \geqslant 0$, поэтому

$$x_1 = \log_2\left(\frac{1}{2} + n\right), \quad x_2 = \log_2\left((-1)^n\frac{1}{12} + \frac{n}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ \blacksquare$$

4.6.23. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$. ● Используя формулу приведения, преобразуем уравнение к виду $\cos 6x = -2\cos 2x$, откуда $\cos 6x + \cos 2x = -\cos 2x$. Поскольку $\cos 6x + \cos 2x = 2\cos 4x\cos 2x$, то $2\cos 4x\cos 2x = -\cos 2x$. Отсюда

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x = 0 & 2\cos 4x = -1 \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n & \cos 4x = -\frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} & x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}. \ \blacksquare \end{array}$$

4.6.24. $x_1 = \frac{\pi n}{3}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$. **4.6.25.** $x = \pi n$. ● На области допустимых значений ($\cos 3x \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$) исходное уравнение эквивалентно следующему: $\cos x - \sin 2x = \cos 3x$ или $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$, откуда $2\sin x\sin 2x = \sin 2x$.

4.7.1. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$. □ Воспользуемся формулами понижения степени: $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$, $\sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2}$, $\sin^2 4x = \frac{1 - \cos 8x}{2}$, $\sin^2 5x = \frac{1 - \cos 10x}{2}$, тогда уравнение примет вид: $\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} + \frac{1 - \cos 10x}{2} = 2$ или $\cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0$. Так как

$$\cos 4x + \cos 8x = 2\cos 6x\cos 2x, \quad \cos 6x + \cos 10x = 2\cos 8x\cos 2x, \text{ то}$$
$$2\cos 6x\cos 2x + 2\cos 8x\cos 2x = 0, \quad \text{т. е.} \quad \cos 2x(\cos 6x + \cos 8x) = 0, \text{ откуда}$$

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x = 0 & \cos 6x + \cos 8x = 0 \\ x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} & 2\cos 7x\cos x = 0 \\ & \begin{array}{l|l} \cos x = 0 & \cos 7x = 0 \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n & x_3 = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}. \end{array} \end{array}$$

Множество решений $\{x_2\}$ является частью множества $\{x_3\}$, поэтому окончательный ответ: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$. ■

4.7.2. $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$. **4.7.3.** $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$. ● <u>I способ.</u> Воспользоваться формулами понижения степени и привести уравнение к виду $\cos 2x + \cos 4x = 0$ или $2\cos 3x \cos x = 0$.

<u>II способ.</u> $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$, поэтому уравнение принимает вид $\dfrac{1-\cos 2x}{2} + 1 - \cos^2 2x = 1$ или $2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$.

4.7.4. $x = \frac{\pi n}{7}$. **4.7.5.** 6. **4.7.6.** г). **4.7.7.** $x_1 = -\frac{3\pi}{4}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4}$, $x_3 = \frac{\pi}{4}$, $x_4 = \frac{3\pi}{4}$. **4.7.8.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. **4.7.9.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. **4.7.10.** $-112{,}5°$. **4.7.11.** 5. ● Преобразовав правую часть уравнения по формулам понижения степени, привести его к виду $\sin 3x + \sin 5x = \cos 4x + \cos 6x$, откуда $2\sin 4x \cos x = 2\cos 5x \cos x$.

4.8.1. $x_1 = \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$. □ Умножим обе части уравнения на 2, и используя формулу $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$, получим $2\sin 3x \cos x = 2\sin 5x \cos 3x$, $\sin 4x + \sin 2x = \sin 8x + \sin 2x$, т. е. $\sin 4x = \sin 8x$. Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} 8x = 4x + 2\pi n \\ 4x = 2\pi n \\ x_1 = \dfrac{\pi n}{2} \end{array}\right| \begin{array}{l} 8x = \pi - 4x + 2\pi n \\ 12x = \pi + 2\pi n \\ x_2 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{6}. \ \blacksquare \end{array}$$

4.8.2. $x_1 = \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. **4.8.3.** 7. **4.8.4.** $-216°$. **4.8.5.** $x_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $x_2 = -\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}$. **4.8.6.** $-90°$. **4.8.7.** $30°$. **4.8.8.** $170°$.

4.8.9. $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$. □ Поскольку

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

то уравнение приводится к виду $-\sqrt{3} + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, т. е. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$. Отсюда $2x - \frac{\pi}{3} = \pi n$ или $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$. С учетом ограничения $-1 \leqslant x \leqslant 3$ имеем: $-1 \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leqslant 3$, т. е. $-6 \leqslant \pi + 3\pi n \leqslant 18$, $-6 - \pi \leqslant 3\pi n \leqslant 18 - \pi$, откуда $\dfrac{-6-\pi}{3\pi} \leqslant n \leqslant \dfrac{18-\pi}{3\pi}$, $-\frac{2}{\pi} - \frac{1}{3} \leqslant n \leqslant \frac{6}{\pi} - \frac{1}{3}$. Так как n — целое, то, стало быть, $n = 0$ (т. е. $x = \frac{\pi}{6}$) или $n = 1$ (т. е. $x = \frac{2\pi}{3}$). Таким образом, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$. ■

4.8.10. 3. **4.8.11.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$. **4.8.12.** $x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$. **4.8.13.** $155°$. **4.8.14.** $x = \frac{\pi n}{4}$. ● Воспользоваться равенствами

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x.$$

4.8.15. $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$. ● Раскрыв скобки в левой части уравнения, воспользоваться формулой $2\sin 4x \sin 2x = \cos 2x - \cos 6x$. **4.8.16.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$. **4.8.17.** $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{9}$. **4.8.18.** $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$.

4.9.1. 60°. □ Так как $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$, то уравнение приводится к виду $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, откуда $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, т. е. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$. Учитывая ограничение $0 < x < \frac{\pi}{2}$, имеем: $0 < \pm\frac{\pi}{3} + \pi n < \frac{\pi}{2}$ или $0 < \pm\frac{1}{3} + n < \frac{1}{2}$. Отсюда $-\frac{1}{3} < n < \frac{1}{6}$ или $\frac{1}{3} < n < \frac{2}{3}$. Поскольку $n \in \mathbb{Z}$, то в первом случае $n = 0$ (т. е. $x = \frac{\pi}{3}$), а во втором — нет решений. Таким образом, $x = \frac{\pi}{3}$, или, переходя к градусам, $x = 60^\circ$. ■

4.9.2. в).

4.9.3. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$. □ Воспользовавшись формулой

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x,$$

приводим исходное уравнение к виду $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{5}{8}$ или $\sin^2 2x = \frac{3}{4}$. Отсюда $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $2x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$. ■

4.9.4. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. ● Воспользовавшись формулой из предыдущей задачи, привести исходное уравнение к квадратному относительно $\sin 2x$.

4.9.5. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$. **4.9.6.** $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. **4.9.7.** $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$. **4.9.8.** $x_1 = \pi + 2\pi n$, $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **4.9.9.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$. ● Применив формулы $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x$ и $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$, привести уравнение к виду $2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0$. **4.9.10.** $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$. **4.9.11.** $x = \frac{5\pi}{8} + \pi n$. **4.9.12.** $x = \frac{\pi n}{6}$. ● Преобразовав выражения $\sin^4 x + \cos^4 x$ и $\sin^4 2x + \cos^4 2x$, воспользоваться далее формулами понижения степени. **4.9.13.** 3. ● Воспользоваться формулами $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \operatorname{tg}^2 x$ и $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. **4.9.14.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$.

4.10.1. $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_3 = \frac{\pi}{4} + \pi n$. □ В силу того, что $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$, исходное уравнение эквивалентно следующему: $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \cos x - \sin x$, откуда

$$\left[\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} \cos x - \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} x = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{array} & \begin{array}{c} \cos x + \sin x = 1 \\ \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \left.\begin{array}{l|l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n & x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \\ x = 2\pi n & x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{array}\right. \end{array} \end{array}\right.$$ ■

4.10.2. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = 2\pi n$, $x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **4.10.3.** 135°. ● Разложить уравнение на множители, используя формулы $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$ и $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$. **4.10.4.** 60°. ● Преобразовать уравнение к виду $4\sin^2 x \cos x = 1 + \cos x$, после чего воспользоваться формулой $\sin^2 x = (1 + \cos x)(1 - \cos x)$.

4.11.1. $x_1 = \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$. □ Используя формулу

$$\left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right)^2 = 1 - \sin 3x,$$

приведем уравнение к виду $1 - \sin 5x = 1 - \sin 3x$ или $\sin 5x = \sin 3x$. Отсюда

$$\begin{array}{l|l} 5x = 3x + 2\pi n & 5x = \pi - 3x + 2\pi n \\ 2x = 2\pi n & 8x = \pi + 2\pi n \\ x_1 = \pi n & x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}. \ \blacksquare \end{array}$$

4.11.2. $x_1 = \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$. **4.11.3.** $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$. **4.11.4.** $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$. **4.11.5.** $x_1 = -\frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$. ● Используя формулы приведения, преобразуем уравнение к виду $\sin 2x + 1 + (\cos x + \sin x)^2 = 0$ или, поскольку $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$, к виду $\sin 2x + 1 + 1 + \sin 2x = 0$. Отсюда $\sin 2x = -1$. **4.11.6.** $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **4.11.7.** $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x_2 = 2\pi n$, $x_3 = \frac{\pi}{4} + \pi n$. **4.11.8.** $x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. **4.11.9.** $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$. ● Учитывая, что $\sin 2x + 1 = (\sin x + \cos x)^2$, обозначить $y = \sin x + \cos x$. **4.11.10.** $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. ● Используя формулы приведения и учитывая ОДЗ ($\sin x - \cos x \neq 0$, т.е. $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n$), освободиться от знаменателя в левой части уравнения, получить квадратное уравнение $2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$.

4.12.1. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. □ Преобразуем уравнение к виду $(\sin 2x \sin x - \sin 2x) - \left(0{,}5\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0$ или $\sin 2x(\sin x - 1) - 0{,}5(\sin x - 1) = 0$, т.е. $(\sin x - 1)(\sin 2x - 0{,}5) = 0$. Отсюда

$$\begin{array}{l|l} \sin x - 1 = 0 & \sin 2x - 0{,}5 = 0 \\ \sin x = 1 & \sin 2x = \frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n & x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}. \ \blacksquare \end{array}$$

4.12.2. $x = \frac{\pi n}{5}$. ● Исходное уравнение распадается на два: $\operatorname{tg} 5x = 0$ и $\sin^2 x = 1$. Решения второго из них не входят в область допустимых значений ($\cos 5x \neq 0$). **4.12.3.** $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $x_2 = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{10} + \frac{2\pi}{3} + 4\pi n + 2\pi$. ● Обозначив $\alpha = \frac{2\pi}{3} - \frac{x}{4}$, заметить, что

$$\sin 2\alpha = \sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right),$$

после чего уравнение приведется к виду $\cos\alpha = 5\sin 2\alpha$, или $\cos\alpha = 10\sin\alpha\cos\alpha$. **4.12.4.** $x_1 = \frac{\pi}{8}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$. ● Учитывая, что

$$1 - 2\cos^2\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x, \quad \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

привести уравнение к виду

$$\cos 2x \cos 3x = \sin x(\cos 4x + \cos 2x) \quad \text{или} \quad \cos 2x \cos 3x = 2\sin x \cos 3x \cos x.$$

4.12.5. $x_1 = \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **4.12.6.** $x_1 = \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$. ● Воспользоваться формулой $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$. **4.12.7.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n$. ● При условии $\sin x \neq 0$ уравнение равносильно следующему: $\sin^2 x + \sin x \cos x = 1$ или $\sin x \cos x = \cos^2 x$. **4.12.8.** $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x_2 = \frac{2\pi n}{3}$. ● Преобразовать уравнение к виду $\sin x \cos 3x + \cos 3x = 1 + \sin x$, откуда $\cos 3x(1 + \sin x) = (1 + \sin x)$. **4.12.9.** $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. ● Воспользоваться равенствами $\sin x - 2\sin^3 x = \sin x(1 - 2\sin^2 x) = \sin x \cos 2x$. **4.12.10.** $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. ● Поскольку $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$, $2\cos^2\frac{3x}{2} = 1 + \cos 3x$, то уравнение приводится к виду $2\cos x + \cos 2x + 1 = 2 + \cos x + \cos 3x$ или $\cos x - \cos 3x = 1 - \cos 2x$, откуда $2\sin 2x \sin x = 2\sin^2 x$. **4.12.11.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. **4.12.12.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. ● Привести уравнение к виду $2\cos x - 2\sin x \cos x = 1 - \sin x$, т. е. $2\cos x(1 - \sin x) = 1 - \sin x$. **4.12.13.** $x_1 = \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n$. ● Воспользоваться равенством $2 - 2\cos^2 x = 2\sin^2 x$. **4.12.14.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi n$. ● Воспользовавшись формулами приведения, привести уравнение к виду $\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$. **4.12.15.** 45°. ● Так как $\sin(2x + 120^\circ) = \sin\big(90^\circ + (2x + 30^\circ)\big) = \cos(2x + 30^\circ)$, то после обозначения $y = x + 15^\circ$ исходное уравнение приводится к виду $\cos 2y = \cos y - 1$ или $\cos y(2\cos y - 1) = 0$. **4.12.16.** $x_1 = -\frac{5\pi}{12}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4}$, $x_3 = -\frac{\pi}{12}$, $x_4 = \frac{\pi}{4}$, $x_5 = \frac{7\pi}{12}$. ● Воспользоваться формулами $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$, $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. **4.12.17.** $x_1 = \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n$. ● Применить формулы $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. **4.12.18.** $x_1 = -\frac{3\pi}{2}$, $x_2 = -\frac{4\pi}{3}$, $x_3 = -\pi$, $x_4 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_5 = -\frac{\pi}{2}$, $x_6 = -\frac{\pi}{3}$, $x_7 = 0$, $x_8 = \frac{\pi}{3}$, $x_9 = \frac{\pi}{2}$. **4.12.19.** $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \frac{5\pi}{3}$. ● Воспользоваться цепочкой равенств $\sin\left(\frac{7\pi}{3} + x\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$. **4.12.20.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$. ● Преобразовать уравнение к виду $\sin^3 x(\cos 3x - \sin 3x) = \cos^3 x(\cos 3x - \sin 3x)$, откуда $\sin^3 x = \cos^3 x$ или $\cos 3x - \sin 3x = 0$. **4.12.21.** 2.

4.13.1. 45°. □ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, поэтому уравнение приводится к виду $3\cos^2 x - 2\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$. Поделим обе части уравнения на $\cos^2 x$ ($\cos x \neq 0$, так как в противном случае из уравнения мы получили бы, что и $\sin x = 0$, но тогда $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, чего не может быть): $3 - 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = 0$ или $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = -3$. Таким образом, $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$. С учетом ограничения $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеем $x = \frac{\pi}{4}$, т. е., переходя к градусам, $x = 45^\circ$. ■

4.13.2. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{2}{7} + \pi n$. □ Представим правую часть уравнения следующим образом: $3 = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$, тогда уравнение примет вид: $7\sin^2 x + 5\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$. Поделив на $\cos^2 x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то из уравнения и $\sin x = 0$ — противоречие), приходим к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg} x$: $7\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x - 2 = 0$, откуда

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1 \\ x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \frac{2}{7} \\ x_2 = \operatorname{arctg}\frac{2}{7} + \pi n. \blacksquare \end{array}$$

4.13.3. $x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $x_2 = \operatorname{arctg} 4 + \pi n$. **4.13.4.** $x = \pm\arccos(-\frac{1}{4}) + 2\pi n$. **4.13.5.** $x_1 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$. **4.13.6.** $x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n\right)$. **4.13.7.** $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi n}{2}$. **4.13.8.** $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + \frac{\pi n}{2}$. **4.13.9.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi n$. **4.13.10.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$. **4.13.11.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$. **4.13.12.** $x_1 = -\operatorname{arctg} 4 + \pi n$, $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$.

4.13.13. 4. □ После упрощения по формулам приведения получим однородное уравнение 2-го порядка: $3\cos^2 x = \sin^2 x + 2\sin x\cos x$. Так как $\cos x = 0$ не является его решением, то при делении обеих частей уравнения на $\cos^2 x$ получим эквивалентное уравнение $3 = \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$. Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -3 \\ x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n \end{array}$$

Учитывая ограничение $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, а также то, что $-\frac{\pi}{2} < -\operatorname{arctg} 3 < 0$, $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, имеем окончательно $x_1 = -\operatorname{arctg} 3$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi$, $x_3 = \frac{\pi}{4}$, $x_4 = \frac{\pi}{4} - \pi$. Таким образом, на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеется 4 корня уравнения. ■

4.13.14. $x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$. ● После умножения на $\cos x$ уравнение приводится к однородному уравнению 2-го порядка.

4.14.1. $x = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}\right) + 2\pi n$. □ I способ. Переходя к половинному углу и учитывая, что $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $3 = 3\sin^2\frac{x}{2} + 3\cos^2\frac{x}{2}$, преобразуем уравнение к виду $5\cos^2\frac{x}{2} - 5\sin^2\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 3\sin^2\frac{x}{2} + 3\cos^2\frac{x}{2}$ или $4\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = 0$. Так как $\cos\frac{x}{2} = 0$ не является решением полученного уравнения, то, поделив его на $\cos^2\frac{x}{2}$, приходим к эквивалентному уравнению $4\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 = 0$, откуда $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$, т. е. $x = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}\right) + 2\pi n$.

II способ. Воспользуемся формулами, выражающими $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}, \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}.$$

Тогда получим

$$5\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}+\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=3. \qquad (*)$$

При этом ОДЗ исходного уравнения сузилась, так как из нее «выпали» значения $x=\pi+2\pi n$, при которых не определен $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Но поскольку эти значения x не являются решениями уравнения, то в итоге мы получаем эквивалентное уравнение $(*)$. Преобразовывая далее, мы имеем $4\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1=0$, откуда $x=2\operatorname{arctg}\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\right)+2\pi n$.

III способ. (метод введения вспомогательного угла). Поделим обе части уравнения на $\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$ и получим $\frac{5}{\sqrt{29}}\cos x+\frac{2}{\sqrt{29}}\sin x=\frac{3}{\sqrt{29}}$. Поскольку $\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2=1$, то можно положить $\frac{5}{\sqrt{29}}=\sin\varphi$, $\frac{2}{\sqrt{29}}=\cos\varphi$, где $\varphi=\arcsin\frac{5}{\sqrt{29}}$ (или $\arccos\frac{2}{\sqrt{29}}$, или $\operatorname{arctg}\frac{5}{2}$). Тогда уравнение примет вид

$$\sin\varphi\cos x+\cos\varphi\sin x=\frac{3}{\sqrt{29}},\ \text{ т. е. }\ \sin(x+\varphi)=\frac{3}{\sqrt{29}}.$$

Отсюда $x+\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{3}{\sqrt{29}}+\pi n$ и, стало быть,

$$x=(-1)^n\arcsin\frac{3}{\sqrt{29}}-\arcsin\frac{5}{\sqrt{29}}+\pi n.\text{ [1] } \blacksquare$$

4.14.2. $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x_2=\operatorname{arctg}4+\pi n$. **4.14.3.** $x=\operatorname{arctg}\frac{5}{12}+2\pi n$. **4.14.4.** $x=\operatorname{arctg}3+\pi n$. **4.14.5.** $x=\operatorname{arctg}\left(\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}\right)+\pi n$. **4.14.6.** $x_1=\frac{2}{5}(\operatorname{arctg}5+\pi n)$, $x_2=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}$. **4.14.7.** $x_1=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $x_2=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{11}+2\pi n$. **4.14.8.** $x_1=\pi+2\pi n$, $x_2=2\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}+\pi n$. ● При переходе к $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ в этом уравнении теряется решение $x=\pi+2\pi n$; его надо добавить к ответу.

4.15.1. $x=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi n}{2}$. □ I способ. Используя формулу $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x=2\operatorname{ctg}2x$, приведем исходное уравнение к виду $\operatorname{ctg}2x=\frac{3}{4}$, откуда $x=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

II способ. Заменяя $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$, получим: $\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\operatorname{tg}x=1{,}5$ или $2\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}x-2=0$ (при этом $\sin x\neq 0$), отсюда

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=-2\\ x_1=-\operatorname{arctg}2+\pi n\end{array}\right|\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}\\ x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n.\ \blacksquare\end{array}$$

[1] Хотя ответ выглядит внешне не так, как в первых двух случаях, тем не менее, это то же самое множество, только записанное по-другому.

4.15.2. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$. □ Применяя формулу $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}$, преобразуем уравнение к виду: $\frac{2}{\sin 2x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, откуда $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$. ■

4.15.3. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$ **4.15.4.** $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$. ● Воспользоваться равенствами

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + \frac{1}{\operatorname{tg} x - 1} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = -\operatorname{tg} 2x.$$

4.16.11. $x = \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n$. ● Использовать равенства

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}} = \frac{\left(\frac{\cos(x/2) - \sin(x/2)}{\cos(x/2)}\right)}{\left(\frac{\sin(x/2) - \cos(x/2)}{\sin(x/2)}\right)} = -\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.$$

4.17.1. $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. ● Привести уравнение к виду

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin 2x - \cos 2x = 0, \quad \text{откуда} \quad \cos 2x + \sin 2x = 0.$$

4.17.2. $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$. ● Воспользоваться тем, что $2\sin^2 x + \cos 2x + 1 = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2$.

4.17.3. $x = \frac{\pi n}{3}$. □ <u>I способ.</u> Перепишем уравнение в виде $-\sin^2 3x = 1 - \cos^2 6x$, т. е. $-\sin^2 3x = \sin^2 6x$. Так как для всех x: $-\sin^2 3x \leqslant 0$, а $\sin^2 6x \geqslant 0$, то равенство возможно в том и только в том случае, когда $\sin 3x = 0$ и $\sin 6x = 0$, т. е. $\sin 3x = 0$ и $2\sin 3x \cos 3x = 0$. Поскольку из первого уравнения вытекает, что $\cos 3x \neq 0$, то второе уравнение также сводится к уравнению $\sin 3x = 0$, откуда $x = \frac{\pi n}{3}$. ■

<u>II способ.</u> ● Воспользовавшись равенством $\sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2}$, свести исходное уравнение к квадратному.

4.17.4. $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{\pi}{12}$, $x_3 = \frac{\pi}{4}$. ● Учитывая, что

$$\sin\left(x + \frac{23\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 10\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x,$$

привести уравнение к виду $\sin 2x \operatorname{tg} 3x + \sin 2x = 0$. **4.17.5.** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$, $x_3 = 2$. ● Исходное уравнение равносильно совокупности следующих двух уравнений при условии $2x - x^2 \geqslant 0$, т. е. $0 \leqslant x \leqslant 2$:

$$2\cos^2 x - 1 = 0 \quad \Big| \quad 2x - x^2 = 0.$$

4.17.6. $x = \pi + 2\pi n$. ● Учитывая, что $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, привести уравнение к виду

$$\frac{\cos^2 x}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 + 4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}},$$

т. е. $\cos^2 x = 1 + \sin^2 x$ (при условии $\cos x \neq 1$). 4.17.7. ...

4.17.9. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. ● Учесть, что $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sin(\pi/6)}\right) = 2$. **4.17.10.** $x = \frac{\pi}{2}$.
● Заменить уравнение равносильной системой

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sin x, \\ \sin x > 0, \\ 4 - x^2 > 0, \quad 4 - x^2 \neq 1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x > 0, \\ |x| < 2, \quad x^2 \neq 3. \end{cases}$$

4.17.11. $x_1 = \log_2 \pi n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

4.18.1. $-45°; 0°$. □ Преобразуем левую часть уравнения, используя формулу суммы кубов:

$$\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x - \cos x \sin x) = \\ = (\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x).$$

Кроме того, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$, поэтому исходное уравнение равносильно следующему: $(\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x) = = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$, откуда

$$\begin{array}{l|l} \cos x + \sin x = 0 & 1 - \cos x \sin x = \cos x - \sin x \\ \operatorname{tg} x = -1 & 1 + \sin x = \cos x + \cos x \sin x \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n & 1 + \sin x = \cos x(1 + \sin x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 + \sin x = 0 & \cos x = 1 \\ \sin x = -1 & x = 2\pi n. \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n & \end{array}$$

С учетом ограничения $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$\begin{array}{l|l|l} -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} + \pi n < \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} < 2\pi n < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{4} < n < \frac{3}{4} & 0 < n < \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} < n < \frac{1}{4} \\ n = 0 & \varnothing & n = 0 \\ x_1 = -\frac{\pi}{4} & & x_2 = 0. \end{array}$$

Переходя к градусам, имеем $x_1 = -45°; x_2 = 0°$. ■
4.18.2. $45°$. ● Воспользоваться равенствами $\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x) \times \times (\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$. **4.18.3.** $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.
4.18.4. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. ● Применить формулы

$$\cos x = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right), \ \sin^3\frac{x}{2} - \cos^3\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{\sin x}{2}\right).$$

4.18.5. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos(4 - \sqrt{13}) + \pi n$. □ Разложим левую часть уравнения как разность кубов: $\cos^6 x - \sin^6 x = (\cos^2 x)^3 - (\sin^2 x)^3$, тогда:

$\cos 2x(\cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x) = 2\cos^2 2x$, откуда

$$\begin{array}{l|c}
\cos 2x = 0 & \cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x = 2\cos 2x \\
2x = \frac{\pi}{2} + \pi n & \cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x, \text{ поэтому} \\
x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} & 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x = 2\cos 2x \\
 & 1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x = 2\cos 2x \\
 & 1 - \frac{1-\cos^2 2x}{4} = 2\cos 2x \\
 & \cos^2 2x - 8\cos 2x + 3 = 0 \\
 & \begin{array}{l|l}
\cos 2x = 4 + \sqrt{13} & \cos 2x = 4 - \sqrt{13} \\
\text{нет решений, т. к.} & x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos(4 - \sqrt{13}) + 2\pi n. \\
4 + \sqrt{13} > 1, \text{ а } |\cos 2x| \leqslant 1 & \blacksquare
\end{array}
\end{array}$$

4.18.6. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

4.18.7. $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi n$. □ Разложим левую часть уравнения как сумму кубов: $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)\times$ $\times(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x) = 1\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$. Тогда уравнение принимает вид $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \cos 2x$ или $1 - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 2x) = \cos 2x$, т. е. $3\cos^2 2x - 4\cos 2x + 1 = 0$. Отсюда имеем:

$$\begin{array}{l|l}
\cos 2x = 1 & \cos 2x = \frac{1}{3} \\
x_1 = \pi n & x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi n. \ \blacksquare
\end{array}$$

4.18.8. $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. **4.18.9.** 315°. **4.18.10.** 210°.

4.18.11. 315°. □ Поскольку

$$\sin^8 x - \cos^8 x = (\sin^4 x)^2 - (\cos^4 x)^2 = (\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) = \\ = -\cos 2x\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right),$$

то уравнение приводится к виду $-\cos 2x\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = \frac{1}{2}\cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x$, откуда

$$\begin{array}{l|c}
\cos 2x = 0 & \frac{1}{2}\sin^2 2x - 1 = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2} \\
2x = \frac{\pi}{2} + \pi n & \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} \\
x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} & \cos^2 2x + \cos 2x = 0 \\
 & \begin{array}{l|l}
\cos 2x = 0 & \cos 2x + 1 = 0 \\
x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} & \cos 2x = -1 \\
 & x = \frac{\pi}{2} + \pi n.
\end{array}
\end{array}$$

По условию $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < 2\pi \\ \frac{5}{2} < n < \frac{7}{2} \\ n = 3, \text{ т. е. } x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} \end{array}\right| \begin{array}{l} \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \pi n < 2\pi \\ 1 < n < \frac{3}{2} \\ \text{нет целых решений} \end{array}$$

Таким образом, $x = \frac{7\pi}{4}$, откуда, переходя к градусам, имеем $x = 315°$.

4.18.12. $225°$.

4.19.1. $x_1 = -\frac{3\pi}{4}$, $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_3 = -\frac{\pi}{3}$. ☐ Область определения функции $y = \sqrt{-4x - x^2 - 3}$ определяется неравенством $-4x - x^2 - 3 \geqslant 0$, т. е. $-3 \leqslant x \leqslant -1$. Далее поделим обе части уравнения на $\cos^2 x$ (по условию $\cos x \neq 0$); тогда с учетом формулы $\frac{3}{\cos^2 x} = 3+3\operatorname{tg}^2 x$ получим $\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x - 1) = 3\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg} x) - 3 - 3\operatorname{tg}^2 x$ или $\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x - 1) = 3(\operatorname{tg} x - 1)$. Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} x - 1 = 0 \Longrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right| \begin{array}{l} \operatorname{tg}^2 x = 3 \Longrightarrow \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n \end{array}$$

Поскольку $-3 \leqslant x \leqslant -1$, то

$$\left.\begin{array}{l} -3 \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant -1 \\ -\frac{3}{\pi} - \frac{1}{4} \leqslant n \leqslant -\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} \\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = -1 \\ x = -\frac{3\pi}{4} \end{array}\right| \begin{array}{c} -3 \leqslant \pm\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant -1 \\ -\frac{3}{\pi} \leqslant n \pm \frac{1}{3} \leqslant -\frac{1}{\pi} \\ \left.\begin{array}{l} -\frac{3}{\pi} \leqslant n - \frac{1}{3} \leqslant -\frac{1}{\pi} \\ n = 0 \\ x = -\frac{\pi}{3} \end{array}\right| \begin{array}{l} -\frac{3}{\pi} \leqslant n + \frac{1}{3} \leqslant -\frac{1}{\pi} \\ n = -1 \\ x = -\frac{2\pi}{3}. \blacksquare \end{array} \end{array}$$

4.19.2. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. • Применить формулу $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ и обозначить $y = \operatorname{tg} x$, тогда уравнение примет вид $y^3 - 2y^2 + 2y - 2 = 0$ или $(y-1)(y^2+2) = 0$.

4.19.3. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$. • Воспользоваться формулой $\sin 3x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{3x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{3x}{2}}$.

4.19.4. 2.

4.20.1. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = 2\pi n$. ☐ Так как $\sin^4 x \leqslant \sin^2 x$, $\cos^3 x \leqslant \cos^2 x$, то $\sin^4 x + \cos^3 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, поэтому равенство возможно лишь в случае, когда $\sin^4 x = \sin^2 x$ и $\cos^3 x = \cos^2 x$. Из второго уравнения следует, что либо $\cos^2 x = 0$, т. е. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, либо $\cos x = 1$, т. е. $x_2 = 2\pi n$. Оба решения x_1 и x_2 удовлетворяют и первому уравнению и, стало быть, являются решениями и исходного уравнения. ■

4.20.2. Нет решений. ☐ Уравнение приводится к виду $\sin^{1977} x + \sin^{1995} 7x = 2$. Поскольку $|\sin x| \leqslant 1$, $|\sin 7x| \leqslant 1$, то равенство возможно лишь в случае, когда $\sin^{1977} x = 1$ и $\sin^{1995} 7x = 1$. Отсюда

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 7x = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7}, \end{cases}$$

т. е. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7}$, $k = 7n + \frac{3}{2}$. Последнее равенство не выполняется ни при каких целых n и k, а значит исходное уравнение не имеет решений. ■

4.20.3. Нет решений. I способ. ● Учитывая неравенства $|\sin 2x| \leqslant 1$ и $|\sin 6x| \leqslant 1$, заменить уравнение равносильной системой

$$\begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 6x = 1. \end{cases}$$

II способ. ● $2\sin 2x \sin 6x = \cos 4x - \cos 8x$, поэтому уравнение приводится к виду $\cos 4x - \cos 8x = 2$ или $\cos 4x - (2\cos^2 4x - 1) = 2$.

4.20.4. $x = 3$. ● Учесть, что наименьшее значение функции $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$ равно 1, а наибольшее значение $-\cos \pi x$ также равно 1.

4.20.5. $x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ● Воспользоваться формулой $\cos^2 x = (1 + \sin x)(1 - \sin x)$, после чего привести уравнение к виду: $(1 + \sin x)(1 - \sin x) + (1 + \sin x)\sqrt{x - \frac{\pi}{2}} = 0$. **4.20.6.** $x_1 = 0$, $x_2 = \pi + 2\pi n$.

4.21.1. 30°. Умножив обе части уравнения на 2, перепишем его следующим образом:

$$\cos x\left(2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\right) - \sin x\left(2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}\right) = 1.$$

Далее, используя формулы преобразования произведения в сумму, получим: $\cos x(\cos x + \cos 2x) - \sin x(\cos x - \cos 2x) = 1$. Раскрывая скобки и учитывая, что $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, имеем: $\cos x \cos 2x - \sin x \cos x + \sin x \cos 2x = \sin^2 x$, откуда $\cos x(\cos 2x - \sin x) + \sin x(\cos 2x - \sin x) = 0$. Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x - \sin x = 0 \\ \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \left[\begin{array}{l|l} 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n & 2x = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n & x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} & \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 \\ x_3 = -\frac{\pi}{4} + \pi n. \end{array}\right.$$

С учетом ограничения $0^\circ < x < 40^\circ$ получим окончательно (см. решение x_1) $x = 30^\circ$. ■

4.21.2. $x_1 = \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n$. ● Раскрыв скобки и используя равенства $16\sin x\cos x = 8\sin 2x$ и $2\sin 4x = 4\sin 2x\cos 2x$, привести уравнение к виду: $3\sin 2x\sin^4 x + 12\sin 2x\sin^2 x - 8\sin 2x + 4\sin 2x\cos 2x = 0$, откуда $\sin 2x = 0$ или $3\sin^4 x + 12\sin^2 x - 8 + 4\cos 2x = 0$. Последнее уравнение решается с помощью формул понижения степени.

4.21.3. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n$. ● Привести уравнение к виду $\cos 2x(5\cos^4 x + 4\cos^2 x - 1) = 0$. **4.21.4.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. ● Привести уравнение к виду $\sin^3 x(2\sin^2 x - 1) + 3\cos 2x = 0$ или $-\sin^3 x\cos 2x + 3\cos 2x = 0$, откуда $\cos 2x(-\sin^3 x + 3) = 0$.

4.21.5. $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$. □ $\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$, поэтому исходное уравнение преобразуется к виду:

$$(\cos x - 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x - 1\right) = -(\cos x - 1)(1 + \cos x),$$

откуда

$$\left.\begin{array}{l} \cos x - 1 = 0 \\ x_1 = 2\pi n \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} \sin x - \frac{1}{2}\cos 2x - 1 = -1 - \cos x \\ \sin x + \cos x = \frac{1}{2}\cos 2x \\ \sin x + \cos x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \cos x - \sin x = 2 \\ \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \text{ — нет решений, т. к.} \\ \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1. \ \blacksquare \end{array}$$

4.21.6. $x_1 = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x_3 = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{4} + \pi n$.
● Воспользоваться равенствами $3 - 4\cos^2 x = 4\sin^2 x - 1 = (2\sin x - 1)(2\sin x + 1)$.

4.21.7. $x = \pi - \arcsin\frac{2}{5}$. ● Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x - \frac{4}{5}\cos x + 1 = \frac{5}{2}\sin x, \\ \sin\frac{x}{2} \neq 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 1 - \frac{4}{5}\cos x = \frac{5}{2}\sin x\left(1 - \frac{4}{5}\cos x\right), \\ x \neq 2\pi n. \end{cases}$$

4.21.8. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. ● Привести уравнение к виду:

$$\frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x\cos x} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x\cos x}.$$

4.21.9. $x_1 = \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. <u>I способ.</u> □ Преобразуем уравнение к виду $\sin 6x = 2 - 2\cos 4x$, т. е. $\sin 6x = 4\sin^2 2x$. Вычтем теперь из обеих частей последнего уравнения по $\sin 2x$, получим $\sin 6x - \sin 2x = 4\sin^2 2x - \sin 2x$, откуда $2\sin 2x\cos 4x = \sin 2x(4\sin 2x - 1)$. Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ x_1 = \frac{\pi n}{2} \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} 2\cos 4x = 4\sin 2x - 1 \\ 2 - 4\sin^2 2x = 4\sin 2x - 1 \\ 4\sin^2 2x + 4\sin 2x - 3 = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6} \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \sin 2x = -\frac{3}{2} < -1 \\ \text{нет решений, т. к. } |\sin 2x| \leqslant 1. \ \blacksquare \end{array}$$

II способ. ● Воспользоваться формулой для синуса тройного угла: $\sin 6x = \sin(3\cdot 2x) = \sin 2x(3-4\sin^2 2x)$.

4.21.10. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. □ Преобразуем уравнение к виду:

$$(\cos x - \sin x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) + (\cos^3 x - \sin^3 x) = 0, \quad \text{т. е.}$$

$$(\cos x - \sin x) + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + (\cos x - \sin x)(1 + \sin x\cos x) = 0.$$

Отсюда

$\cos x - \sin x = 0$	$1 + \cos x + \sin x + 1 + \sin x\cos x = 0$
$\operatorname{tg} x = 1$	$(1+\cos x) + \sin x(1+\cos x) = -1$
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$	$(1+\cos x)(1+\sin x) = -1$
	нет решений, т. к. $1+\cos x \geqslant 0$, $1+\sin x \geqslant 0$, а, значит, и $(1+\cos x)(1+\sin x) \geqslant 0$. ■

4.21.11. $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \pi n$. ● Привести уравнение к виду $\sin^2 x - 3\cos^2 x = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{6}\cos x$, откуда

$$(\sin x - \sqrt{3}\cos x)(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = \sqrt{2}(\sin x - \sqrt{3}\cos x).$$

4.21.12. $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x_3 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{7}-1}{3} + \pi n$. ● Воспользоваться равенствами:

$$4(\sin^2 x\sin 2x - \sqrt{3}\sin^3 x) = 4(\sin^2 x\cdot 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^3 x) =$$
$$= 4\sin^3 x(2\cos x - \sqrt{3}),$$
$$\frac{3}{2}\cos 2x\sin 4x = \frac{3}{2}\cos 2x\cdot 2\sin 2x\cos 2x = 3\cos^2 2x\sin 2x =$$
$$= 3\cos^2 2x\cdot 2\sin x\cos x = 6\cos^2 2x\sin x\cos x.$$

4.21.13. 6. ● Понизить степень в обеих частях уравнения, после чего воспользоваться формулой: $\sin 10x - \sin 8x = 2\sin x\cos 9x$. **4.21.14.** $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{\pi}{6}$, $x_4 = \frac{5\pi}{6}$, $x_5 = \pi$, $x_6 = \frac{7\pi}{6}$. ● Применить формулу для разности синусов в левой части уравнения. **4.21.15.** $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$. ● Преобразовать уравнение: $(\sin 14x - \sin 12x) - \cos 13x = 4 - 8\sin x$, т. е. $2\sin x\cos 13x - \cos 13x = 4(1-2\sin x)$, откуда $\cos 13x(2\sin x - 1) = 4(1-2\sin x)$. **4.21.16.** $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **4.21.17.** $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$. ● Воспользовавшись тождествами $\sin 6x = \sin 4x\cos 2x + \cos 4x\sin 2x$ и $\cos 6x + \cos 2x = 2\cos 4x\cos 2x$, привести уравнение к виду $(\sin 4x - \cos 4x)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$. **4.21.18.** $x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x_2 = \frac{2\pi n}{3}$, $x_3 = \frac{2\pi n}{5}$. ● Привести уравнение к виду $\sin x(2\cos x - 1) = \sin 4x(2\cos x - 1)$.

4.22.1. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. □ $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$, $2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, поэтому исходное уравнение приводится к виду $|\cos 2x|\sin x = 1$. Так как $0 \leqslant |\cos 2x| \leqslant 1$ и $\sin x \leqslant 1$, то последнее равенство равносильно системе

$$\begin{cases} |\cos 2x| = 1, \\ \sin x = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos 2x = \pm 1, \\ \sin x = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\left\{\begin{array}{c}\cos 2x = 1,\\ \sin x = 1,\end{array}\right. \quad\Bigg|\quad \left\{\begin{array}{c}\cos 2x = -1,\\ \sin x = 1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}2x = 2\pi n,\\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\end{array}\right. \quad\Bigg|\quad \left\{\begin{array}{c}2x = \pi + 2\pi n,\\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}x = \pi n,\\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\end{array}\right. \quad\Bigg|\quad \left\{\begin{array}{c}x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\end{array}\right.$$

$$\text{нет решений} \quad\Bigg|\quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \blacksquare$$

4.22.2. $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3}$. ● Привести уравнение к виду $|\cos 3x|\sin\frac{3x}{2} = -1$, откуда

$$\left\{\begin{array}{l}\cos 3x = \pm 1,\\ \sin\frac{3x}{2} = -1.\end{array}\right.$$

4.22.3. $x = \pi - \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$. □ Перепишем уравнение в виде $\sqrt{8 - 17\sin x} = -2\cos x$. Поскольку уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{c}f(x) = (g(x))^2,\\ g(x) \geqslant 0,\end{array}\right.$$

то полученное уравнение равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{c}8 - 17\sin x = 4\cos^2 x,\\ -2\cos x \geqslant 0\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{c}8 - 17\sin x = 4 - 4\sin^2 x\\ \cos x \leqslant 0\,.\end{array}\right.$$

Решая квадратное уравнение $4\sin^2 x - 17\sin x + 4 = 0$, получим $\sin x_1 = 4$ (нет решений) и $\sin x_2 = \frac{1}{4}$. Из 2-го уравнения $x = \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$ или $x = \pi - \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$. С учетом ограничения $\cos x \leqslant 0$ имеем окончательно $x = \pi - \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$. ■

4.22.4. $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **4.22.5.** $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. **4.22.6.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **4.22.7.** $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **4.22.8.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. ● Так как $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x\cos x = 2(2\cos^2 x - 1)\cos x$, то исходное уравнение равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{c}(2\cos^2 x - 1)\cos x = \cos^2 x,\\ -\sqrt{2}\cos x \geqslant 0.\end{array}\right.$$

4.22.9. $x = (-1)^n\arcsin\frac{5}{8} + \pi n$. **4.22.10.** $x = \pi n$. **4.22.11.** $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **4.22.12.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **4.22.13.** $x_1 = -\frac{5\pi}{8}$, $x_2 = -\frac{7\pi}{8}$,

$x_3 = -\frac{2\pi}{3}$. ● После преобразования подкоренного выражения $(2 + \cos 2x - 2\cos^2 3x + 2\cos 6x = 2 + \cos 2x - (1 + \cos 6x) + 2\cos 6x = 1 + \cos 6x + \cos 2x = 1 + 2\cos 4x \cos 2x)$ и возведения обеих частей уравнения в квадрат получить равносильную систему:

$$\begin{cases} 1 + 2\cos 4x \cos 2x = 2\sin^2 2x, \\ \sin 2x \geqslant 0. \end{cases}$$

4.22.14. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

4.22.15. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \pi n$. □ Преобразуем уравнение к виду $-2\sqrt[4]{2}\sin x = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$. После возведения в квадрат получим равносильную систему

$$\begin{cases} 4\sqrt{2}\sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}, \\ -\sin x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4\sqrt{2}\sin^2 x \cos^2 x = \cos 2x, \\ \sin x \leqslant 0, \quad \cos x \neq 0\,. \end{cases}$$

Решим полученное уравнение $\sqrt{2}\sin^2 2x = \cos 2x$, $\sqrt{2}(1 - \cos^2 2x) = \cos 2x$. Отсюда $\sqrt{2}\cos^2 2x + \cos 2x - \sqrt{2} = 0$, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} \cos 2x = -\sqrt{2} \\ \text{нет решений} \end{array}\right| \begin{array}{l} \cos 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 2x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x = \pm\dfrac{\pi}{8} + \pi n. \end{array}$$

С учетом условия $\sin x \leqslant 0$ получим окончательно $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \pi n$. ■

4.22.16. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$. ● Учитывая равенства $\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x}} = |\sin x|$ и $2\cos^2 x = 2 - 2\sin^2 x = 2 - 2|\sin x|^2$, привести уравнение к виду $2|\sin x|^2 + |\sin x| - 1 = 0$. **4.22.17.** $x = \pm\arccos\frac{5}{6} + \pi n$. ● Учитывая, что $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{|\cos x|}$, сделать замену $y = |\cos x|$. **4.22.18.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x_2 = \operatorname{arctg} 5 + \pi n$. **4.22.19.** 30°. **4.22.20.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$. **4.22.21.** $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = \arccos\frac{12}{13} + 2\pi n$. ● После возведения в квадрат исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4\cos^2 x + 12\sin x \cos x + 9\sin^2 x = 4 + 13\sin x, \\ 2\cos x + 3\sin x \geqslant 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 5\sin^2 x + 12\sin x \cos - 13\sin x = 0, \\ 2\cos x + 3\sin x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} \sin x(5\sin x + 12\cos x - 13) = 0, \\ 2\cos x + 3\sin x \geqslant 0. \end{cases}$$

4.22.22. $x = 2\pi n$. **4.22.23.** 2. ● После возведения в квадрат уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - \sin 2x = 1 + \sin 6x, \\ \sin 3x + \cos 3x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin 6x + \sin 2x = 0, \\ \sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0\,. \end{cases}$$

4.22.24. $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\cos 3}\right) + 2\pi n$. □ После возведения в квадрат уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin(x+3) - \sin 3\cos x = \cos x, \\ \cos x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x \cos 3 = \cos x, \\ \cos x \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда $\operatorname{tg} x = \cos 3$, $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\cos 3}\right) + \pi n$. С учетом условия $\cos x \geqslant 0$ получим окончательно $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\cos 3}\right) + 2\pi n$. ■

4.22.25. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$. ● Поделив обе части уравнения на $\cos x$, привести его к виду $\sqrt{3 - \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}}$. **4.22.26.** $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi n$. ● Воспользоваться формулой $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin 2x}$. **4.22.27.** $x = \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$. ● Поделить обе части уравнения на $\sqrt{\cos x}$, приведя уравнение к виду $2\sqrt{\operatorname{tg} x + 6} = \operatorname{tg} x + 3$. **4.22.28.** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. ● Возвести обе части уравнения в квадрат, учтя, что $2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$. **4.22.29.** $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **4.22.30.** $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_3 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **4.22.31.** $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi n$. ● Преобразовать уравнение к виду $\sqrt{0{,}5 - \sin x} = \sqrt{\cos x} + \sqrt{0{,}5 - \cos x - \sin x}$, после чего возвести в квадрат, учитывая ОДЗ. Тогда уравнение заменится *равносильной системой*

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x(0{,}5 - \cos x - \sin x)} = 0, \\ \cos x \geqslant 0, \quad 0{,}5 - \cos x - \sin x \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда $\cos x(0{,}5 - \cos x - \sin x) = 0$. **4.22.32.** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$, $x_3 = \pi$. **4.22.33.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. ● После возведения в квадрат уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4\cos^2 x + \cos 3x = 0, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

Далее применить формулу $\cos 3x = \cos x(4\cos^2 x - 3)$.

4.23.1. $x = \pm\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \pi n$. □ Учитывая, что

$$2\cos 2x = 2(1 - 2\sin^2 x) = 2(1 - 2|\sin x|^2) = 2 - 4|\sin x|^2,$$

приведем уравнение к виду $1 + 2|\sin x| = 2 - 4|\sin x|^2 \Rightarrow 4|\sin x|^2 + 2|\sin x| - 1 = 0$, откуда $|\sin x| = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Поскольку $|\sin x| \geqslant 0$, подходит лишь решение $|\sin x| = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, т. е. $\sin x = \pm\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $x = \pm\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \pi n$. ■

4.23.2. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. □ Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\cos x \geqslant 0$, тогда $|\cos x| = \cos x \geqslant \cos^2 x$ и, следовательно, $5\sin^2 x + 8\cos x + 1 = 5\sin^2 x + 5\cos x + 3\cos x + 1 \geqslant 5\sin^2 x + 5\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 5(\sin^2 x + \cos^2 x) + 1 + 3\cos x = 6 + 3\cos x$. Таким образом, левая часть

уравнения больше или равна 6. С другой стороны, для правой части имеем оценку $|\cos x| + \cos^2 x \leqslant 2$. Отсюда следует, что в этом случае уравнение не имеет решений.

2) Пусть теперь $\cos x < 0$, тогда $|\cos x| = -\cos x$ и уравнение приводится к виду $5\sin^2 x + 8\cos x + 1 = -\cos x + \cos^2 x$, т. е. $6\cos^2 x - 9\cos x - 6 = 0$. Отсюда

$\cos x = 2$	$\cos x = -\frac{1}{2}$
нет решений, т. к. $\lvert\cos x\rvert \leqslant 1$	$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. ■

4.23.3. $\frac{3\pi}{4}$. • На области допустимых значений ($x \neq \pi n$) рассмотреть два случая: $\sin x > 0$ и $\sin x < 0$. **4.23.4.** 6.

4.23.5. $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi n$. □ Поскольку $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, то уравнение преобразуется к виду $\frac{1}{5}|5\cos x + 1| = 5\cos x + 1$. Учитывая, что $\frac{|a|}{5} = a \Leftrightarrow a = 0$, имеем: $5\cos x + 1 = 0$, т. е. $\cos x = -\frac{1}{5}$, $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi n$. ■

4.23.6. $x_1 = \pi + 2\pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$. • Исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0, \\ \cos x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin x - \cos x = 0, \\ \cos x < 0. \end{cases}$$

4.23.7. $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$. **4.23.8.** $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. • Так как $\sin x - 1 \leqslant 0$, то $|\sin x - 1| = 1 - \sin x$. **4.23.9.** $x_1 = \pi n$, $x_2 = \frac{4}{3}$. • Привести уравнение к виду $2^{|x-2|\sin x} = 2^{x|\sin x|/2}$, откуда $|x-2|\sin x = \frac{x|\sin x|}{2}$. Далее рассмотреть два случая: $\sin x \geqslant 0$ и $\sin x < 0$.

4.23.10. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 8\pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 8\pi n$. □ Применяя формулы приведения, получим уравнение $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$. Рассмотрим теперь два случая:

1) Пусть $\sin x \geqslant 0$, тогда $|\sin x| = \sin x$ и $\sin x = \sin x + 2\cos x$, т. е. $\cos x = 0$. Отсюда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, а с учетом условия $\sin x \geqslant 0$: $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

2) Пусть теперь $\sin x < 0$, тогда $|\sin x| = -\sin x$ и $-\sin x = \sin x + 2\cos x$, т. е. $\sin x = -\cos x$. Отсюда $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, а с учетом условия $\sin x < 0$: $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

Далее, область определения функции $y = \sqrt{\cos\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}}$ определяется неравенством $\cos\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant 0$, т. е. $\cos\frac{x}{4} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $-\frac{\pi}{4} + 2\pi m \leqslant \frac{x}{4} \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi m$ или $-\pi + 8\pi m \leqslant x \leqslant \pi + 8\pi m$. Подставим теперь в полученное неравенство найденные решения x_1 и x_2:

$-\pi + 8\pi m \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant \pi + 8\pi m$	$-\pi + 8\pi m \leqslant -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant \pi + 8\pi m$
$-\frac{3}{4} + 4m \leqslant n \leqslant \frac{1}{4} + 4m$	$-\frac{3}{8} + 4m \leqslant n \leqslant \frac{5}{8} + 4m$
$n = 4m$	$n = 4m$
$x = \frac{\pi}{2} + 8\pi n$	$x = -\frac{\pi}{4} + 8\pi n$. ■

4.23.11. $x_1 = \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n$. ● Обозначить $y = |\sin x - \cos x|$ и воспользоваться цепочкой равенств $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2 = |\sin x - \cos x|^2 = y^2$. **4.23.12.** 6. ● По условию $x \geqslant 0$, поэтому $|x| = x$. **4.23.13.** $x_1 = \pi + 2\pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_3 = \frac{\pi}{6} + \pi n$. ● Преобразовать правую часть уравнения:

$$|1 + 2\cos x + \cos 2x| = |(1 + \cos 2x) + 2\cos x| = |2\cos^2 x + 2\cos x| =$$
$$= 2|\cos x| \cdot |\cos x + 1| = 2|\cos x| \cdot (\cos x + 1),$$

(здесь $|\cos x + 1| = \cos x + 1$, т. к. $\cos x + 1 \geqslant 0$). Далее рассмотреть два случая: $\cos x \geqslant 0$ и $\cos x < 0$. **4.23.14.** $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_3 = -\frac{\pi}{6} + \pi n$.

4.24.1. $x_1 = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$, $x_2 = \pi - \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$. □ В силу равенств

$$\log_{\frac{1}{\sin x}} \cos^2 x = \log_{\sin x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right), \quad \log_{\sqrt{\sin x}}(\sqrt{7 - \operatorname{tg} x}) = \log_{\sin x}(7 - \operatorname{tg} x),$$

исходное уравнение равносильно следующему: $\log_{\sin x} \frac{1}{\cos^2 x} = \log_{\sin x}(7 - \operatorname{tg} x)$. Полученное уравнение в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} = 7 - \operatorname{tg} x, \\ \sin x > 0, \quad \sin x \neq 1 \end{cases}$$

(еще одно неравенство, определяющее ОДЗ, $7 - \operatorname{tg} x > 0$ выполняется автоматически, так как $7 - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$). Таким образом,

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{tg}^2 x = 7 - \operatorname{tg} x, \\ \sin x > 0, \quad \sin x \neq 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 2, \\ \sin x > 0, \quad \sin x \neq 1 \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} x = -3, \\ \sin x > 0, \quad \sin x \neq 1 \end{cases}$$

$$x_1 = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n \qquad \Bigg| \qquad x_2 = \pi - \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n. \ \blacksquare$$

4.24.2. 3. ● Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{ctg} x > 0, \quad \operatorname{ctg} x \neq 1. \end{cases}$$

4.24.3. $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{2}{3} + \pi n$. ● Заменить уравнение равносильной системой

$$\begin{cases} 2\sin x - 1 + 18\sin^2 x = 1 - 7\sin x, \\ 1 - 7\sin x > 0. \end{cases}$$

4.24.4. $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$. ● Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (3\sin x - \cos x)\cos x = 1, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

4.24.5. $x_1 = 2\pi n$, $n = -3, -2, -1, 0, 1, \ldots$; $x_2 = \pi + 2\pi m$, $m = -4, -5, -6, \ldots$
● Свести уравнение к равносильной системе

$$\begin{cases} (x+19)\cos x = \dfrac{x+19}{\cos x}, \\ (x+19)\cos x > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos^2 x = 1, \\ (x+19)\cos x > 0. \end{cases}$$

4.24.6. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$; $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m = 2, 1, 0, -1, \ldots$ **4.24.7.** $x_1 = 2\pi n$, $n = -1, 0, 1, \ldots$; $x_2 = \pi + 2\pi m$, $m = -3, -4, \ldots$ **4.24.8.** $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$.
● Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{2\sin x \sin 2x}{5\cos x + 4\sin 2x} = 1, \\ 2\sin x \sin 2x > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4\sin^2 x \cos x = 5\cos x + 4\sin 2x, \\ 4\sin^2 x \cos x > 0 \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} 4\sin^2 x \cos x = 5\cos x + 8\sin x \cos x, \\ \cos x > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 4\sin^2 x = 5 + 8\sin x, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

4.24.9. $x = \arcsin\frac{1}{3} + \pi(2n+1)$. ● Воспользовавшись формулой $\frac{1}{3}\log_3(-\cos x) = \log_{27}(-\cos x)$, заменить уравнение равносильной системой

$$\begin{cases} \sin 2x - \frac{1}{3}\cos x = -\cos x, \\ -\cos x > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos x \sin x = -\frac{1}{3}\cos x, \\ \cos x < 0. \end{cases}$$

4.24.10. $x = (-1)^n \arcsin\left(3^{-\sqrt{\frac{1}{2}\log_3 2}}\right) + \pi n$. □ Преобразовав уравнение к виду $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin x} 3 = 2$, перейдем к основанию 3: $\dfrac{\log_3 2}{\log_3 \sin x} = 2\log_3 \sin x$, т. е. $\log_3^2 \sin x = \frac{1}{2}\log_3 2$. Отсюда $\log_3 \sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\log_3 2}$. Поскольку $\sin x \leqslant 1$, то $\log_3 \sin x \leqslant 0$ и, значит, $\log_3 \sin x = -\sqrt{\frac{1}{2}\log_3 2}$, откуда $\sin x = 3^{-\sqrt{\frac{1}{2}\log_3 2}}$, $x = (-1)^n \arcsin\left(3^{-\sqrt{\frac{1}{2}\log_3 2}}\right) + \pi n$. ■

4.24.11. ± 3, $\pm\frac{5}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{1}{2}$. ● При решении уравнения учесть ОДЗ, определяемую неравенством $9 - x^2 \geqslant 0$. **4.24.12.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$. ● Приведя уравнение к виду $81^{1-\cos^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$, обозначить $y = 81^{\cos^2 x}$. **4.24.13.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$. ● Преобразовать уравнение к виду $2^{2\sin^2 x} = 2^{-\cos 4x}$, откуда $2\sin^2 x = -\cos 4x$, т. е. $1 - \cos 2x = 1 - 2\cos^2 2x$. **4.24.14.** $x = \frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}$.
● Воспользовавшись равенствами $2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin 2x$, привести уравнение к виду $24y^2 - 49y + 2 = 0$, где $y = 8^{\sin 2x}$. **4.24.15.** $x_1 = \frac{1}{2} + n$, $x_2 = \frac{1}{8}$. ● Преобразовать уравнение к виду $3^{8x^2 \operatorname{ctg} \pi x} \cdot 3^{15x \operatorname{ctg} \pi x} = 3^{2\operatorname{ctg} \pi x}$ или

$\operatorname{ctg} \pi x(8x^2 + 15x - 2) = 0$. **4.24.16.** $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. ● Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 49^{1-\sin^2 x} + 49^{1+\sin^2 x} = 14 \cdot 5^2, \\ \cos x > 0,\ \cos x \neq 1. \end{cases}$$

4.25.1. $x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_3 = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. □ Уравнение равносильно следующему

$(\sin x + \sin 5x) + 2\sin 3x = \operatorname{ctg} x \sin 3x$ или $2\sin 3x \cos 2x + 2\sin 3x = \operatorname{ctg} x \sin 3x$.

Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений на ОДЗ ($x \neq \pi n$):

$\sin 3x = 0$	$2(1 + \cos 2x) = \operatorname{ctg} x$	
$x = \frac{\pi n}{3}$	$4\cos^2 x = \frac{\cos x}{\sin x}$	
с учетом условия $x \neq \pi n$ имеем	$\cos x = 0$	$4\sin x \cos x = 1$
$x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$	$x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$\sin 2x = \frac{1}{2}$
		$x_3 = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. ■

4.25.2. $x = \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{7} + \pi n$. ● Используя тождество $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = -\frac{\sin 2x}{\cos x \cos 3x}$, привести уравнение к виду $-\frac{\sin 2x}{\cos x \cos 3x} = \frac{8}{\sin 2x}$. Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} -\sin^2 2x = 8\cos x \cos 3x, \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$$

(два других условия, определяющие ОДЗ: $\cos x \neq 0$ и $\cos 3x \neq 0$, — выполняются для этой системы автоматически). Далее воспользоваться тождеством $8\cos x \cos 3x = 4(\cos 2x - \cos 4x)$. **4.25.3.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$.
● Заменить уравнение равносильной системой:

$$\begin{cases} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \\ \cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin 2x - \sqrt{2}\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \sin 2x - 3\cos 2x = 1, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi k, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi k. \end{cases}$$

4.25.4. $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. ● Так как $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, то уравнение преобразовывается к виду $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \cdot (2\cos x + 3) = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$. **4.25.5.** $x_1 = -\frac{\pi}{2}$,

$x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = -\frac{\pi}{8}$, $x_4 = \frac{3\pi}{8}$, $x_5 = \frac{7\pi}{8}$. ● $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$, поэтому уравнение равносильно следующему $1 + \sin 2x + \cos 2x + \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0$, т. е.

$$(1 + \cos x)\left(1 + \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right) = 0.$$

4.25.6. $x_1 = -\frac{7\pi}{4}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{4}$, $x_3 = -\frac{3\pi}{4}$, $x_4 = -\frac{\pi}{4}$, $x_5 = \frac{\pi}{4}$. ● Воспользоваться равенствами $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$, $\operatorname{tg} x + 1 = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x}$. **4.25.7.** $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = -\frac{\pi}{8}$. ● Учитывая ОДЗ и используя равенство $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, заменить уравнение равносильной системой:

$$\begin{cases} 2\cos x \sin^2 x - 2\cos^3 x + \cos x - \sin x = 0, \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) - (\sin x - \cos x) = 0, \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2}. \end{cases}$$

4.25.8. $x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$. ● Представив $\operatorname{tg} 6x = \dfrac{\sin 6x}{\cos 6x}$ и избавившись в уравнении от знаменателей, заменить его равносильной системой

$$\begin{cases} \cos 6x \cos 2x = \sin 6x \sin 2x + \sin 6x, \\ \sin 2x \neq -1, \quad \cos 6x \neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos 8x = \sin 6x, \\ x \neq -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ x \neq \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{6}. \end{cases}$$

4.25.9. $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$. **4.25.10.** $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$. ● Применить формулы

$$\cos 4x + 1 = 2\cos^2 2x, \quad \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x},$$
$$8\sin^4 x \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin^4 2x \quad \text{и} \quad \cos^4 2x - \sin^4 2x = \cos 4x.$$

4.25.11. $x = \operatorname{arctg} \dfrac{5 \pm \sqrt{46}}{7} + \pi n$. ● Воспользоваться формулами $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$, $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ (так как при этом сужается область допустимых значений, то проверить, не теряется ли возможное решение $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$). **4.25.12.** $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$. **4.25.13.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. ● Преобразовать уравнение к виду $\operatorname{ctg}^4 x = -\sin^2 2x$, учесть, что $\operatorname{ctg}^4 x \geqslant 0$, $-\sin^2 2x \leqslant 0$. **4.25.14.** $x_1 = \frac{\pi n}{4}$ при $n \neq 4k + 2$; $x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{6}$. ● Воспользоваться тождеством $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = \dfrac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x}$. **4.25.15.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. ● Обозначив $y = \sin^2 x$ и учитывая, что $\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x = 4y(1 - y)$, преобразовать исходное уравнение к виду

$$\frac{4y(1-y) - 4y}{4y(1-y) + 4y - 4} + 1 = \frac{2y}{1-y} \quad \text{или} \quad \frac{-y^2 - (1-y)^2}{(1-y)(y-1)} = \frac{2y}{1-y}.$$

4.25.16. 45°. ● Привести левую часть уравнения к общему знаменателю, воспользоваться тождеством $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$. **4.25.17.** 120°. ● Воспользоваться тождеством $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$. **4.25.18.** $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. ● Преобразовать левую часть уравнения следующим образом:

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg} 2x} + \frac{\cos 2x}{\cos 2x + \sin 2x} = \frac{1}{1-\operatorname{tg} 2x} + \frac{1}{1+\operatorname{tg} 2x} =$$
$$= \frac{1+\operatorname{tg} 2x + 1 - \operatorname{tg} 2x}{(1-\operatorname{tg} 2x)(1+\operatorname{tg} 2x)} = \frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 2x}.$$

4.25.19. $x_1 = -\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{12} + \pi n$. ● Воспользоваться тождествами $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} + \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\sin 2x}$, $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. **4.25.20.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. ● На ОДЗ уравнение равносильно следующему $\sin 3x \cos x + \sin x \sin 2x \sin 3x = \cos 3x \sin x$ или $\sin 2x(1 + \sin x \sin 3x) = 0$. **4.25.21.** $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$.

4.26.1. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$. □ Используя формулы приведения, преобразуем уравнение к виду $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right) = -1$, откуда $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ или $\sin x = \frac{4n-1}{\sqrt{2}}$. Поскольку $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, то должно быть $-1 \leqslant \frac{4n-1}{\sqrt{2}} \leqslant 1$, т. е. $\frac{1-\sqrt{2}}{4} \leqslant n \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{4}$. Из последнего неравенства с учетом целочисленности n имеем $n = 0$, откуда $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$.

4.26.2. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$.

4.26.3. $x_1 = \pm\arccos\left(-\frac{1}{9}\right) + 2\pi n$, $x_2 = \pm\arccos\left(-\frac{5}{9}\right) + 2\pi n$, $x_3 = \pm\arccos\frac{7}{9} + 2\pi n$. □ Уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{3\pi}{2}\cos x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\\ &\cos x = -\frac{1}{9} + \frac{4n}{3}\end{aligned}\right| \begin{aligned} &\frac{3\pi}{2}\cos x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\\ &\cos x = -\frac{5}{9} + \frac{4n}{3}\end{aligned}$$

Учитывая, что $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, имеем

$$\left.\begin{aligned} &-1 \leqslant -\frac{1}{9} + \frac{4n}{3} \leqslant 1\\ &-\frac{8}{9} \leqslant \frac{4n}{3} \leqslant \frac{10}{9}\\ &-\frac{2}{3} \leqslant n \leqslant \frac{5}{6}\\ &n = 0 \Longrightarrow \cos x = -\frac{1}{9},\\ &x_1 = \pm\arccos\left(-\frac{1}{9}\right) + 2\pi n\end{aligned}\right| \begin{aligned} &-1 \leqslant -\frac{5}{9} + \frac{4n}{3} \leqslant 1\\ &-\frac{4}{9} \leqslant \frac{4n}{3} \leqslant \frac{14}{9}\\ &-\frac{1}{3} \leqslant n \leqslant \frac{7}{6}\\ &n = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{5}{9},\ x_2 = \pm\arccos\left(-\frac{5}{9}\right) + 2\pi n\\ &\text{и } n = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{7}{9},\ x_3 = \pm\arccos\frac{7}{9} + 2\pi n. \blacksquare\end{aligned}$$

4.26.4. $x_1 = (-1)^n\arcsin\frac{1}{8} + \pi n$, $x_2 = (-1)^n\arcsin\frac{5}{8} + \pi n$, $x_3 = (-1)^n\arcsin\frac{7}{8} + \pi n$. **4.26.5.** $x_1 = \pi - \arcsin\frac{\pi}{12}$, $x_2 = \pi + \arcsin\frac{\pi}{6}$.

4.26.6. $x = (-1)^n\arcsin\left(\frac{1}{\pm(\pi/3) + 2\pi k}\right) + \pi n$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

4.27.1. $x = 1$. □ Обозначим $y = \arcsin x$, тогда имеем: $2y^2 - 3\pi y + \pi^2 = 0$, откуда $y_{1,2} = \dfrac{3\pi \pm \pi}{4}$, т. е.

$y_1 = \pi$	$y_2 = \frac{\pi}{2}$
$\arcsin x = \pi$	$\arcsin x = \frac{\pi}{2}$
нет решений, т. к. $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$	$x = 1$. ■

4.27.2. $x = 2$. **4.27.3.** $x = -\frac{1}{4}$.

4.27.4. $x = \frac{1}{8}$. □ ОДЗ исходного уравнения определяется системой неравенств

$$\begin{cases} -1 \leqslant 2x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant 7x \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{7} \leqslant x \leqslant \frac{1}{7}, \end{cases}$$

т. е. $-\frac{1}{7} \leqslant x \leqslant \frac{1}{7}$. На этом промежутке уравнение равносильно следующему $\cos(2\arcsin 2x) = \cos(\arccos 7x)$. Так как

$\cos(\arccos 7x) = 7x, \quad \cos(2\arcsin 2x) = 1-2\sin^2(\arcsin 2x) = 1-2(2x)^2 = 1-8x^2,$

то последнее уравнение преобразуется к виду $1-8x^2 = 7x$ или $8x^2+7x-1 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{8}$. С учетом ОДЗ получим окончательно $x = \frac{1}{8}$. ■

4.28.1. $x_1 = \pi n \pm \sqrt{\pi^2 n^2 + 1}$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \pi k \pm \sqrt{\pi^2 k^2 - 1}$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$. □ Уравнение $\cos x = \cos \dfrac{1}{x}$ равносильно совокупности двух уравнений:

$x = \frac{1}{x} + 2\pi n$	$x = -\frac{1}{x} + 2\pi k$
$x^2 - 2\pi n x - 1 = 0$	$x^2 - 2\pi k x + 1 = 0$
$x_{1,2} = \pi n \pm \sqrt{\pi^2 n^2 + 1}$	$x_{3,4} = \pi k \pm \sqrt{\pi^2 k^2 - 1}$,
	$\pi^2 k^2 - 1 \geqslant 0$ только когда $k \neq 0$ $(k \in \mathbb{Z})$. ■

4.28.2. $x_1 = -n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \dfrac{\pm\sqrt{4k+1} - 1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$.

4.28.3. $x = \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{2}{5} + \pi n$. □ Умножим обе части уравнения на 2, после чего воспользуемся формулами понижения степени и преобразования произведения в сумму:

$$\cos 2x + \cos 4x - 9(1 + \cos 2x) + 10 = 14(\cos 2x - \cos 4x) - 30(1 - \cos 2x).$$

Отсюда $15\cos 4x - 52\cos 2x + 31 = 0$ и, так как $\cos 4x = \cos^2 2x - 1$, имеем $15\cos^2 2x - 26\cos 2x + 8 = 0$, т. е.

$\cos 2x = \frac{4}{3}$	$\cos 2x = \frac{2}{5}$
нет решений, т. к. $\lvert\cos 2x\rvert \leqslant 1$	$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{5} + \pi n$. ■

4.28.4. $x = \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} + \pi n$.

4.28.5. $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$. □ Преобразуем выражения в левой части уравнения:

$$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos^6\left(x - \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos^4\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cos^4\left(x - \frac{\pi}{6}\right),$$
$$\sin^6\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= \sin^6\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin^6\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\sin^4\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\sin^4\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{1}{4}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\left(\cos^4\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin^4\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{8}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

или, так как $\cos^4\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin^4\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$,

$$2\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

откуда

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$	$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$
$2x - \frac{\pi}{3} = \pi n$	$\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$
$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$	$4x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
	$x_2 = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$. ■

4.28.6. $x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

4.28.7. Нет решений. I способ. □ Так как

$$8\sin^3 x \sin 3x = 2(2\sin^2 x)(2\sin x \sin 3x) = 2(1 - \cos 2x)(\cos 2x - \cos 4x) =$$
$$= 2\cos 2x - 2\cos^2 2x - 2\cos 4x + 2\cos 2x\cos 4x =$$
$$= 2\cos 2x - 1 - \cos 4x - 2\cos 4x + \cos 2x + \cos 6x = 3\cos 2x - 3\cos 4x - 1 + \cos 6x,$$

то исходное уравнение преобразуется к виду

$$3\cos 2x - 3\cos 4x - 1 + \cos 6x - \cos 6x - 3\cos 2x = -3\cos 4x$$

или $-1 = 0$. Поскольку полученное равенство неверно, то исходное уравнение решений не имеет. ■

II способ. ● Воспользоваться тождеством $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$.

4.28.8. $x = \pm\arccos\frac{2}{3} - \frac{\pi}{5} + 2\pi n$. ● Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2\sin\frac{3x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{5} + 2x\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) + 2\sin\frac{x}{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \frac{4}{3}\sin\frac{x}{2}, \\ \sin\frac{x}{2} \neq 0. \end{cases}$$

Далее воспользоваться формулами преобразования произведения в сумму.

4.28.9. $x_1 = \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}\Big((-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4} + \pi n\Big)$.

I способ. □ Поскольку $2\sin 5x\cos x = \sin 4x + \sin 6x$, то уравнение равносильно следующему: $1 - \cos 4x = \sin 6x$, откуда $2\sin^2 2x = \sin 6x$. Вычтем теперь из обеих частей полученного уравнения по $\sin 2x$: $2\sin^2 2x - \sin 2x = \sin 6x - \sin 2x$, т. е. $\sin 2x(2\sin 2x - 1) = 2\sin 2x\cos 4x$. Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ x_1 = \frac{\pi n}{2} \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} 2\sin 2x - 1 = 2\cos 4x \\ 2\sin 2x - 1 = 2(1 - 2\sin^2 2x) \\ 4\sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin 2x = \frac{-1+\sqrt{13}}{4} \\ x_2 = \frac{1}{2}\Big((-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4} + \pi n\Big) \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \sin 2x = \frac{-1-\sqrt{13}}{4} \\ \text{нет решений, т. к.} \\ \frac{-1-\sqrt{13}}{4} < -1. \ \blacksquare \end{array}$$

II способ. ● Привести уравнение к виду $2\sin^2 2x = \sin 6x$, далее воспользоваться формулой для синуса тройного угла: $\sin 6x = \sin 2x(3 - 4\sin^2 2x)$.

4.28.10. $x_1 = -\frac{1}{3}\Big(\pi + \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n\Big)$, $x_2 = -\frac{1}{7}\Big(\pi + \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n\Big)$. ● Переписать уравнение в виде $\cos 2x = -\Big(\frac{3}{5}\cos 5x - \frac{4}{5}\sin 5x\Big)$, откуда $\cos 2x = -\cos(5x + \varphi)$, т. е. $\cos 2x = \cos(5x + \varphi + \pi)$, где $\varphi = \arcsin\frac{4}{5}$. **4.28.11.** $x_1 = \pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$. ● Ввести новую переменную $t = \sin 2x - \cos 2x$. Тогда $\sin 4x = 1 - (\sin 2x - \cos 2x)^2 = 1 - t^2$ и исходное уравнение принимает вид $t^2 + 3t + 2 = 0$. **4.28.12.** $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. ● Обозначить $t = \sin x + \cos x$, воспользоваться равенством $\sin 2x = t^2 - 1$. **4.28.13.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x_2 = 2\pi n$. **4.28.14.** $x = \frac{\pi n}{8}$. ● Дважды применив формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, привести уравнение к виду $\sin 4x\cos 8x = \sin 12x$. Далее воспользоваться равенствами $\sin 12x = \sin(8x + 4x) = \sin 8x\cos 4x + \sin 4x\cos 8x$. **4.28.15.** $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x_2 = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{3}{4} + \frac{\pi}{6} + \pi n$. ● Учитывая, что

$$\cos\left(x + \tfrac{\pi}{3}\right) = \sin\Big(\tfrac{\pi}{2} - \left(x + \tfrac{\pi}{3}\right)\Big) = \sin\left(\tfrac{\pi}{6} - x\right) = -\sin\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right) \quad \text{и}$$
$$2\cos\left(2x - \tfrac{\pi}{3}\right) + 1 = 2\Big(1 - 2\sin^2\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right)\Big) + 1 = 3 - 4\sin^2\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right),$$

привести уравнение к виду $4\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$.

4.28.16. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. □ Используя формулу $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ и обозначая $y = \operatorname{tg} x$, приведем исходное уравнение к виду $\frac{2y}{1 + y^2} + y = 2$ (по условию $\cos x \neq 0$, поэтому при применении формулы $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ ОДЗ не изменяется) или $y^3 - 2y^2 + 2y - 2 = 0$, т. е. $(y^2 + 2)(y - 1) = 0$. Отсюда $y = 1$, т. е. $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. ■

4.28.17. $45°$. ● Умножив обе части уравнения на 4, привести его к виду: $(2\cos 3x\cos x)2\cos^2 x + (2\sin 3x\sin x)2\sin^2 x = 0$. Далее воспользоваться формулами понижения степени и преобразования произведения в сумму.

4.28.18. $x_1 = \pm\frac{\pi}{7} + 2\pi n$, $x_2 = \pm\frac{3\pi}{7} + 2\pi n$, $x_3 = \pm\frac{5\pi}{7} + 2\pi n$. □ Уравнение равносильно следующему $\cos x + \cos 3x = \cos 2x + \cos\frac{\pi}{3}$ или $2\cos x + 2\cos 3x = 2\cos 2x + 1$. Домножим последнее уравнение на $\sin x$ (при этом появятся лишние корни $x = \pi n$, которые не являются корнями исходного уравнения; поэтому в дальнейшем их надо исключить из ответа): $2\sin x\cos x + 2\sin x\cos 3x = 2\sin x\cos 2x + \sin x$, то есть $\sin 2x + (\sin 4x - \sin 2x) = (\sin 3x - \sin x) + \sin x$ или $\sin 4x = \sin 3x$. Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} 4x = 3x + 2\pi n \\ x_1 = 2\pi n \end{array}\right|\begin{array}{l} 4x = -3x + 2\pi n \\ x_2 = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7}. \end{array}$$

Исключая из полученных решений множество $x = \pi n$, получим окончательно: $x_1 = \pm\frac{\pi}{7} + 2\pi n$, $x_2 = \pm\frac{3\pi}{7} + 2\pi n$, $x_3 = \pm\frac{5\pi}{7} + 2\pi n$. ■

4.28.19. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $x_3 = \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$. ● Учитывая, что $\cos x + \cos 3x = 2\cos x\cos 2x$, переписать уравнение в виде

$$\cos x(2\cos 2x + \sqrt{3}\cos x + \sin x) = 0 \quad \text{или} \quad \cos x\Big(2\cos 2x + 2\cos\big(x - \frac{\pi}{6}\big)\Big) = 0.$$

4.28.20. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$. □ Приведем уравнение к виду $2\sin 2x\sin 3x = 2\sin 2x\cos 3x + 2\sin x + 2\cos x$, после чего воспользуемся формулами преобразования произведения в сумму: $\cos x - \cos 5x = \sin 5x - \sin x + 2\sin x + 2\cos x$, откуда $(\sin 5x + \sin x) + (\cos 5x + \cos x) = 0$, т. е. $2\sin 3x\cos 2x + 2\cos 3x\cos 2x = 0$. Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \end{array}\right|\begin{array}{l} \sin 3x + \cos 3x = 0 \\ \operatorname{tg} 3x = -1 \\ x_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}. \ ■ \end{array}$$

4.28.21. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17} - 1}{4} + \pi n$. ● В силу формул

$$4\sin^2 x\sin^2 2x = 4\Big(\frac{1 - \cos 2x}{2}\Big)(1 - \cos^2 2x),$$
$$\cos 4x\cos 2x = (2\cos^2 2x - 1)\cos 2x,$$

исходное уравнение приводится к виду

$$2(1 - \cos 2x)(1 - \cos^2 2x) = (2\cos^2 2x - 1)\cos 2x \quad \text{или} \quad 2\cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0.$$

4.28.22. $x_1 = \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n$. ● Воспользоваться равенствами

$$\sin^4 x = \Big(\frac{1 - \cos 2x}{2}\Big)^2 = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \quad \text{и}$$

$$\sin^4\big(x + \frac{\pi}{4}\big) = \left(\frac{1 - \cos\big(2x + \frac{\pi}{2}\big)}{2}\right)^2 = \Big(\frac{1 + \sin 2x}{4}\Big)^2 = \frac{1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x}{4},$$

после чего привести исходное уравнение к виду $\cos 2x - \sin 2x = 1$, т. е. $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 1$. **4.28.23.** $x = 2\pi n$. ● Воспользовавшись равенствами $8\sin^6\frac{x}{2} = \left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^3 = (1-\cos x)^3 = 1 - 3\cos x + 3\cos^2 x - \cos^3 x$, привести уравнение к виду $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$. **4.28.24.** $-90°$. ● Обозначив $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и воспользовавшись формулой $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$, привести уравнение к виду $y^3 + 2y^2 + 3y + 2 = 0$ или $(y+1)(y^2+y+2) = 0$. **4.28.25.** $x = \pi n$ $(n \geqslant 1)$. ● По условию $\log_\pi(x+1) \geqslant 1$, т. е. $x \geqslant \pi - 1$. Далее преобразовать уравнение к виду $\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 2\sin x$ или $\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x - 2) = 0$. **4.28.26.** $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, $x_3 = \frac{8\pi}{3}$. **4.28.27.** $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{a} + \pi n$ при $a \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$; нет решений при $a \in (-1; 1)$. ● Воспользовавшись тождествами

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)}{\cos 2x\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)} \quad \text{и} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right),$$

привести уравнение к виду $\cos 2x = \frac{1}{a}$. **4.28.28.** $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{9-4a}{9} + \frac{\pi n}{2}$ при $a \in \left(0, \frac{9}{2}\right]$; нет решений при остальных значениях a. **4.28.29.** $x = \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)^2$.
● Исходное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{x} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. Далее учесть, что $\sqrt{x} \geqslant 0$.

4.29.1. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y = \frac{\pi}{6} - 2\pi n$. □ Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sqrt{3}, \\ y = \frac{\pi}{3} - x. \end{cases}$$

Ясно, что эта система равносильна исходной. Преобразуем первое уравнение этой системы, используя формулу $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$:
$2\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, т. е. $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$. Отсюда $x - \frac{\pi}{6} = 2\pi n$ или $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, а, значит, $y = \frac{\pi}{6} - 2\pi n$. ■

4.29.2. $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $y = -\frac{\pi}{3} + \pi(3-n)$. ● Преобразовать второе уравнение системы: $\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2y) = \frac{3}{2}$, т. е. $\cos 2x + \cos 2y = -\frac{1}{2}$, $2\cos(x+y)\cos(x-y) = -\frac{1}{2}$. **4.29.3.** $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{3} - \pi n$. **4.29.4.** $x = -3$, $y = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$. ● Обозначив $t = \sin y$, решить систему

$$\begin{cases} 3x + 4t = -11, \\ -2x + 5t = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

4.29.5. $x_1 = \frac{\pi}{6}(12n + 3m + 8)$, $y_1 = \frac{\pi}{12}(12n + 3m + 2)$; $x_2 = \frac{\pi}{6}(12n + 3m + 8)$, $y_2 = \frac{\pi}{12}(12n + 3m + 7)$. ● Складывая и вычитая почленно оба уравнения исходной системы, получить равносильную систему

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y + \cos x \sin 2y = 1, \\ \sin 2y \cos x - \cos 2y \sin x = 0{,}5 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sin(x + 2y) = 1, \\ \sin(2y - x) = 0{,}5\,, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 2y + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ 2y - x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k. \end{cases}$$

4.29.6. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(n+k)$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(n-k)$. ● Преобразуем второе уравнение системы: $\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = 3$. Отсюда с учетом первого уравнения получим $\dfrac{\frac{3}{4}}{\cos x \cos y} = 3$ или $\cos x \cos y = \frac{1}{4}$. Отсюда получим систему

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Далее как в номере 4.29.4. **4.29.7.** $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$. ● Воспользовавшись тождеством $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, заменить исходную систему равносильной

$$\begin{cases} -\cos 2x + 2\cos^2 y = \frac{1}{2}, \\ \cos 2x + 2\cos y = 1. \end{cases}$$

Далее обозначить $u = \cos 2x$, $v = \cos y$. **4.29.8.** $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.
● Исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos 2y = 0, \\ 4\sin^2 x - 3 = 0, \\ \sin x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos 2y - 3 = 0. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos 2y = 0. \end{cases}$$

4.29.9. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. ● Заменить исходную систему равносильной

$$\begin{cases} y = 3\sin x, \\ 2y^2 = 9(1 + \cos x), \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

4.29.10. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $y = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} + \pi k$. ● Из второго уравнения системы $\frac{1}{\cos^2 y} = 3 - \sin x$, откуда $\operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} - 1 = 2 - \sin x$. Подставив полученное выражение для $\operatorname{tg}^2 y$ в первое уравнение, преобразовать его к виду $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$. **4.29.11.** $x = \pm\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\pi n}{2}$, $y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$.

4.29.12. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ y = \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k$. ● Возведя первое уравнение в квадрат, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = \cos^2 x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x, \\ \cos x \geqslant 0. \end{cases}$$

Далее, сложив оба уравнения последней системы, найти $\sin x$.

4.30.1. $x = -\frac{\pi}{2} + \pi n,\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ z = \frac{\pi m}{3}$. □ Поскольку $0 < \cos^2 3z \leqslant 1$, то $\frac{13}{\cos^2 3z} \geqslant 13$, откуда $12 + \frac{13}{\cos^2 3z} \geqslant 25$. С другой стороны, так как $|\cos 2x| \leqslant 1$, $|\sin y| \leqslant 1$, то $4 - \cos 2x \leqslant 5$, $2 + 3\sin y \leqslant 5$, т. е. $(4 - \cos 2x)(2 + 3\sin y) \leqslant$ $\leqslant 5 \cdot 5 = 25$. Таким образом, равенство в исходном уравнении возможно тогда и только тогда, когда обе его части равны 25, т. е. уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin y = 1, \\ \cos 2x = -1, \\ \cos 3z = \pm 1. \end{cases}$$

Отсюда $x = -\frac{\pi}{2} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $z = \frac{\pi m}{3}$.

4.30.2. $x_1 = 1$, $y_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x_2 = -1$, $y_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. I способ. □ Пусть $\sin(xy) = a$, тогда исходное уравнение превратится в квадратное относительно x с параметром a: $x^2 + 2ax + 1 = 0$. Отсюда $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$, причем решения существуют тогда и только тогда, когда $D \geqslant 0$, т. е. $D = a^2 - 1 = \sin^2(xy) - 1 =$ $= -\cos^2(xy) = 0$. Но это возможно лишь в случае, когда $\cos(xy) = 0$ (при этом $x = -a = -\sin(xy)$). Таким образом, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x = -\sin(xy), \\ \cos(xy) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $\sin(xy) = \pm 1$, т. е. $x = \mp 1$. Тогда из первого уравнения системы получим $\sin(\pm y) = \pm 1$ или $y = \pm\frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$. Отсюда окончательно

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \ \blacksquare \end{cases}$$

II способ. □ Так как $|\sin(xy)| \leqslant 1$, то $2x\sin(xy) \geqslant -2|x|$, т. е.

$$x^2 + 2x\sin(xy) + 1 \geqslant |x|^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2 \geqslant 0.$$

Поэтому

$$x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x\sin(xy) = -2|x|, \\ |x| = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\left\{\begin{array}{l} x=1, \\ \sin y=-1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=-1, \\ \sin y=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=1, \\ y_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi n \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x_2=-1, \\ y_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n. \end{array}\right. \blacksquare$$

4.30.3. 90°. ● Перепишем уравнение в виде $(\cos 4x-\cos 2x)^2-\sin 3x=5$. Так как $|\cos 4x|\leqslant 1$, $|\cos 2x|\leqslant 1$, то $|\cos 4x-\cos 2x|\leqslant|\cos 4x|+|\cos 2x|\leqslant 2$, т. е. $(\cos 4x-\cos 2x)^2\leqslant 4$. Аналогично, $|\sin 3x|\leqslant 1$, поэтому $(\cos 4x-\cos 2x)^2-\sin 3x\leqslant 5$, поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} \cos 4x=1, \\ \cos 2x=-1, \\ \sin 3x=-1. \end{array}\right.$$

4.30.4. $x=0$. □ Преобразуем уравнение к виду: $10\sin x\cos x-6\sin x\sin 3x+\sin x=0$, откуда либо $\sin x=0$, либо $10\cos x-6\sin 3x+1=0$. Тогда:

1) $\sin x=0$, $x=\pi n$. С учетом ограничения $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$ имеем $x=0$.

2) $10\cos x-6\sin 3x+1=0\implies 10\cos x+1=6\sin 3x$. Очевидно, что $6\sin 3x\leqslant 6$. С другой стороны, на отрезке $[0,\frac{\pi}{3}]$ выполнено $\cos x\geqslant\frac{1}{2}$, т. е. $10\cos x+1\geqslant 10\cdot\frac{1}{2}+1=6$. Таким образом, равенство в уравнении возможно тогда и только тогда, когда

$$\left\{\begin{array}{l} \sin 3x=1, \\ \cos x=\frac{1}{2}, \end{array}\right. \quad \text{т. е.} \quad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, \\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m. \end{array}\right.$$

Множества $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\right\}$ и $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m\right\}$ не пересекаются ни при каких целых m и n, поэтому уравнение $10\cos x-6\sin 3x+1=0$ решений не имеет. Окончательно, $x=0$. ■

4.30.5. $x=5$. □ Поскольку нам не надо искать все корни, то в подобном «накрученном» уравнении естественнее всего подбирать решения в «крайних» случаях, когда либо основания степеней равны 1 ($1^a=1^b$), либо, когда показатели степени равны 0 ($a^0=b^0$). Рассмотрим оба случая:

$$1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \log_2\left(2-\frac{x}{\pi}\right)=0, \\ \arccos\frac{\pi}{x}=0. \end{array}\right.$$

Из 1-го уравнения $2-\frac{x}{\pi}=1$, т. е. $x=\pi$. Это значение удовлетворяет и второму уравнению системы (т. к. $\arccos\frac{\pi}{\pi}=\arccos 1=0$), но не входит в ОДЗ исходного уравнения, поскольку, в частности, должно быть $x^3-6x^2+5x+1>0$, а $\pi^3-6\pi^2+5\pi+1<0$.

$$2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left|\sin\frac{\pi x}{2}-2\right|=1, \\ x^3-6x^2+5x+1=1 \end{array}\right. \quad\text{или}\quad \left\{\begin{array}{l} \sin\frac{\pi x}{2}=1, \\ x(x^2-6x+5)=0. \end{array}\right.$$

Из 2-го уравнения находим: $x(x-1)(x-5)=0$, т.е. $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=5$. Значения $x_1=0$ и $x_2=1$ не входят в ОДЗ исходного уравнения (не определен $\arccos\frac{\pi}{x}$), а корень $x=5$ подходит, в чем мы убеждаемся непосредственной проверкой. Итак, $x=5$. ■

4.30.6. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. □ Воспользуемся тождеством $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$, тогда уравнение примет вид: $\dfrac{(1+\cos 2x)^2}{4}=\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{4}(1+\cos 2x)\cos 8x$ или $\cos^2 2x=-(\cos 2x+1)+(1+\cos 2x)\cos 8x$, т. е. $\cos^2 2x=(1+\cos 2x)(\cos 8x-1)$. Поскольку $\cos^2 2x\geqslant 0$, а $(1+\cos 2x)(\cos 8x-1)\leqslant 0$, то последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 2x=0,\\ \cos 8x=1\end{cases}\quad \text{или системе}\quad \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\\ x=\frac{\pi m}{4}.\end{cases}$$

Так как множество $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right\}$ содержится в множестве $\left\{\frac{\pi m}{4}\right\}$, то окончательный ответ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. ■

4.30.7. $x=\pi+2\pi n$.

4.30.8. $x_1=-\frac{\pi}{12}$, $x_2=2\pi-\frac{\pi}{12}$. □ Умножив уравнение на $\sqrt{2}$, преобразуем его к виду $2+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}(\cos 3x-\sin 3x)$ или $2+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$. Так как $2+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\geqslant 2$, а $2\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 2$, то последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0,\\ \cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}x+\frac{\pi}{12}=\pi n,\\ x+\frac{\pi}{12}=\frac{2\pi m}{3}.\end{cases}$$

Пересечением множеств $\{\pi n\}$ и $\left\{\frac{2\pi m}{3}\right\}$ является множество $\{2\pi k\}$, поэтому $x+\frac{\pi}{12}=2\pi k$, т.е. $x=-\frac{\pi}{12}+2\pi k$. Учитывая ограничение $|x|\leqslant 2\pi$, имеем $x_1=-\frac{\pi}{12}$, $x_2=2\pi-\frac{\pi}{12}$. ■

4.30.9. $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$. □ Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin x-\sqrt{\sin x}=\cos x-\sqrt{\cos x},\\ \cos x-\sqrt{\cos x}\neq 0\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}\sin x-\cos x=\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x},\\ \sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-1)\neq 0,\end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases}(\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x})(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x})=\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x},\\ \cos x\neq 0,\quad \cos x\neq 1.\end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}=0,\\ \cos x\neq 0,\quad \cos x\neq 1\end{cases}\quad\Bigg|\quad \begin{cases}\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}=1,\\ \cos x\neq 0,\quad \cos x\neq 1.\end{cases}$$

Решим каждую из систем.

1) $\begin{cases} \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x} = 0, \\ \cos x \neq 0, \ \cos x \neq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\operatorname{tg} x} = 1, \\ \cos x \geqslant 0, \ \cos x \neq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \cos x \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

2) Так как $\sqrt{\sin x} \geqslant \sin^2 x$ и $\sqrt{\cos x} \geqslant \cos^2 x$, то $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \geqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Таким образом,

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\sin x} = \sin^2 x, \\ \sqrt{\cos x} = \cos^2 x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sin^4 x, \\ \cos x = \cos^4 x. \end{cases}$$

Но $\cos x = \cos^4 x \Longleftrightarrow \cos x = 0$ или $\cos x = 1$, что противоречит ОДЗ. Поэтому в этом случае нет решений.

Окончательный ответ $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. ■

4.30.10. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. ● Переписать уравнение в виде

$$2(\cos 5x - \sqrt{3}\sin 5x) + (\cos 24x \cos x + \sqrt{3}\sin x) = 6$$

или $4\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + (\cos 24x \cos x + \sqrt{3}\sin x) = 6$. Далее, учитывая, что

$$4\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 4 \quad \text{и} \quad |\cos 24x| \leqslant 1,$$

показать, что $|\cos 24x \cos x + \sqrt{3}\sin x| \leqslant 2\left|\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right| \leqslant 2$ и, значит, левая часть уравнения меньше или равна 6.

4.30.11. $x = \pm 1$. □ Подбором легко находятся корни $x = \pm 1$. Покажем, что других корней нет. Для этого найдем сначала ОДЗ из условия $-1 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1$, т. е. $|x| \geqslant 1$. Далее, найдем производную функции $f(x) = \arccos \frac{1}{x^2} - \frac{\pi}{2}(1 - x^4)$:

$f'(x) = \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}} + 2\pi x^3 = \frac{2(1 + \pi x^4 \cdot \sqrt{x^4 - 1})}{x\sqrt{x^4-1}}$. Ясно, что $f(x)$ возрастает $\Longleftrightarrow$ $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x\sqrt{x^4-1} > 0 \Longleftrightarrow x > 1$. Отсюда и из того, что $f(1) = 0$ следует, что при $x \geqslant 1$ уравнение имеет единственное решение $x = 1$. Аналогично показывается, что при $x \leqslant -1$ также существует лишь один корень $x = -1$. ■

4.30.12. $x = \pm 1$. **4.30.13.** $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. ● ОДЗ уравнения определяется системой

$$\begin{cases} \sin 2x \geqslant 0, \\ \cos x - \sin x - 1 \geqslant 0, \end{cases}$$

при этом, если $\sin 2x = 2\sin x \cos x > 0$, то $\sin x$ и $\cos x$ имеют одинаковые знаки и, значит, $\cos x - \sin x < 1$ (т. к. либо $\cos x < 1 + \sin x$, либо $-\sin x < 1 - \cos x$), т. е. не удовлетворяется второе неравенство из ОДЗ. Поэтому ОДЗ определяется условием $\sin x \cos x = 0$. Далее рассмотреть случаи $\sin x = 0$ и $\cos x = 0$. **4.30.14.** $x_1 = -2$, $y_1 = 128$, $z_1 = -127{,}5$; $x_2 = 2$, $y_2 = -128$, $z_2 = 127{,}5$. ● Поскольку $|\sin \pi z| \leqslant 1$, то $4x \sin \pi z \geqslant -4|x|$, откуда

$$4 + x^2 + 4x \sin \pi z \geqslant x^2 - 4|x| + 4 = (|x| - 2)^2.$$

Поэтому $4 + x^2 + 4x\sin\pi z \geqslant 0$ для всех x и z. Далее, $128 - 2y^2 - 2yz \geqslant 0$ (как подкоренное выражение), т.е. $2yz \leqslant 128 - 2y^2 \leqslant 128$, откуда $yz \leqslant 64 < 82$, а, значит, $yz - 82 < 0$. Таким образом, правая часть уравнения меньше или равна нуля, а левая часть — больше или равна нуля. Поэтому равенство возможно лишь в случае, когда обе части равны нулю, т. е. исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2\pi z + \cos\pi y = 0, \\ 128 - 2y^2 - 2yz = 0, \\ x^2 + 4x\sin\pi z + 4 = 0. \end{cases}$$

Далее рассмотреть два возможных случая, вытекающих из 3-го уравнения системы:

$$\begin{cases} \sin\pi z = 1, \\ x = -2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin\pi z = -1, \\ x = 2 \end{cases}$$

4.30.15. $x_1 = 1$, $y_1 = 256\frac{1}{2}$, $z_1 = 128$; $x_2 = -1$, $y_2 = -256\frac{1}{2}$, $z_2 = -128$. **4.30.16.** $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$. ● Обозначив $a = \sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}$, переписать уравнение в виде $a\sin(\pi x) - \cos(\pi x) = 2$ или

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\sin(\pi x) - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cos(\pi x) = \frac{2}{\sqrt{a^2+1}},$$

т. е. $\sin(\pi x - \varphi) = \frac{2}{\sqrt{a^2+1}}$, где $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{a^2+1}}$. Последнее уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $\frac{2}{\sqrt{a^2+1}} \leqslant 1$ или (т.к. $a \geqslant 0$) $a \geqslant \sqrt{3}$. Но $\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}} \geqslant \sqrt{3} \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\frac{3\pi x}{2} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{2n}{3}$. Далее подставить $x = \frac{2n}{3}$ в исходное уравнение. **4.30.17.** $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$. ● Преобразовать уравнение к виду $1 - 6\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \left|-\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right|$, после чего возвести в квадрат, получив равносильную систему

$$\begin{cases} \left(1 - 6\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \\ 1 - 6\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{12}{17}\right) = 0, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \frac{1}{6}. \end{cases}$$

4.30.18. $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. ● Учитывая ОДЗ

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \neq 0,$$

преобразовать уравнение к виду

$$\cos 3x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos x\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\text{или} \quad \cos 3x\left(\cos\frac{\pi}{3} + \cos 2x\right) = -\cos x\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x\right),$$

т. е. $\cos 3x + 2\cos 3x \cos 2x = 2\cos 2x \cos x - \cos x$, $\cos 5x + \cos x = 0$.
4.30.19. $x = \pm\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. ● Воспользоваться равенствами

$$\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x \cos^4 x = \\ = \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x.$$

4.30.20. $\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi$. <u>I способ.</u> ● Возвести уравнение в квадрат, учитывая, что $\sin x + \sqrt{3}\cos x \leqslant 0$, т. е. (так как $\sin x \geqslant 0$ на $[0, \pi]$) $\sin x = 0$ или $\operatorname{ctg} x \leqslant -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
<u>II способ.</u> ● $1 + 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = (\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2$, поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x = -|\sin x + \sqrt{3}\cos x|, \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Далее учесть, что $y = -|y| \iff y \leqslant 0$. **4.30.21.** $\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.
4.30.22. $x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n = 0, -2, -3, -4, \ldots$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k = 0, -1, -2, \ldots$
● Преобразовать уравнение к виду $2\sin 2x \cos x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0$ или $\sin 3x + \sin x - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$. Далее учесть, что

$$\sin x - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

после чего преобразовать последнее уравнение к равносильному уравнению $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$. **4.30.23.** $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. ● Обозначить $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$. Тогда, так как

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - 2 = y^2 - 2 \quad \text{и}$$
$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^3 - 3\operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg} x - 3\operatorname{tg} x \operatorname{ctg}^2 x = \\ = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^3 - 3\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = y^3 - 3y,$$

то исходное уравнение примет вид $y^3 + y^2 - 3y - 6 = 0$ или $(y-2)(y^2+3y+3) = 0$.
4.30.24. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. ● $\cos 0{,}9\pi < 0$, $\cos 0{,}1\pi > 0$, поэтому $\cos 0{,}9\pi - \cos 0{,}1\pi < 0$ и, значит, $(\cos 0{,}9\pi - \cos 0{,}1\pi)\cos x \geqslant 0 \iff \cos x \leqslant 0$. Таким образом, область определения функции, заданной в условии, определяется из неравенства $\cos x \leqslant 0$. Далее, учитывая, что

$$-\cos 2x + 3 + 4\sin x = -(1 - 2\sin^2 x) + 3 + 4\sin x = 2\sin^2 x + 4\sin x + 2 = 2(\sin x + 1)^2,$$

преобразовать уравнение к виду $\sin^4 2x + 2(\sin x + 1)^2 + \operatorname{ctg}^2 3x + (-\cos^3 x) = 0$ и заметить, что все слагаемые в левой части полученного уравнения неотрицательны ($-\cos^3 x \geqslant 0$, т. к. $\cos x \leqslant 0$). **4.30.25.** $9\frac{1}{20}$, $9\frac{9}{20}$, $9\frac{1}{2}$, $9\frac{13}{20}$, $9\frac{17}{20}$.
● Применив формулы понижения степени, привести уравнение к виду

$$2\sin(2\pi x) = \cos(8\pi x) - \cos(12\pi x), \quad \text{т. е.} \quad \sin(2\pi x) = \sin(2\pi x)\sin(10\pi x).$$

4.30.26. $x = -\frac{3\pi}{2}$. ● Воспользоваться равенством

$$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x - 2 = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin 4x - 2$$

и неравенством $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin 4x \leqslant 2$.

4.30.27. $x = 1$, $y = -\frac{\pi}{2}$. □ Рассмотрим первое уравнение системы. Поскольку $|\sin y| \leqslant 1$, то $2x\sin y \geqslant -2|x|$, откуда $x^2 + 2x\sin y + 1 \geqslant |x|^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2 \geqslant 0$. Поэтому уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $\sin y = \pm 1$, $x = -\sin y$, а исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = -\sin y, \\ 8y(y^2 + 1) + \pi^3 + 4\pi = 0. \end{cases}$$

Из 3-го уравнения полученной системы имеем $y = -\frac{\pi^3 + 4\pi}{8(y^2 + 1)} < 0$. Заметим, что если $y \leqslant -\pi$, то, учитывая неравенства $3 < \pi < 4$, получим

$$y \geqslant -\frac{\pi^3 + 4\pi}{8(\pi^2 + 1)} > -\frac{4^3 + 4^2}{8(3^2 + 1)} = -1 > -\pi.$$

Полученное противоречие означает, что $-\pi < y < 0$, откуда, поскольку $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$, вытекает, что $y = -\frac{\pi}{2}$. Отсюда $x = 1$ и пара $\left\{1, -\frac{\pi}{2}\right\}$ является решением. ■

4.30.28. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $y_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi(n + 2k)$. ● Уравнение $2 - \sin 2y + \sin y = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2y = 1, \\ \sin y = -1 \end{cases}$$

и поэтому не имеет решений. Отсюда следует, что исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} (\cos y + \sin x - 1)\left(\operatorname{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}^2\left(y + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 0, \\ \sin x - \cos y = 0. \end{cases}$$

4.30.29. $x_1 = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n$, $y_1 = \pm\arccos\frac{\sqrt{15}}{10} + 2\pi m$; $x_2 = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n$, $y_2 = \pm\arccos\frac{\sqrt{15}}{10} + \pi(2m + 1)$. ● Возведя 2-е уравнение в квадрат, получим $\cos^2 y = -\frac{\cos^2 x}{3\sin x}$ (проверьте, что $\sin x \neq 0$), а из 1-го уравнения получим $\cos^2 y = \frac{17\cos 2x + 21\sin x - 7}{42\sin x}$. Приравняв полученные выражения для $\cos^2 y$, получить уравнение $20\sin^2 x - 21\sin x + 4 = 0$. **4.30.30.** $x = \pi + 4\pi n$, $y = 2\pi k$ при $a = -1$ или $a = 3$. ● Поскольку $3\sin\frac{x}{2} \leqslant 3$, $\cos y \leqslant 1$, то второе уравнение системы равносильно системе

$$\begin{cases} x = \pi + 4\pi n, \\ y = 2\pi k. \end{cases}$$

4.30.31. $x_1 = 4$, $y_1 = -3$; $x_2 = 4$, $y_2 = -5$; $x_3 = 0$, $y_3 = 1$; $x_4 = 0$, $y_4 = -1$. ● Второе уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin(\pi x) = 0, \\ \sin(\pi y) = 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x = n, \\ y = k. \end{cases}$$

Далее преобразовать первое уравнение к виду $(x+y)^2 = 2 - \frac{1}{4}(x-2)^2$, откуда $(x+y)^2 \leqslant 2$, $(x-2)^2 \leqslant 4$. **4.30.32.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$. ● Возведя второе уравнение в квадрат, получить равносильную систему

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ (1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 y) = \dfrac{9}{16}, \\ \sin x \sin y > 0. \end{cases}$$

5. Показательные и логарифмические уравнения

5.1.1. $x = -1$. □ Преобразуем уравнение к виду $7 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 5^{x+1} = 7 \cdot 3^{x+1} - 25 \cdot 5^{x+1}$. Поделив обе части полученного уравнения на $3^{x+1} \neq 0$ и обозначив $y = \left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}$, *получим:* $7 - 5y = 27 - 25y$, т. е. $y = 1$. *Отсюда* $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} = 1$ или $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{0}$. В силу монотонности функции $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}$ последнее уравнение равносильно уравнению $x + 1 = 0$, откуда $x = -1$. ■
5.1.2. $x = 0$. ● Учитывая, что $5^{2x} = 25^x$, привести уравнение к виду $7^x = 25^x$. **5.1.3.** $x = 1{,}5$. **5.1.4.** $x = 1{,}5$. ● Привести уравнение к виду $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8}{3\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$. **5.1.5.** $x = 0{,}5$. **5.1.6.** $x = -2$. ● Воспользоваться равенством $0{,}25^{-(1+0{,}5x)} = 2^{x+2}$. **5.1.7.** $x = 0$. ● Воспользоваться равенствами $3^{3x} = 27^x$ и $5^{2x} = 25^x$. **5.1.8.** $x = 0$. **5.1.9.** -3. ● Преобразовав уравнение к виду $\frac{1}{2} \cdot 2^{x^2} - 3^{x^2} = \frac{1}{3} \cdot 3^{x^2} - 4 \cdot 2^{x^2}$, поделить на $2^{x^2} \neq 0$ и обозначить $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}$.

5.2.1. $x = 6$. □ Перейдем в обеих частях уравнения к одному основанию 2: $(2^3)^{\frac{2x-2}{x}} = \left(2^{2(x-1)}\right)^{\frac{1}{2}}$ или $2^{\frac{6(x-1)}{x}} = 2^{x-1}$. Полученное уравнение равносильно уравнению $\dfrac{6(x-1)}{x} = x - 1$, которое распадается на два уравнения:

$$\begin{array}{l|l} x - 1 = 0 & \dfrac{6}{x} = 1 \\ x_1 = 1 & x_2 = 6. \end{array}$$

Больший корень $x = 6$. ■
5.2.2. $x = 3$. **5.2.3.** $x = 10$ ● Перейти к основанию 2. **5.2.4.** $x = \frac{1}{2}$. **5.2.5.** $x = \pm\sqrt{3}$. **5.2.6.** $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. **5.2.7.** $x = 6$. **5.2.8.** $x = \frac{1}{2}$. **5.2.9.** $x = 6$. **5.2.10.** $x = -3$. **5.2.11.** $x = 2$. ● Учитывая, что $\dfrac{\lg 4}{\lg 8} = \log_8 4 = \dfrac{2}{3}$, привести

уравнение к виду $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$. **5.2.12.** $x = -\frac{15}{16}$. ● Воспользоваться тем, что $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$.

5.2.13. $x = 4$. □ $6^{2x+4} = (3\cdot 2)^{2x+4} = 3^{2x+4}\cdot 2^{2x+4}$, поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $3^{2x+4}\cdot 2^{2x+4} = 3^{3x}\cdot 2^{x+8}$ или $2^{x-4} = 3^{x-4}$. Отсюда $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-4} = 1$, т. е. $x - 4 = 0$, $x = 4$. ■

5.2.14. $x = -1$. ● Представить правую часть уравнения в виде 12^{3x}. **5.2.15.** $x = 1$. **5.2.16.** $x = 3$.

5.2.17. $x = \frac{70}{9}$. □ Поскольку $\sqrt[5]{27} = (3^3)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{3}{5}}$, а $\left(\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{x}}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3}\right) = \frac{x^2}{16} - \frac{x}{9}$, то исходное уравнение равносильно следующему $3^{\frac{3}{5}\left(\frac{x^2}{16} - \frac{x}{9}\right)} = 3^{\frac{7}{4}}$, т. е. $\frac{3(9x^2 - 16x)}{5\cdot 16\cdot 9} = \frac{7}{4}$. Отсюда $9x^2 - 16x - 420 = 0$ и $x_1 = \frac{70}{9}$, $x_2 = -6$. На ОДЗ $x \geqslant 0$, поэтому значение x_2 не подходит и окончательный ответ $x = \frac{70}{9}$. ■

5.2.18. $x = 9$. ● На области допустимых значений ($x > 0$, $\sqrt{x} - 1 = 1, 2, 3, \ldots$) исходное уравнение равносильно уравнению $2^{1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}} = 2^{\frac{4}{\sqrt{x}-1}}$. Далее обозначить $y = \sqrt{x}$. **5.2.19.** $x = 4$. ● Найденные решения уравнения ($x_1 = 3$ и $x_2 = 4$) подставить в левую часть неравенства.

5.3.1. $x = 1$. □ Преобразовав уравнение к виду

$$2\cdot 3\cdot 3^x - 6\cdot\frac{1}{3}\cdot 3^x - 3^x = 9 \quad \text{или} \quad 3^x(6 - 2 - 1) = 9, \quad 3^x\cdot 3 = 9,$$

получим равносильное уравнение $3^x = 3$, откуда $x = 1$.■

5.3.2. $x = 9$. **5.3.3.** $x = 1$. **5.3.4.** $x = \log_3\frac{9}{2}$. **5.3.5.** $x = -\log_2 9$. **5.3.6.** $x = 3$. **5.3.7.** $x = 0$. **5.3.8.** $x = 0$. ● Сделав замену $y = 4^{x-2}$, привести уравнение к виду $4y + 11y = \frac{15}{16}$. **5.3.9.** $x = 1$. **5.3.10.** $x = 2$. **5.3.11.** $x = 3$. ● Обозначить $y = 3^{2x-4}$. **5.3.12.** $x = 0{,}5$. ● Умножив обе части уравнения на $3^x \neq 0$, получить равносильное уравнение $9^x + 240 = 81\cdot 9^x$ или $9^x = 3$. **5.3.13.** $x = -1$. ● Привести уравнение к виду $\frac{2}{3}\cdot 6^x + \frac{1}{2}\cdot 6^x = \frac{7}{36}$, т. е. $6^x = \frac{1}{6}$. **5.3.14.** $x = -2$. **5.3.15.** $x = 3$. ● Воспользоваться равенствами $3^{2x} = \frac{1}{27}\cdot 9^x$ и $27^{\frac{2x}{3}} = 9^x$. **5.3.16.** $x = 100$. ● Учесть, что $(10^{\lg 5})^{\lg x} = 5^{\lg x}$. **5.3.17.** $x = 2$. ● Преобразовать уравнение к виду

$$\frac{1}{2}\cdot 4^x + \frac{1}{4}\cdot 4^x + 4\cdot 4^x = 4^{-\frac{3}{2}}\cdot 4^x + 74 \quad \text{или} \quad 4^x = 16.$$

5.4.1. $x = 1$. □ Преобразовав уравнение к виду $2\cdot 2^{2x} + 4\cdot 2^x - 16 = 0$, обозначим $y = 2^x$. Тогда, поскольку $2^{2x} = (2^x)^2 = y^2$, получим квадратное уравнение относительно y: $2y^2 + 4y - 16 = 0$ или $y^2 + 2y - 8 = 0$. Отсюда $y_1 = -4$, $y_2 = 2$. Так как $y > 0$, то подходит лишь корень $y = 2$. Таким образом $2^x = 2^1$ и, значит, $x = 1$. ■

5.4.2. $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 1{,}5$. ● Учесть, что $4^x = (2^x)^2$. **5.4.3.** $x = 3$. **5.4.4.** $x = 4$. **5.4.5.** $x = 3$. **5.4.6.** $x = 3$. **5.4.7.** $x = 2$. **5.4.8.** $x = 0$. **5.4.9.** $x = 2$. **5.4.10.**

$x = -1$. **5.4.11.** $x = 0$. ● Обозначить $y = 7^{3x}$. **5.4.12.** $x = -2$. ● Приведя уравнение к виду $2^{-2x} - 2 \cdot 2^{-x} = 8$, сделать замену $y = 2^{-x}$. **5.4.13.** $x = -2$. ● Сделать замену $y = 5^{\frac{1}{x}}$. **5.4.14.** $x = 1$. ● Обозначив $y = 4^{\frac{1}{x}}$, привести уравнение к виду $y^2 - 5y + 4 = 0$. **5.4.15.** $x = 1$. ● Обозначить $y = 2^{x+\frac{1}{x}}$. **5.4.16.** $x = 1$. ● Обозначить $y = 2^{\sqrt{x}}$. **5.4.17.** $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. ● Умножив обе части уравнения на $2^x + 1 \neq 0$, привести его к виду $2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$. Далее сделать замену $y = 2^x$.

5.5.1. $x = 1$. □ Преобразуем уравнение к виду $3^x + \dfrac{27}{3^x} - 12 = 0$. Обозначив $y = 3^x$, получим уравнение $y + \dfrac{27}{y} - 12 = 0$ или $y^2 - 12y + 27 = 0$. Отсюда $y_1 = 3$, $y_2 = 9$ и, стало быть, $3^x = 3$, т. е. $x_1 = 1$, и $3^x = 9$, т. е. $x_2 = 2$. Меньший корень $x = 1$. ■

5.5.2. 2. **5.5.3.** $x = 0$. **5.5.4.** $x = 2$. **5.5.5.** $x = 2$. **5.5.6.** $x = 1$. ● Учесть, что $3^{\log_3 2} = 2$. **5.5.7.** $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. ● Воспользоваться равенством $(0{,}2)^{x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = 5^{-x+2}$. **5.5.8.** $x = 3$. ● Приведя уравнение к виду $2^x + 10 = 36 \cdot 2^{2-x}$, обозначить $y = 2^x$. **5.5.9.** $x = 3$. **5.5.10.** $x = -2$. **5.5.11.** $x = \pm 2$. ● Обозначить $y = 2^{x^2}$. **5.5.12.** $x = 1$. ● Сделать замену $y = 2^{\sqrt{x}}$. **5.5.13.** $x = 4$. **5.5.14.** $x = 1$. ● Обозначив $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, привести уравнение к виду $\dfrac{5}{y} + 3 = 2y$ или $2y^2 - 3y - 5 = 0$.

5.6.1. $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. □ $2^{x \cdot \log_2 7} = 2^{\log_2 7^x} = 7^x$, поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $7^x \cdot 7^{x^2+x} = 1$ или $7^{x^2+2x} = 7^0$. Отсюда $x^2 + 2x = 0$, т. е. $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. ■

5.6.2. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. **5.6.3.** $x = \dfrac{1}{2}$. ● Возведя обе части уравнения в квадрат, получить равносильное уравнение $3^{\frac{1}{x}} = 9$. **5.6.4.** $x = 2$. ● Преобразовав исходное уравнение к виду $3^{2x+2} + 3^{4x-2} = 54 \cdot 3^{3x-3}$, сократить полученное уравнение на $3^{2x} \neq 0$. Далее сделать замену $y = 3^x$. **5.6.5.** $x = \sqrt{2} \pm 1$. ● Поделив обе части на $2^x \neq 0$, получить квадратное уравнение $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$. **5.6.6.** Нет решений. ● На области допустимых значений ($x = 2, 3, 4, \ldots$) уравнение равносильно следующему $5^{\frac{1}{15}} = 225$. **5.6.7.** $x = 3$. ● Привести уравнение к виду $3^x \cdot 2^x = 54 \cdot 4$, т. е. $6^x = 216$. **5.6.8.** $x = 2$.

5.7.1. $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = 2$. □ Первое уравнение системы равносильно уравнению $y + x = 5$. Подставляя $y = 5 - x$ во второе уравнение, получим $2^x + 2^{5-x} = 12$ или $2^x + \dfrac{32}{2^x} = 12$, откуда $(2^x)^2 - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$, т. е.

$$2^x = 4 \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{array}\right. \qquad\Bigg|\qquad 2^x = 8 \quad \left[\begin{array}{l} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{array}\right. \quad ■$$

5.7.2. $x_1 = 18$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 18$. ● Приводя второе уравнение системы к виду $2^{\frac{x+y}{2}} = 2^{10}$, т. е. $x + y = 20$, выразить y через x и подставить в первое уравнение. **5.7.3.** $x = \log_2 \dfrac{2}{3}$, $y = \dfrac{1}{6}$. ● Из первого уравнения системы $2^x = 1 - 2y$. Подставляя во второе уравнение, получить квадратное уравнение относительно y. **5.7.4.** $x_1 = -1$, $y_1 = \dfrac{23}{2}$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$. **5.7.5.** $x = \log_7 5$, $y = 1$.

● Обозначив $u = 7^x$, $v = 3^y$, привести исходную систему к виду $\begin{cases} 3u - v = 12, \\ u \cdot v = 15. \end{cases}$

5.7.6. $x = 2$, $y = 2$. **5.7.7.** $x = 0$, $y = 0$. ● Заменить исходную систему равносильной системой

$$\begin{cases} \dfrac{2 \cdot 4^x + 1 - 2^{3x} - 2 \cdot 4^x}{2^x + 2} = \dfrac{y}{2(2^x + 2)}, \\ y^2 = 4(1 - 2^{3x}), \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} y = 2(1 - 2^{3x}), \\ y^2 = 4(1 - 2^{3x}), \end{cases}$$

откуда $y^2 = 2y$.

5.8.1. $x = \frac{1}{2}$. □ Поделив обе части уравнения на $16^x \neq 0$, получим равносильное уравнение $3 + \left(\frac{36}{16}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{81}{16}\right)^x$ или $3 + \left(\frac{9}{4}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x}$. Обозначим $y = \left(\frac{9}{4}\right)^x$, тогда $2y^2 - y - 3 = 0$, откуда $y_{1,2} = \dfrac{1 \pm 5}{4}$ т. е.

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{3}{2} \\ \left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right| \begin{array}{l} y_2 = -1 \\ \left(\frac{9}{4}\right)^x = -1 \\ \text{нет решений, т. к. } \left(\frac{9}{4}\right)^x > 0. \ \blacksquare \end{array}$$

5.8.2. $x = 0$. ● Поделив обе части уравнения на 25^x, сделать замену $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$. **5.8.3.** $x_1 = \log_{\frac{2}{5}} 2$, $x_2 = -\log_{\frac{2}{5}} 3$. **5.8.4.** 0,5. **5.8.5.** $x = 0$. **5.8.6.** $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. **5.8.7.** $x = 1$. **5.8.8.** $x = 1$. **5.8.9.** $x = -2$. **5.8.10.** $x = 2$. **5.8.11.** $x = 1$. **5.8.12.** $x = -1$. ● Заметив, что $9^{\frac{1}{x}} = \left(3^{\frac{1}{x}}\right)^2$, $4^{\frac{1}{x}} = \left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2$, $6^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^{\frac{1}{x}}$, поделить обе части уравнения на $\left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2$. Далее сделать замену $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$. **5.8.13.** $x = \pm\frac{1}{2}$. ● Поделив обе части уравнения на $16^{|x|}$, сделать замену $y = \left(\frac{9}{4}\right)^{|x|}$. **5.8.14.** Нет решений. ● Поделив обе части уравнения на $25^{\cos x}$, получить квадратное уравнение относительно $y = \left(\frac{4}{5}\right)^{\cos x}$. **5.8.15.** $x = \frac{1}{100}$. ● Преобразовав уравнение к виду $4 \cdot 2^{2\lg x} - 2^{\lg x} \cdot 3^{\lg x} - 18 \cdot 3^{2\lg x} = 0$, поделить полученное уравнение на $3^{2\lg x}$. Далее сделать замену $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x}$. **5.8.16.** 0. ● Преобразовав уравнение к виду $\left(2 \cdot 3^x + 5^x\right) \cdot \left(3 \cdot 3^x + 2 \cdot 5^x\right) = 15^{x+1}$, поделить обе части полученного уравнения на $(3^x)^2$:

$$\left(2 + \left(\frac{5}{3}\right)^x\right) \cdot \left(3 + 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x\right) = 15 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x.$$

Далее обозначить $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$.

5.9.1. $x = 1{,}4$. □ Исходное уравнение равносильно уравнению $5^{|4x-6|} = 5^{2(3x-4)}$, откуда $|4x - 6| = 2(3x - 4)$, т. е. $|2x - 3| = 3x - 4$. Для решения последнего уравнения рассмотрим два случая:

1) Пусть $x \geqslant \frac{3}{2}$, тогда $|2x-3| = 2x-3$ и уравнение принимает вид $2x-3 = 3x-4$, откуда $x = 1$. Поскольку $1 < \frac{3}{2}$, то найденное значение x не является корнем уравнения.

2) Пусть $x < \frac{3}{2}$, тогда $|2x-3| = 3-2x$ и, значит, $3-2x = 3x-4$, т.е. $x = 1{,}4$. Найденное значение x удовлетворяет неравенству $x < \frac{3}{2}$. Таким образом, окончательно, $x = 1{,}4$. ■

5.9.2. $x = 0{,}6$. **5.9.3.** $x = 0{,}25$. **5.9.4.** $x = 0{,}8$. **5.9.5.** г). **5.9.6.** $(-\infty; 1]$. ● Преобразовать уравнение к виду $2^{|3x-5|} = 2^{2+3|x-1|}$, откуда $3 \cdot |x - \frac{5}{3}| = 2 + 3|x-1|$. Далее рассмотреть три случая: 1) $x \geqslant \frac{5}{3}$; 2) $1 \leqslant x < \frac{5}{3}$; 3) $x < 1$.

5.9.7. $x_1 = -6$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. □ Поскольку

$$\operatorname{ctg} 225^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1,$$

то $\log_{11} \operatorname{ctg} 225^\circ = \log_{11} 1 = 0$ и исходное уравнение равносильно следующему $7^{|x+6|} = 7^{|x^2+4x-12|}$ или $|x+6| = |x^2+4x-12|$. Так как $x^2+4x-12 = (x+6)(x-2)$, то последнее уравнение приводится к виду $|x+6| = |x+6| \cdot |x-2|$, откуда

$\lvert x+6\rvert = 0$	$\lvert x-2\rvert = 1$
$x+6=0$	$x-2=\pm 1$
$x_1 = -6$	$x_2 = 3, \quad x_3 = 1$. ■

5.10.1. $x = \frac{\log_2 3 - 1}{2}$. □ Преобразуем уравнение к виду $2 \cdot 12^x - 3 \cdot 3^x + 4 \cdot 4^x - 6 = 0$, после чего разложим левую часть полученного уравнения на множители: $3^x(2 \cdot 4^x - 3) + 2 \cdot 3^x(2 \cdot 4^x - 3) = 0$, т.е. $(2 \cdot 4^x - 3) \cdot (3^x + 2) = 0$. Отсюда

$2 \cdot 4^x - 3 = 0$	$3^x + 2 = 0$
$2 \cdot 4^x = 3$	$3^x = -2$
$4^x = \frac{3}{2}$	Нет решений, так как $3^x > 0$.
$x = \log_4 \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(\log_2 3 - 1)$	■

5.10.2. $x_1 = \log_3 10$, $x_2 = \log_5 \frac{9}{2}$.

5.10.3. -6. □ Преобразуем уравнение к виду

$$x^2 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 16 \cdot 4^{-x} = 16 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + x^2 \cdot 4^{-x}.$$

Отсюда $4^{\sqrt{2-x}}(x^2-16) + 4^{-x} \cdot (16-x^2) = 0$ или $(x^2-16)\left(4^{\sqrt{2-x}} - 4^{-x}\right) = 0$. На ОДЗ ($x \leqslant 2$) последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$x^2 - 16 = 0$	$4^{\sqrt{2-x}} = 4^{-x}, \qquad \sqrt{2-x} = -x.$
$x_1 = 4$ (не входит в ОДЗ), $x_2 = -4$ (корень уравнения.)	После возведения в квадрат полученное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2-x = x^2 \\ -x \geqslant 0. \end{cases}$ Отсюда $x_3 = 1$ — не входит в ОДЗ, и $x_4 = -2$ — корень уравнения.

Таким образом, корни исходного уравнения -4 и -2, и их сумма равна -6. ■
5.10.4. 6; 0. **5.10.5.** 3; 0. **5.10.6.** 5. **5.10.7.** -3. **5.10.8.** 5; 4. **5.10.9.** 3; 5.

5.11.1. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. □ Преобразовав уравнение к виду $4^{\sin x}+\frac{32}{4^{\sin x}}=18$, обозначим $y=4^{\sin x}$. Тогда $y+\frac{32}{y}=18$ или $y^2-18y+32=0$. Отсюда

$$\begin{array}{l|l} y_1=2 & y_2=16 \\ 4^{\sin x}=4^{\frac{1}{2}} & 4^{\sin x}=4^2 \\ \sin x=\frac{1}{2} & \sin x=2 \\ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n & \text{нет решений, так как } \sin x\leqslant 1.\ ■ \end{array}$$

5.11.2. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. ● Привести уравнение к виду $3^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x}=3^{-\operatorname{tg}2x+\frac{3}{2}}$, откуда $\operatorname{tg}2x=1$. **5.11.3.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$. ● Исходное уравнение равносильно уравнению $2^{\cos^2 x}=2^{3\sin^2 x}$, т. е. $\operatorname{tg}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.11.4. $x=(-1)^n\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{6}$. □ Перепишем уравнение в виде $5^{4\sin^2 3x}=5^{\frac{1}{\operatorname{ctg}3x}}$. Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4\sin^2 3x=\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}, \\ \sin 3x\neq 0. \end{cases}$$

Сокращая на $\sin 3x\neq 0$, получаем равносильное уравнение $4\sin 3x=\frac{1}{\cos 3x}$ или $2\sin 6x=1$. Отсюда $\sin 6x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{6}$. ■

5.11.5. $x_1=\log_5 n$, $x_2=\log_5\left(n-\frac{1}{12}\right)$, $x_3=\log_5\left(n-\frac{5}{12}\right)$, $n=1,2,3,4,\ldots$ ● Сделав замену $y=\pi\cdot 5^x$, привести уравнение к виду $\cos 3y-\cos y=\sin y$, т. е. $-2\sin 2y\cdot\sin y=\sin y$.

5.12.1. $x=2$. □ Так как $2+\sqrt{3}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=(2-\sqrt{3})^{-1}$, то обозначив $y=$ $=(2-\sqrt{3})^{\frac{x}{2}}$, получим: $y+\frac{1}{y}=4$. Отсюда $y^2-4y+1=0$, т. е. $y_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$. Таким образом,

$$\begin{array}{l|l} y_1=2+\sqrt{3} & y_2=2-\sqrt{3} \\ (2-\sqrt{3})^{\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^{-1} & (2-\sqrt{3})^{\frac{x}{2}}=2-\sqrt{3} \\ \frac{x}{2}=-1 & \frac{x}{2}=1 \\ x=-2 & x=2 \end{array}$$

Наибольший корень $x=2$. ■
5.12.2. $x=2$. **5.12.3.** $x=\pm 2$.

5.13.1. $x=0$. □ Перепишем уравнение в виде $2^{3x}+2^x\cdot 3^{2x}=2\cdot 3^{3x}$. Поделим обе части полученного уравнения на $2^{3x}\neq 0$: $1+\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}$. Пусть

$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, тогда $1 + y^2 = 2y^3$ или $2y^3 - y^2 - 1 = 0$. Решим последнее уравнение, раскладывая его левую часть на множители: $(y^3 - y^2) + (y^3 - 1) = 0$, или $y^2(y-1) + (y-1)(y^2+y+1) = 0$, т.е. $(y-1)(2y^2+y+1) = 0$. Отсюда

$y - 1 = 0$	$2y^2 + y + 1 = 0$
$y = 1$	$D = -7 < 0$
$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$	нет решений.
$x = 0.$	■

5.13.2. $x = 0$.
5.13.3. $x_1 = -5$, $x_2 = -\frac{4}{5}$, $x_3 = 2$. ● Привести уравнение к виду $2^{5\cdot3(x^3-8)} = 2^{3\cdot19(2x-x^2)}$ или $5\cdot(x^3-8) = 19(2x-x^2)$, т.е. $5(x-2)(x^2+2x+4) = 19x(2-x)$.
5.13.4. $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = 3$. **5.13.5.** $x = 1$. ● На ОДЗ ($x \neq 0$) исходное уравнение равносильно уравнению $4^x - 2^{x+2} + 3 + \left(2^{\frac{x}{2}} + 1\right)\left(2^{\frac{x}{2}} - 1\right) = 0$ или $4^x - 3\cdot2^x + 2 = 0$. Далее сделать замену $y = 2^x$. **5.13.6.** $x = 0$. **5.13.7.** $x = 4$. ● Привести уравнение к виду $2^{\sqrt{x+5}} = 2^{\sqrt{x-3}+2}$ или $\sqrt{x+5} = \sqrt{x-3} + 2$.
5.13.8. $x_1 = -1 - \log_5 2$, $x_2 = 2$. ● Поделив обе части уравнения на 50 и прологарифмировав затем по основанию 2, привести исходное уравнение к виду $(x-2)\cdot\log_2 5 + \dfrac{x-2}{x+1} = 0$. **5.13.9.** $x = 4$. ● На ОДЗ ($x = 1, 2, 3, \ldots$) исходное уравнение равносильно уравнению

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{x}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \quad \text{или} \quad \left(\frac{4}{3}\right)^{1-x+\frac{4}{x}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}.$$

5.13.10. $x = 2$. **5.13.11.** $x = 2$. ● Учитывая, что $3^{\frac{5x-10}{3x-4}} = 3^{2-\frac{x+2}{3x-4}}$, сделать замену $y = 3^{\frac{x+2}{3x-4}}$. **5.13.12.** $x = (2\log_3 2 - 1)^2$. ● Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}+1} - 39\cdot3^{\sqrt{x}-1} + 12 = 0, \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \left(3^{\sqrt{x}} - 3\right)\left(3^{\sqrt{x}} - \frac{4}{3}\right), \\ x \neq 1. \end{cases}$$

5.13.13. $x_1 = 2$, $x_2 = \log_3 2 - 4$. □ Преобразуем исходное уравнение:

$$2^x\cdot8 + 2^x = 3\cdot3^{x^2+2x-6} + 3^{x^2+2x-6},$$
$$9\cdot2^x = 4\cdot3^{x^2+2x-6}, \quad 2^{x-2} = 3^{x^2+2x-8}, \quad 2^{x-2} = (3^{x+4})^{x-2}.$$

Последнее уравнение распадается на два:

$x - 2 = 0$	$3^{x+4} = 2$
$x = 2$	$x = \log_3 2 - 4.$ ■

5.13.14. $-2 < p \leqslant 2$. □ Уравнение $(p-1)\cdot4^x - 4\cdot2^x + (p+2) = 0$ имеет решение в том и только в том случае, когда уравнение $(p-1)y^2 - 4y + (p+2) = 0$, где $y = 2^x$, имеет положительное решение. При этом возможны два случая.
1) $p = 1$. Тогда уравнение становится линейным и принимает вид $-4y + 3 = 0$, откуда $y = \frac{3}{4}$ — *положительное решение.*

2) $p \neq 1$. Квадратное уравнение $(p-1)y^2 - 4y + (p+2) = 0$ имеет решение в точности когда его дискриминант положителен, т. е. $\dfrac{D}{4} = 4 - (p-1)(p+2) \geqslant 0$ или $p^2 + p - 6 \leqslant 0$, откуда $-3 \leqslant p \leqslant 2$.

Из этого множества надо исключить те значения p, при которых оба корня y_1 и y_2 соответствующих уравнений отрицательны и, быть может, то значение p, при котором один из корней равен нулю.

$$\text{Очевидно,}\quad y_1 < 0 \quad \text{и} \quad y_2 < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{p+2}{p-1} > 0, \\ \dfrac{4}{p-1} < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow p < -2.$$

Кроме того, при $p = -2$ один из корней уравнения равен нулю, а уравнение принимает вид $-3y^2 - 4y = 0$. Тогда второй корень $y_2 = -\frac{4}{3} < 0$ и, значит, при $p = -2$ исходное уравнение также не имеет решений.

Таким образом, исключая из отрезка $[-3; 2]$ значения $p \leqslant 2$, получим окончательно $-2 < p \leqslant 2$. ■

5.13.15. $0 < a \leqslant 1$, $x = \pm\log_{12}\left(\dfrac{1+\sqrt{1-a}}{a}\right)$. ● Обозначив $y = 12^{|x|}$, привести уравнение к виду $ay^2 - 2y + 1 = 0$.

Так как $|x| > 0$, то $y = 12^{|x|} \geqslant 1$, поэтому при $a \leqslant 0$ нет решений, поскольку тогда $a \cdot 12^{|x|} + 12^{-|x|} \leqslant 12^{-|x|} \leqslant 1 < 2$. Далее, при $a > 0$ исходное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда квадратное уравнение $ay^2 - 2y + {}$ $+ 1 = 0$ имеет решение, большее 1, т. е. $y_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-a}}{a} \geqslant 1$. Неравенство $\dfrac{1-\sqrt{1-a}}{a} \geqslant 1$ не имеет решений, а неравенство $\dfrac{1+\sqrt{1-a}}{a} \geqslant 1$ или $1 + \sqrt{1-a} \geqslant a$ (умножение на a не меняет знака неравенства, так как должно быть $a > 0$) равносильно неравенству $\sqrt{1-a} \geqslant a - 1$, которое справедливо при всех $a > 0$ и $a \leqslant 1$.

5.14.1. $x = \log_7(\sqrt{13} + 4)$, $y = \log_4(\sqrt{13} - 1)$. □ Пусть $u = 7^x$, $v = 4^y$, тогда $\begin{cases} u^2 + 4v^2 = 85, \\ u - v = 5. \end{cases}$ Из второго уравнения системы $v = u - 5$. Подставляя в первое уравнение, получим $u^2 + 4(u-5)^2 = 85$ или $5u^2 - 40u + 15 = 0$, $u^2 - 8u + 3 = {}$ $= 0$. Отсюда $u_{1,2} = 4 \pm \sqrt{13}$, $v_{1,2} = -1 \pm \sqrt{13}$. Поскольку $v = 4^y > 0$, то подходит лишь значение $v = \sqrt{13} - 1$, а, значит, $u = \sqrt{13} + 4$. Таким образом, $7^x = \sqrt{13} + 4$, $4^y = \sqrt{13} - 1$, т. е. $x = \log_7(\sqrt{13} + 4)$, $y = \log_4(\sqrt{13} - 1)$. ■

5.14.2. $x = 2$, $y = 2$. ● Преобразовать первое уравнение системы к виду $2^{x-1} = \dfrac{y^2+4}{4}$ откуда, учитывая неравенство $2^{x-1} \leqslant y$, получить неравенство $\dfrac{y^2+4}{4} \leqslant y$ или $(y-2)^2 \leqslant 0$. **5.14.3.** $x_1 = 1$, $y_1 = 1$; $x_2 = \log_3 2$, $y_2 = \log_2 3$. ● Преобразовать первое уравнение системы к виду $9^x - 3^x \cdot 2^y + 4^y = 7$ после чего сделать замену $u = 3^x$, $v = 2^y$.

5.15.1. $x = 2$. □ Так как $\sin^2 \dfrac{\pi x}{4} \leqslant 1$, то правая часть уравнения меньше или равна 2. С другой стороны, его левая часть больше или равна 2, поскольку неравенство $2^{x^2-4x+5} \geqslant 2$, т. е. $x^2 - 4x + 5 \geqslant 1$ или $(x-2)^2 \geqslant 0$ выполняется для всех x.

Таким образом, $2^{x^2-4x+5} = 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4} \iff$

$$\begin{cases} 2^{x^2-4x+5} = 2, \\ 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 1, \\ \sin^2 \frac{\pi x}{4} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2, \\ \sin \frac{\pi x}{4} = \pm 1. \end{cases}$$

Так как значение $x = 2$ удовлетворяет условию $\sin \frac{\pi x}{4} = 1$ (ибо $\sin \frac{\pi \cdot 2}{4} \sin \frac{\pi}{2} = = 1$), то оно и является единственным решением исходного уравнения. ■

5.15.2. $x = 1$. ● Учесть, что $3(1 + \cos 2\pi x) \leqslant 3 \cdot 2 = 6$ и $3^x + 3^{2-x} = 3^x + \frac{9}{3^x} \geqslant 6$.

5.15.3. $x = -1$. ● Показать, что $4 - \left|\sin \frac{\pi}{4}(x-1)\right| \geqslant 3$, а $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} = 3^{-x^2-2x} \leqslant \leqslant 3$. **5.15.4.** $x = 0$. ● Показать, что $2\cos\left(\frac{x}{3}\right) \leqslant 2$, а $2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} \geqslant 2$.

5.15.5. Нет решений. □ Пусть $f_1(x) = 2^{x+1} + 2^{1-x}$, $f_2(x) = 1 - 4x - x^2$. Тогда $f_1(x) = 2\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)$ — четная функция. Кроме того, $f_1(x)$ возрастает при $x > 0$ (и, значит, убывает при $x < 0$), так как функция $g(y) = y + \frac{1}{y}$ возрастает при $y > 1$ $\left(g'(y) = 1 - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2-1}{y^2} > 0\right.$ при $\left.y > 1\right)$. Заметим еще, что функция $f_2(x) = 5 - (x+2)^2$ возрастает при $x < -2$ и убывает при $x > -2$, $f_1(0) = 4$, $f_2(-2) = 5$ (см. рис. 1). Поскольку $f_1(-1) = 5 = \max f_2(x)$, то при $x \leqslant -1$ имеем $f_1(x) > f_2(x)$. Далее, при $x > -1$ имеем $f_2(x) < f_2(-1) = 4 = \min f_1(x)$, т. е. при $x > -1$ также $f_1(x) > f_2(x)$. Таким образом, для всех x выполнено $f_1(x) > f_2(x)$ и, стало быть, исходное уравнение не имеет решений. ■

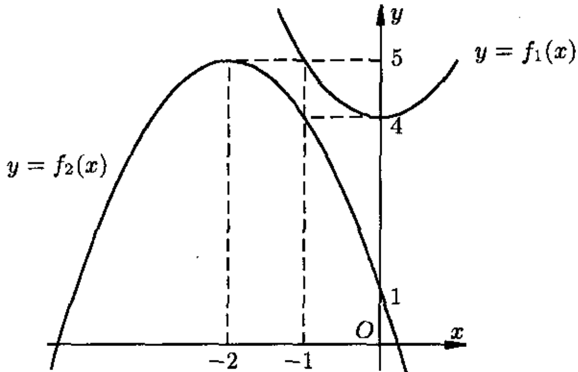


Рис. 1

5.15.6. $x = 1$. □ Перепишем уравнение в виде

$$8 \cdot 2^{3x} + 8 \cdot 2^{-3x} + 24 \cdot 2^x + 24 \cdot 2^{-x} = 125 \quad \text{или}$$
$$8 \cdot (2^{3x} + 2^{-3x}) + 24(2^x + 2^{-x}) = 125.$$

Пусть $y = 2^x + 2^{-x}$, тогда

$$y^3 = 2^{3x} + 2^{-3x} + 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-x}(2^x + 2^{-x}) = 2^{3x} + 2^{-3x} + 3y,$$

откуда $2^{3x}+2^{-3x}=y^3-3y$. Поэтому последнее уравнение преобразуется к виду $8(y^3-3y)+24y=125$ или $y^3=\dfrac{125}{8}$, т. е. $y=\dfrac{5}{2}$. Отсюда $2^x+2^{-x}=\dfrac{5}{2}$ или $2(2^x)^2-5\cdot 2^x+1=0$, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} 2^x=2 \\ x=1 \end{array}\right| \begin{array}{l} 2^x=\frac{1}{2} \\ x=-1. \end{array}$$

Больший корень $x=1$. ■

5.15.7. $x=1$. **5.15.8.** $x=1$. ● Переписав уравнение в виде

$$2^{3x}-2^{-3(x-1)}-6(2^x-2^{1-x})=1,$$

обозначить $y=2^x-2^{1-x}$.

5.15.9. $x_1=-1$, $x_2=2$. □ Преобразуем уравнение к виду $4^{2x^2-x}-16\cdot 4^{x^2}+$ $+4^{x^2}-16\cdot 4^x=0$, после чего сгруппируем члены полученного уравнения

$$\left(4^{2x^2-x}-16\cdot 4^{x^2}\right)+\left(4^{x^2}-16\cdot 4^x\right)=0, \quad \text{т. е.}$$

$$4^{x^2}\left(4^{x^2-x}-16\right)+4^x\left(4^{x^2-x}-16\right)=0, \implies \left(4^{x^2}+4^x\right)\left(4^{x^2-x}-16\right)=0;$$

$$\left.\begin{array}{l} 4^{x^2}+4^x=0 \\ \text{нет решений, так как} \\ 4^{x^2}+4^x>0 \end{array}\right| \begin{array}{l} 4^{x^2-x}-16=0 \\ 4^{x^2-x}=4^2 \\ x^2-x-2=0, \quad x_1=-1,\ x_2=2.\ ■ \end{array}$$

5.15.10. $x_1=-1$, $x_2=3$. $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$. ● Преобразовать уравнение к виду $4^{x^2-x}-8\cdot 2^{x^2}-2\cdot 2^{x^2}+16\cdot 4^x=0$ или

$$4^{\frac{x^2}{2}}\left(4^{\frac{x^2}{2}-x}-8\right)-2\cdot 4^x\left(4^{\frac{x^2}{2}-x}-8\right)=0, \ \left(4^{\frac{x^2}{2}-x}-8\right)\left(4^{\frac{x^2}{2}}-2\cdot 4^x\right)=0.$$

5.15.11. $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=2$. ● Привести уравнение к виду

$$\left(8\cdot 4^{\frac{1}{x}-x}-1\right)+4^x\left(8\cdot 4^{\frac{1}{x}-x}-1\right)=0 \quad \text{или} \quad \left(8\cdot 4^{\frac{1}{x}-x}-1\right)(1+4^x)=0.$$

5.15.12. $x=4$. □ На области допустимых значений, определяемой неравенством $x-3>0$, т. е. $x>3$, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$x-3=1$ $x=4$ — входит в ОДЗ	$3x^2-10x+3=0$ $x_1=3$, $x_2=\dfrac{1}{3}$, значения x_1 и x_2 не входят в ОДЗ и поэтому не являются корнями исходного уравнения.

Таким образом, $x=4$ — корень уравнения. ■

5.15.13. $x=-3$. ● Привести уравнение к виду $\left(7\cdot 3^{\frac{1}{x+2}}\right)^{x+3}=1$. **5.15.14.** $x_1=0{,}5$; $x_2=5$. ● На ОДЗ, определяемой неравенством $x-\lg\dfrac{x}{2}>0$, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\lg^2 2x-\lg\frac{x}{5}-1=0, \ \text{т. е.} \ \lg^2 2x-\lg 2x=0 \quad \text{и} \quad x-\lg\frac{x}{2}=1, \ \text{т. е.} \ x=\lg 5x.$$

Последнее уравнение не имеет решений. **5.15.15.** $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$. **5.15.16.** $x_1 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$. **5.15.17.** $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 11$. ● На ОДЗ ($|x-3| > 0$, т. е. $x \neq 3$) исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $|x-3| = 1$ и $\frac{x+1}{4} = \frac{x-2}{3}$. **5.15.18.** $a = \frac{4}{3}$. ● Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5|x|^2 + 3a, \\ |x|^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

из которой видно, что если $x = x_0$, $y = y_0$ — решение этой системы, то и пара $x = -x_0$, $y = y_0$ — также будет ее решением. Поэтому из того, что система имеет единственное решение, вытекает, что $|x| = 0$. При этом система принимает вид

$$\begin{cases} 7 = 3y + 3a, \\ y^2 = 1. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad \begin{matrix} y_1 = 1,\ a_1 = \frac{4}{3}, \\ y_2 = -1,\ a_2 = \frac{10}{3}. \end{matrix}$$

Найденные «подозрительные» значения a проверить подстановкой в исходную систему. При $a = \frac{10}{3}$ система будет иметь не единственное решение.

5.15.19. $a = \frac{2}{5}$. ● См. предыдущую задачу. **5.15.20.** $a_1 = -3$, $a_2 = -2$. ● Поскольку $2 + \sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^{-1}$, то систему можно привести к виду

$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^{-x} - 5 = a - 2y + y^2, \\ x^2 + (2 - a - a^2)y^2 = 0, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

Отсюда видно, что если пара (x_0, y_0) — решение этой системы, то и пара $(-x_0, y_0)$ — также ее решение. Поэтому из единственности решения необходимо вытекает $x = 0$, и система принимает вид

$$\begin{cases} -3 = a - 2y + y^2, \\ (2 - a - a^2)y^2 = 0, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2, \end{cases}$$

откуда $y = 0$, т. е. $a = -3$ или $2 - a - a^2 = 0$, т. е. $a = -2$, $a = 1$. Далее проверить найденные значения a подстановкой в исходную систему.

5.16.1. 2. □ $\frac{1}{2}\log_5 4 = \frac{1}{2}\log_5 2^2 = \log_5 2$, $\log_{25} 16 = \log_{5^2} 4^2 = \log_5 4$, поэтому

$$(0{,}2)^{\frac{1}{2}\log_5 4 - \log_{25} 16} = (5^{-1})^{\log_5 2 - \log_5 4} = 5^{-\log_5 \frac{2}{4}} = 5^{\log_5 2} = 2. \blacksquare$$

5.16.2. 3. □ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ при $a \neq 1$, $b \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$, поэтому $\log_3 10 \cdot \lg 27 = \frac{\lg 27}{\lg 3} = \log_3 27 = 3$. ■

5.16.3. -3.

5.16.4. -1. □ $\log_2 \log_4 \log_8 64 = \log_2 \log_4 2 = \log_2 \frac{1}{2} = -1$. ■

5.16.5. 0,125. ● Учесть, что $0{,}025 \cdot 0{,}04 = \frac{1}{40} \cdot \frac{4}{100} = 10^{-3}$. **5.16.6.** 7. **5.16.7.** 0,6. **5.16.8.** 324.
5.16.9. 25. □

$$2^{6\log_{2\sqrt{2}}(5-\sqrt{10})+8\log_{1/4}(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = 2^{6\log_{2^{3/2}}(5-\sqrt{10})+8\log_{2^{-2}}(\sqrt{5}-\sqrt{2})} =$$

$$= 2^{4\log_2\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{2})-4\log_2(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = 2^{4\log_2\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}} =$$

$$= 2^{4\log_2\sqrt{5}} = \left(2^{\log_2\sqrt{5}}\right)^4 = (\sqrt{5})^4 = 25. \blacksquare$$

5.16.10. 9. □ $20^{\frac{1}{2\log_{81}5}} \cdot (0{,}25)^{\frac{1}{2\log_{81}5}} = (20 \cdot 0{,}25)^{\frac{1}{2\log_{81}5}} = 5^{\frac{1}{2\log_{81}5}} = \left(5^{\log_5 81}\right)^{\frac{1}{2}} = 81^{\frac{1}{2}} = 9$. ■

5.16.11. 5. ● Привести исходное выражение к виду $\log_6 36 + \frac{2\log_6 2}{\log_6 4} + 2 = 2 + 1 + 2 = 5$. **5.16.12.** $\frac{2}{3}$. **5.16.13.** 19. **5.16.14.** 3,75. **5.16.15.** 1. **5.16.16.** 0,6. **5.16.17.** 22,5. **5.16.18.** $\frac{9}{7}$. **5.16.19.** 13. **5.16.20.** 9. **5.16.21.** 8.

5.17.1. Второе число. □ Преобразуем первое из чисел:

$$2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} = 2 \cdot \log_{2^{-1}} 5^{-1} = 2\log_2 5 = \log_2 25.$$

Аналогично, $3 \cdot \log_8 26 = 3 \cdot \log_{2^3} 26 = 3 \cdot \frac{1}{3}\log_2 26 = \log_2 26$. Поскольку $\log_2 25 < \log_2 26$, то второе число больше. ■
5.17.2. Второе число.
5.17.3. Второе число. □ Преобразуем второе число

$$9^{\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_8 2} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_3\frac{10}{9}} \cdot 9^{\frac{3}{2}\log_8 2} = 3^{\log_3\frac{10}{9}} \cdot 9^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{10}{9} \cdot 3 = \frac{10}{3}.$$

Поскольку $\sqrt{11} < \frac{10}{3}$ (т.к. $11 < \frac{100}{9}$), то второе число больше. ■
5.17.4. Второе число. ● Воспользоваться равенством $2^{\log_3 5} = 5^{\log_3 2}$. **5.17.5.** Первое число. **5.17.6.** Второе число.

5.18.1. $x = -\frac{1}{2}$. □ Преобразуем уравнение к виду $-2\log_{2x+3} 2 = -2$ или $\log_{2x+3} 2 = 1$. Отсюда $2x + 3 = 2$, $x = -\frac{1}{2}$. ■
5.18.2. $x = 79$.
5.18.3. $x = -5{,}5$. □ Исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{x-2}{x+3} = 3$, откуда $x = -5{,}5$. ■
5.18.4. $x = 2^{2/11}$. ● Воспользоваться тождеством $\log_2 x^3 = 3\log_2 x$. **5.18.5.** $x = 5$. ● Воспользоваться цепочкой равенств

$$25^{\frac{\log_3\log_3 25}{\log_3 25}} = 25^{\log_{25}\log_3 25} = \log_3 25 = 2\log_3 5.$$

5.18.6. $x = \sqrt{17} - 4$. ● Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 = (2x+2)^2, \\ 2x + 2 > 0, \\ 2x + 2 \neq 1. \end{cases}$$

5.18.7. $x = 3$.

5.19.1. 100. □ Обозначив $y = \lg x$, получим квадратное уравнение $y^2 - 3y + 2 = 0$, откуда

$$\begin{array}{l|l} y_1 = 1 & y_2 = 2 \\ \lg x = 1 & \lg x = 2 \\ x = 10 & x = 100. \end{array}$$

Больший корень $x = 100$. ■
5.19.2. $x_1 = \sqrt{6}$, $x_2 = 6\sqrt{6}$. **5.19.3.** 10. ● Воспользовавшись тождеством $\lg 10x = 1 + \lg x$, сделать замену $y = \lg x$. **5.19.4.** $x_1 = \frac{1}{10000}$, $x_2 = 10$.
5.19.5. $x_1 = 1000$, $x_2 = 0{,}1$. ● Преобразовать исходное уравнение в равносильное уравнение $\lg^2 x - 2\lg x + \lg 2 + \lg 5 = 4$, т. е. $\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$.
5.19.6. $x_1 = \frac{1}{1000}$, $x_2 = 10$. ● На ОДЗ ($x > 0$) исходное уравнение равносильно уравнению $\lg^2 x + 2\lg x - 3 = 0$. **5.19.7.** $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$. ● Воспользовавшись тем, что по условию $x > 0$, т. е. $|x| = x$, и, значит, $\lg x^2 = 2\lg|x| = 2\lg x$.
5.19.8. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. **5.19.9.** $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{128}$. ● На ОДЗ ($x > 0$) исходное уравнение равносильно следующему: $(\log_2 4 + \log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 3 = 8$, откуда, обозначая $y = \log_2 x$, найти $y_1 = -7$, $y_2 = 1$. **5.19.10.** $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = \frac{1}{27}$.
● Обозначив $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, привести уравнение к виду $y^2 - 5y + 6 = 0$. **5.19.11.** $x_1 = 10$, $x_2 = 100$. **5.19.12.** $x_1 = \sqrt[5]{5}$, $x_2 = 5$. **5.19.13.** $x = 9$. ● Обозначив $y = \log_3 x$, привести уравнение к виду $\frac{y^2}{y-3} - \frac{6-5y}{3-y} = 0$ или, при $y \neq 3$, получаем $y^2 - 5y + 6 = 0$.

5.20.1. $x = 25$. □ Уравнение равносильно такому: $\log_5 x = 2$, т. е. $x = 25$. ■
5.20.2. $x = 32$. **5.20.3.** $x = 3$. **5.20.4.** $x_{1,2} = \pm 3$.

5.21.1. $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_2 = 25$. □ На ОДЗ ($x > 0$, $x \neq 1$) исходное уравнение равносильно уравнению $\log_5 x - \frac{1}{\log_5 x} = \frac{3}{2}$ или $2(\log_5 x)^2 - 3\log_5 x - 2 = 0$. Отсюда $\log_5 x = -\frac{1}{2}$ и $\log_5 x = 2$, т. е. соответственно $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_2 = 25$. ■
5.21.2. 511. **5.21.3.** 4. **5.21.4.** $x_1 = 2^{-2/3}$, $x_2 = 8$. ● Воспользоваться тем, что $\log_4 x = \frac{1}{\log_x 4} = \frac{1}{2\log_x 2}$ при условии $x \neq 1$. **5.21.5.** $x_1 = 3$, $x_2 = 9$. **5.21.6.** 392.
● Учитывая ОДЗ уравнения и формулы $\log_{\sqrt[3]{x}} 49 = 6\log_x 7$, $\log_x 7 = \frac{1}{\log_7 x}$, привести уравнение к виду $\log_7^2 x - 5\log_7 x + 6 = 0$. **5.21.7.** $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 2$. ● Преобразовав уравнение к виду $\log_x 2\frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{2}$, т. е. $\frac{\log_x 2}{1 + \log_2 x} = \frac{1}{2}$, обозначить $y = \log_2 x$. **5.21.8.** $x = 4$. ● Поскольку $\log_x 5 = \frac{1}{\log_5 x}$, то исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_5 \sqrt{3x+4} = \log_5 x, \\ x \neq 1, \end{cases} \quad \text{или системе} \quad \begin{cases} \sqrt{3x+4} = x, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

5.21.9. $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 4$. **5.21.10.** $x_1 = -3\frac{7}{8}$, $x_2 = -2$. ● Учесть, что

$$\log_{4x+16} 8 = \frac{3}{\log_2 4(x+4)} = \frac{3}{2+\log_2(x+4)}.$$

5.22.1. $x = 2$. □ На ОДЗ, определяемой системой неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x+8 > 0, \quad \text{т. е.} \quad x > 0, \\ x+3 > 0, \end{cases}$$

исходное уравнение равносильно уравнению $\log_3 \frac{x}{x+8} = \log_3 \frac{1}{x+3}$, откуда $\frac{x}{x+8} = \frac{1}{x+3}$ или $x^2 + 2x - 8 = 0$. Отсюда

$$x_1 = 2 \quad \text{— входит в ОДЗ} \;\Big|\; x_2 = -4 \quad \text{— не входит в ОДЗ.}$$

Таким образом, $x = 2$. ■

Заметим, что при переходах от уравнения $\log_3 x - \log_3(x+8) = -\log_3(x+3)$ к уравнению $\log_3 \frac{x}{x+8} = \log_3 \frac{1}{x+3}$ и от уравнения $\log_3 \frac{x}{x+8} = \log_3 \frac{1}{x+3}$ к уравнению $\frac{x}{x+8} = \frac{1}{x+3}$ область допустимых значений, вообще говоря, расширяется, и поэтому могут появиться посторонние корни. Для их устранения достаточно подставить найденные корни в исходное уравнение. При этом ОДЗ находить необязательно.

5.22.2. $x = 8{,}5$. **5.22.3.** $x = 0$. **5.22.4.** $x = 8$. **5.22.5.** $x_1 = 5$, $x_2 = 3$. **5.22.6.** $x = 3$. **5.22.7.** $x = 1$. **5.22.8.** $x = -4$. **5.22.9.** $x = 15$. **5.22.10.** $x = 2$. **5.22.11.** $x = 1{,}5$. ● Проведя несложные преобразования, заменить исходное уравнение равносильным ему на ОДЗ ($x > 1$) уравнением

$$\lg\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \lg\left[(x-1)(2x+5)\right] \quad \text{или} \quad 4x^2 + 8x - 21 = 0.$$

5.22.12. $x = 2$. **5.22.13.** $x = 0$. **5.22.14.** $x = 37$. ● На ОДЗ ($x > 27$) исходное уравнение равносильно уравнению $3x^2 - 92x - 703 = 0$, откуда $x_{1,2} = \frac{46 \pm 65}{3}$; $x = \frac{111}{3} = 37$ — корень уравнения. **5.22.15.** $x = \frac{1}{2}$. **5.22.16.** $x_1 = 5$, $x_2 = -3$. **5.22.17.** $x = 1$. ● Заменить уравнение равносильной системой

$$\begin{cases} 2x^2 + 9x + 5 = (x+3)^2, \\ x > -3 \quad \text{— ОДЗ.} \end{cases}$$

5.22.18. $x = 3$.

5.22.19. $x = 3$. □ Следствием исходного уравнения является уравнение

$$\frac{x-2}{2(x-1)} = \frac{3x-7}{3x-1}, \text{ откуда } 3x^2 - 13x + 12 = 0 \text{ т. е. } x_1 = 3,\ x_2 = \frac{4}{3}.$$

При проверке корень x_2 отбрасываем. Таким образом, $x = 3$ — корень уравнения. ■

5.22.20. $x = 1 - \sqrt{2}$. □ Преобразуем уравнение к виду $\log_4(x^2 - 4x + 2) - \log_4(x^2-6x+5) = \log_4 \frac{1}{2}$. Отсюда следует уравнение $\log_4 \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 6x + 5} = \log_4 \dfrac{1}{2}$, откуда имеем $\dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 6x + 5} = \dfrac{1}{2}$ или $2(x^2 - 4x + 2) = x^2 - 6x + 5$. Таким образом, $x^2 - 2x - 1 = 0$, т.е. $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. При проверке значение $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ отбрасываем. Окончательно, $x = 1 - \sqrt{2}$. ■

5.22.21. $x = -1$. **5.22.22.** $x = -1$. ● На ОДЗ ($x > -\frac{5}{3}$, $x \neq -\frac{3}{2}$) исходное уравнение равносильно уравнению $\log_2(6x + 10) = 2\log_2(2x + 4)$ или $2x^2 + 5x + 3 = 0$. **5.22.23.** б).

5.22.24. $x = 3$. □ Умножим обе части уравнения на 6: $\log_2(x-2)+\log_2(3x-5) = 2$. При условии $x > 2$ (ОДЗ) полученное уравнение равносильно уравнению $(x - 2)(3x - 5) = 4$ или $3x^2 - 11x + 6 = 0$, откуда $x_1 = \dfrac{2}{3}$ (не подходит) и $x_2 = 3$ — корень уравнения. ■

5.22.25. $x = 14$. ● На ОДЗ, определяемой системой неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x-9}{x-5} > 0, \\ x^2 - 17x + 60 > 0 \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} (x-9)(x-5) > 0, \\ (x-12)(x-5) > 0. \end{cases}$$

исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_5 \frac{(x-9)(x-12)(x-5)}{x-5} = \log_5 10 \quad \text{или} \quad (x-9)(x-12) = 10.$$

5.22.26. $\omega_1 = \sqrt{3}$; $\omega_2 = 3^{-7/8}$. ● Привести исходное уравнение к виду

$$\frac{-2}{\log_3 \dfrac{9}{\omega^2}} - \frac{3}{2 + \log_3 \omega} + \frac{16}{5} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\log_3 \omega - 1} - \frac{3}{2 + \log_3 \omega} + \frac{16}{5} = 0.$$

5.23.1. $x = 1$. □ Исходное уравнение равносильно уравнению $6 - 4^x = 2^x$ или $(2^x)^2 + 2^x - 6 = 0$. Обозначив $y = 2^x$, получим квадратное уравнение относительно y: $y^2 + y - 6 = 0$, откуда

$y_1 = -3$	$y_2 = 2$
$2^x = -3$	$2^x = 2$
нет решений, т. к. $2^x > 0$	$x = 1$. ■

5.23.2. $x = 1$. ● Привести уравнение к виду $2^x - 1 = \dfrac{2}{2^x}$. Далее сделать замену $y = 2^x$. **5.23.3.** а), в). **5.23.4.** $x = 5$. **5.23.5.** $x = 1$. **5.23.6.** $x = 0$. ● Заменив исходное уравнение равносильным уравнением

$$\lg 2\left(4^{-x^2} + 9\right) = \lg 10\left(2^{-x^2} + 1\right) \quad \text{или} \quad 4^{-x^2} + 9 = 5 \cdot 2^{-x^2} + 5,$$

сделать замену $y = 2^{-x^2}$. **5.23.7.** $x = 2$. **5.23.8.** $x = 2$. ● Заменить уравнение равносильным ему: $8 \cdot 2^x + 16 = 2^{2x+\log_2 3}$ или $8 \cdot 2^x + 16 = 3 \cdot 2^{2x}$. **5.23.9.** $x = 3$. **5.23.10.** $x = 0$. ● При $x \neq 3$ уравнение равносильно уравнению $\log_2(9 - 2^x) = (3 - x) \cdot 2 \cdot 3^{-\log_3 2}$ или $9 - 2^x = 2^{3-x}$. Далее обозначить

$y = 2^x$. **5.23.11.** $x = \frac{1}{3}$. ● Привести уравнение к виду $\log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x = 3^{2x}$ или $\log_9 x = -\frac{1}{2}$. **5.23.12.** $x = 1$. ● Преобразовать уравнение в равносильное уравнение $\log_6 6 - \log_6 2^x = \log_6(2^x + 1)$ или $\frac{6}{2^x} = 2^x + 1$. **5.23.13.** $x = 0$. ● Преобразовать правую часть уравнения к виду $\log_2 2^x(2^{x+3} - 6)$. **5.23.14.** 3. **5.23.15.** $x = 3$. ● При $x > 1$ (ОДЗ) исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{1}{x+1} \cdot (x^2 - 1) = \sqrt{2(x-1)}$, т. е. $x - 1 = \sqrt{2(x-1)}$. **5.23.16.** $x_1 = 10$, $x_2 = 10^5$. ● Привести уравнение к виду $\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x + 1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{2 - 3\lg x}$. Далее сделать замену $y = \lg x$. **5.23.17.** $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. ● Обозначить $y = 9^{\log_{25} x}$. **5.23.18.** $x = 2$. **5.23.19.** $x = \log_2 11$. **5.23.20.** 81.

5.24.1. $x = 2$. □ Перейдем в левой части уравнения к основанию 2: $\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 5} = \log_5 10$. Отсюда

$$\log_2 x = \frac{\log_5 10}{1 + \frac{1}{\log_2 5}} \text{ т. е. } \log_2 x = \frac{\log_5 10}{1 + \log_5 2}, \quad \log_2 x = 1.$$

Таким образом, $x = 2$. ■

5.24.2. 7. ● Перейти к основанию 2, воспользовавшись тождеством $\log_3 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 3}$. **5.24.3.** $x = 2^{\log_6 3}$. **5.24.4.** $x_1 = 3^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$, $x_2 = 3^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. ● Переходя к основанию 3, получить равносильное уравнение $\frac{1}{\log_3 3x} = \frac{1}{\log_3^2 x}$, откуда (при $x > 0$, $3x \neq 1$, $x \neq 1$) следует уравнение $\log_3^2 x - \log_3 x - 1 = 0$, квадратное относительно $\log_3 x$. **5.24.5.** $x_1 = 2^{-\sqrt{2}}$, $x_2 = 2^{\sqrt{2}}$. ● Перейти в обеих частях уравнения к основанию 2.

5.25.1. $x_1 = -2$, $x_2 = -1$. □ Уравнение равносильно следующему: $x(x+3)+2 = 0$, откуда $x_1 = -2$, $x_2 = -1$. ■

5.25.2. $x = 3$. ● При $x > 0$ исходное уравнение равносильно уравнению $3x^2 + x = 30$. **5.25.3.** $x = 4$.

5.25.4. $x_1 = 1$, $x_2 = 7$, $x_3 = 11$. □ На ОДЗ ($x > 0$, $x \neq 2$) исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$x^2 - 18x + 77 = 0$,	$\log_{x/2} 8x + 3 = 0$, $\quad \log_{x/2} 8x = -3$,
$x_1 = 7$, $x_2 = 11$ —	$8x = \left(\frac{x}{2}\right)^{-3}$, $\quad 8x = \frac{8}{x^3}$, $\quad x^4 = 1$
оба корня входят в ОДЗ	$x_{3,4} = \pm 1$, $\quad x_4 = -1$ не входит в ОДЗ.

Окончательно $x_1 = 1$, $x_2 = 7$, $x_3 = 11$. ■

5.25.5. $x_1 = 2$, $x_2 = 10$. **5.25.6.** $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{1}{16}$. ● Преобразовать исходное уравнение к виду

$$\log_4^2 x + 3\log_4 x + \frac{4\log_4 x}{\log_4 x - 2} = 0 \quad \text{или} \quad \log_4 x\left(\log_4 x + 3 + \frac{4}{\log_4 x - 2}\right) = 0.$$

5.25.7. Нет решений. ● Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3 - \log_5(x^3 + 12x + 62) = 3 - 3\log_5(x+2), \\ 1 - \log_5(x+2) \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} \log_5(x^3+12x+62)=\log_5(x+2)^3, \\ x\neq 3. \end{cases}$$

5.25.8. $x = \pm 5$. • Заменить уравнение равносильной системой

$$\begin{cases} \log_2\big(\log_3(x^2-16)\cdot\log_3(x^2-16)\big)=2, \\ \log_3(x^2-16)>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \log_3^2(x^2-16)=4, \\ \log_3(x^2-16)>0. \end{cases}$$

5.25.9. $x = 4$.

5.25.10. 2. □ Преобразуем уравнение к виду $-\log_2 x = -(x-1)^2$ или $\log_2 x = (x-1)^2$. Построим графики функций $y=\log_2 x$ и $y=(x-1)^2$. Непосредственно из рисунка 2 видно, что они пересекаются в двух точках А и Б (одна из которых соответствует решению $x=1$). Таким образом, у исходного уравнения 2 корня. ■

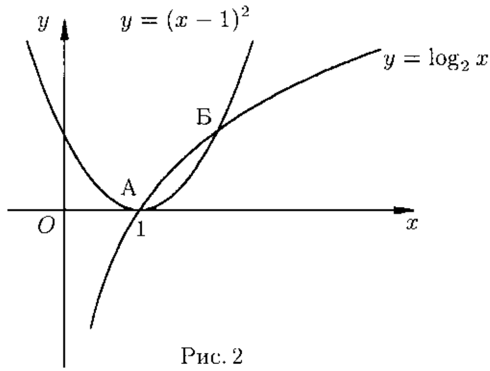


Рис. 2

5.25.11. $x_1 = 10$, $x_2 = 10^4$. • Преобразовав уравнение к виду $3\sqrt{\lg x}-\lg x=2$, сделать замену $y=\sqrt{\lg x}$.

5.26.1. $x = \dfrac{1}{100}$, $y = 36$. □ Умножив обе части первого уравнения системы на 2, преобразуем ее к виду

$$\begin{cases} 2\sqrt{y}+4\lg x=4, \\ y+4\lg x=28. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения новой системы ее первое уравнение, получим $y-2\sqrt{y}=24$, т. е. $(\sqrt{y})^2-2\sqrt{y}-24=0$. Отсюда $\sqrt{y}=-4$ (не подходит, т. к. $\sqrt{y}\geqslant 0$) и $\sqrt{y}=6$, т. е. $y=36$, $x=\dfrac{1}{100}$. ■

5.26.2. $x = 5$, $y = 5$. • Учитывая ОДЗ ($x>0$, $y>0$, $x\neq 1$, $y\neq 1$), привести исходную систему к виду

$$\begin{cases} \log_y x+\dfrac{1}{\log_y x}=2, \\ x^2-y=20 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \log_y x=1, \\ x^2-y=20. \end{cases}$$

5.26.3. $x = 2$, $y = 7$. • Заменить второе уравнение системы равносильным уравнением $y = x+5$. **5.26.4.** $x = 2$, $y = 6$. **5.26.5.** $x_1 = 18$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$,

$y_2 = 18$. ● На ОДЗ ($x > 0$, $y > 0$) исходная система равносильна следующей

$$\begin{cases} \log_4 xy = \log_4 4 \cdot 9, \\ 2^{\frac{x+y}{2}} = 2^{10} \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} xy = 36, \\ \dfrac{x+y}{2} = 10. \end{cases}$$

5.26.6. $x = 16$, $y = 25$. **5.26.7.** $x = 81$, $y = 0$. ● Из первого уравнения системы $\log_3 x = 3 - y + 2^y$. Подставив это выражение для $\log_3 x$ во второе уравнение, получить квадратное относительно 2^y уравнение $2^{2y} + 3 \cdot 2^y - 4 = 0$.

5.27.1. 2. □ Обозначив исходное выражение через A, преобразуем его, используя основные свойства логарифмов:

$$A = \frac{\log_3 8 \cdot 3}{\dfrac{1}{\log_3 72}} - \frac{\log_3 27 \cdot 8}{\dfrac{1}{\log_3 8}} = (3\log_3 2 + 1)\log_3 8 \cdot 9 - (3 + 3\log_3 2)\log_3 8 =$$
$$= (3\log_3 2 + 1)(3\log_3 2 + 2) - (3 + 3\log_3 2) \cdot 3\log_3 2.$$

Пусть $y = \log_3 2$, тогда

$$A = (3y+1)(3y+2) - 3y(3+3y) = 9y^2 + 3y + 6y + 2 - 9y^2 - 9y = 2. \ \blacksquare$$

5.27.2. 1. ● Воспользовавшись равенствами $\log_5 30 = 1 + \log_5 6$ и $\log_5 150 = 2 + \log_5 6$, обозначить $y = \log_5 6$. **5.27.3.** 1. ● Перейдя к основанию 2, обозначить $y = \log_5 3$. **5.27.4.** $\log_5 3$. ● Обозначив $t = \log_5 3$, привести исходное выражение к виду $\dfrac{1-t^3}{\left(t + \frac{1}{t} + 1\right)(1-t)}$. **5.27.5.** 7. ● Воспользоваться формулой $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$. **5.27.6.** 3. ● Учесть, что

$$1{,}5^{\frac{2}{2\log_5 3 - \log_5 4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{2\log_5 3 - 2\log_5 2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\log_5 3/2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{3/2} 5} = 5.$$

5.27.7. 4. ● Обозначив $y = \log_2 3$, воспользоваться равенством $\log_2 18 = 1 + 2y$. **5.27.8.** $\dfrac{3-2a}{2b+a}$. □ Поскольку $a = \log_{14} 7 = \dfrac{1}{\log_7 14} = \dfrac{1}{\log_7 2 + 1}$, то $\log_7 2 = \dfrac{1}{a} - 1$. Аналогично $b = \log_{14} 5 = \dfrac{\log_7 5}{\log_7 14} = \dfrac{\log_7 5}{\log_7 2 + 1}$, поэтому $\log_7 5 = \dfrac{\log_{14} 5}{\log_{14} 7} = \dfrac{b}{a}$. Отсюда

$$\log_{175} 56 = \frac{\log_7 56}{\log_7 175} = \frac{3\log_7 2 + 1}{2\log_7 5 + 1} = \frac{3\left(\frac{1}{a} - 1\right) + 1}{2 \cdot \frac{b}{a} + 1} = \frac{3-2a}{2b+a}. \ \blacksquare$$

5.27.9. $\dfrac{3(1-a)}{1+b}$. **5.27.10.** $6 \cdot \dfrac{a+b-3ab}{a+b+ab}$ при $a \neq 0$; 6 при $a = 0$. ● При $x = 1$, т. е. $a = b = 0$, имеем $\log_{\sqrt[3]{yz}}(yz)^2 = 6$. При $x \neq 1$, т. е. $a \neq 0$, $b \neq 0$, имеем:

$$\log_{\sqrt[3]{xyz}} \left(\frac{yz}{x^3}\right)^2 = \frac{\log_x \left(\dfrac{yz}{x^3}\right)^2}{\log_x \sqrt[3]{xyz}} = \frac{2(\log_x y + \log_x z - \log_x x^3)}{\dfrac{1}{3}(\log_x x + \log_x y + \log_x z)}.$$

5.28.1. 0,1. □ По условию $x > 0$, поэтому обе части уравнения положительны; логарифмируя их по основанию 10, получим равносильное уравнение $\lg x^{\lg x - 1} = \lg 100$ или $(\lg x - 1)\lg x = 2$, $\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$. Решая последнее уравнение, находим $\lg x = -1$, т. е. $x_1 = \frac{1}{10}$ и $\lg x = 2$, т. е. $x_2 = 100$. Наименьший корень $x = 0{,}1$. ■

5.28.2. $x_1 = 1000$, $x_2 = 0{,}00001$. **5.28.3.** $x_1 = 1$, $x_2 = 100$. **5.28.4.** $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_2 = 1000$. **5.28.5.** 10. **5.28.6.** $x = \frac{1}{7}$. **5.28.7.** $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{1}{10}$. ● После логарифмирования обеих частей уравнения по основанию 10 сделать замену $y = \lg^2 x$. **5.28.8.** $x_1 = 100$, $x_2 = 10$. **5.28.9.** $x = 3$. **5.28.10.** $x = 1$. ● Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 2, получить равносильное уравнение $\sqrt{\log_2 x}(2 - \log_2 x) = \log_2 x$. Далее обозначить $y = \sqrt{\log_2 x}$. **5.28.11.** $x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $x_2 = 10$. **5.28.12.** 16. ● Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 2 и обозначив $y = \log_2 x$, привести его к виду $\left(5 - y - \frac{1}{y}\right)y = 3$ или $y^2 - 5y + 4 = 0$. **5.28.13.** $-0{,}5$. **5.28.14.** $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 10^{\pm\sqrt{\lg 1{,}5}}$. ● Обозначив $y = x^{\lg x}$, привести уравнение к виду $2y^2 - 5y + 3 = 0$, откуда $x^{\lg x} = 1$, $x^{\lg x} = \frac{3}{2}$. **5.28.15.** $x_1 = 0{,}001$, $x_2 = 0{,}01$, $x_3 = 100$, $x_4 = 1000$. ● Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 10, получить равносильное уравнение $(6\log_x 10)^2 - 13 + \lg^2 x = 0$ или $\frac{36}{\lg^2 x} + \lg^2 x - 13 = 0$. Далее сделать замену $y = \lg^2 x$.

5.28.16. $x_1 = 2$, $x_2 = 5$. □ Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 10, получим равносильное уравнение $\lg x + \log_x 5 \cdot \lg 2 = 1$ или $\lg x + \frac{\lg 5}{\lg x} \cdot \lg 2 = 1$. Отсюда $\lg^2 x - \lg x + \lg 5 \cdot \lg 2 = 0$, т. е., с учетом равенства $\lg 2 = 1 - \lg 5$, получим

$$\lg^2 x - \lg x + \lg 5 - \lg^2 5 = 0 \quad \text{или} \quad (\lg^2 x - \lg^2 5) - (\lg x - \lg 5) = 0.$$

Таким образом, $(\lg x - \lg 5)(\lg x + \lg 5 - 1) = 0$, откуда

$$\begin{array}{l|l} \lg x - \lg 5 = 0, & \lg x + \lg 5 - 1 = 0, \\ \lg x = \lg 5, & \lg x = 1 - \lg 5 = \lg 2, \\ x_1 = 5 & x_2 = 2. \end{array}$$ ■

5.28.17. $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 15$.

5.29.1. $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = 25$, $x_3 = 5^{\frac{5+\sqrt{41}}{4}}$. □ На ОДЗ ($x > 0$, $x \neq 1$) преобразуем левую часть уравнения:

$$|\log_5 3 \cdot \log_3 x^4 - 5\log_x x^2| = \left|\frac{4\log_3 x}{\log_3 5} - 5 \cdot 2\right| = 2 \cdot |2\log_5 x - 5|.$$

Тогда исходное уравнение преобразуется к виду $|2\log_5 x - 5| = 2\log_x 5$. Обозначив $y = \log_5 x$, получим $|2y - 5| = \frac{2}{y}$. Теперь рассмотрим два случая:

1) $y \geqslant \frac{5}{2}$. Тогда $2y - 5 = \frac{2}{y}$ или $2y^2 - 5y - 2 = 0$, т. е. $y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$. Условию

$y \geqslant \frac{5}{2}$ удовлетворяет значение $y = \frac{5+\sqrt{41}}{4}$. Отсюда $\frac{5+\sqrt{41}}{4} = \log_5 x$, т. е. $x = 5^{\frac{5+\sqrt{41}}{4}}$.
2) $y < \frac{5}{2}$. Тогда $5 - 2y = \frac{2}{y}$ или $2y^2 - 5y + 2 = 0$, т. е. $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 2$. Отсюда $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = 25$. ■

5.29.2. $x_1 = \frac{1}{7}$, $x_{2,3} = 7^{\frac{-3\pm\sqrt{2}}{7}}$. **5.29.3.** $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 3$. ● Учитывая, что

$$\log_{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2} \frac{5x+1}{x-2} = \frac{1}{2}\log_{\left|\frac{x+1}{x-2}\right|} \frac{5x+1}{x-2},$$

привести уравнение к виду

$$\frac{1}{2\log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|} + \log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\frac{x+1}{x-2}\right| = \frac{3}{2}.$$

Далее обозначить $y = \log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|$.

5.29.4. $[25; \infty)$. ● Преобразовав уравнение к виду $|2 - \log_5 x| + 3 = |1 + \log_5 x|$, сделать замену $y = \log_5 x$. Далее рассмотреть три случая: $y \geqslant 2$, $-1 \leqslant y < 2$, $y < -1$. **5.29.5.** $x_{1,2} = \pm 8 \cdot 4^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$. ● Обозначив $y = \log_2 |x|$, преобразовать уравнение к виду $\sqrt{y(6-y) - 5} = 2(y-3)$. Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y(6-y) - 5 = 4(y-3)^2, \\ y \geqslant 3, \end{cases}$$

откуда $y = 3 + \frac{2}{\sqrt{5}}$.

5.30.1. $x_{1,2} = 5^{\pm\sqrt{\log_3(2+\sqrt{3})}}$. □ Пусть $y = 3^{(\log_5 x)^2}$, тогда уравнение принимает вид $y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Поскольку $(\log_5 x)^2 \geqslant 0$, то $y \geqslant 1$, поэтому корень $y = 2 - \sqrt{3}$ не подходит. Таким образом, $y = 3^{(\log_5 x)^2} = 2 + \sqrt{3}$, т. е. $\log_5 x = \pm\sqrt{\log_3(2+\sqrt{3})}$, $x = 5^{\pm\sqrt{\log_3(2+\sqrt{3})}}$. ■

5.30.2. $x_{1,2} = 7^{\pm\sqrt{\log_{11}(4+\sqrt{10})}}$. **5.30.3.** $x = 1$. **5.30.4.** $x = 100$. ● Воспользоваться равенством $5^{\lg x} = x^{\lg 5}$. **5.30.5.** $x = 2$. **5.30.6.** $x = \arccos(\sqrt{2} - 1) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ● По условию $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $\cos x \neq \frac{1}{2}$, поэтому

$$\log_{\sin 2x} 4\cos^2 x = 2\log_{\sin 2x} 2\cos x = \frac{2}{\log_{2\cos x} \sin 2x} =$$
$$= \frac{2}{\log_{2\cos x} 2\cos x \cdot \sin x} = \frac{2}{1 + \log_{2\cos x} \sin x}.$$

Далее обозначить $y = \log_{2\cos x} \sin x$.

5.31.1. $x = \frac{1}{4}$. □ Исходное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{12+x} - 2 = \sqrt{x+2}$. После возведения в квадрат обеих частей уравнения оно приводится к виду $2\sqrt{12+x} = 7$. Отсюда $4(12+x) = 49$, т. е. $x = \frac{1}{4}$. Найденное значение x входит в ОДЗ, т. е. $x = \frac{1}{4}$ — корень уравнения. ■

5.31.2. $x = -\frac{1}{2}$. **5.31.3.** $x = 1{,}75$. **5.31.4.** $x = \frac{1}{9}$. ● Учитывая, что $\log_x \sqrt{3x} = \frac{1}{2}\log_x 3x = \frac{1}{2}(\log_x 3 + 1)$, $\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$ (при $x \neq 1$), и обозначая $y = \log_x 3$, привести уравнение к виду $\sqrt{\frac{1}{2}(y+1)}\cdot\frac{1}{y} = -1$. Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases} \frac{1}{2}(y+1) = y^2, \\ y < 0. \end{cases}$ **5.31.5.** 81. ● Обозначить $y = \sqrt{\log_3 x}$.

5.31.6. $x = 4$. ● Привести уравнение к виду $\lg(3^{2\sqrt{x+5}-x} - 4) = \lg 5$, т.е. $3^{2\sqrt{x+5}-x} - 4 = 5$. Отсюда $3^{2\sqrt{x+5}-x} = 3^2$ или $2\sqrt{x+5} = x + 2$. **5.31.7.** $x = 2^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}$. ● Сделать замену $y = \sqrt{\log_2 x}$.

5.32.1. $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 9$. □ Перепишем уравнение в виде $3x\log_3 x - \log_3 x = 6x - 2$ или $\log_3 x(3x-1) = 2(3x-1)$. Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 1 = 0 \\ x_1 = \frac{1}{3} \text{ — входит в ОДЗ } (x > 0) \end{array}\right| \begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ x_2 = 9. \ \blacksquare \end{array}$$

5.32.2. $x = 5$. ● Поскольку $4x^2 - 19x + 22 = (4x - 11)(x - 2)$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$1 + \frac{1}{\log_{4x-11}(x-2)} = 2 + 2\log_{4x-11}(x-2).$$

Далее сделать замену $y = \log_{4x-11}(x-2)$. **5.32.3.** $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. ● Обозначив $y = x^2 + x + \sqrt{3}$ и учитывая, что $\sqrt{2} - 1 = (\sqrt{2}+1)^{-1}$, привести уравнение к виду $\log_{\sqrt{2}+1} y = \log_{(\sqrt{2}+1)^{-1}}(4-y)$ или $\log_{\sqrt{2}+1} y = \log_{\sqrt{2}+1}\frac{1}{4-y}$. Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases} y = \frac{1}{4-y}, \\ 0 < y < 4. \end{cases}$ **5.32.4.** $x_1 = -2$, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$.

● Привести уравнение к виду

$$x^2 + x - 1 = \frac{1}{x+3} \quad \text{или} \quad x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0.$$

Отсюда $(x+2)(x^2 + 2x - 2) = 0$. **5.32.5.** 49. ● Привести уравнение к виду $\log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} = \log_7^2 x + \frac{1}{\log_7^2 x} - \frac{7}{4}$. Обозначив далее $y = \log_7 x + \frac{1}{\log_7 x}$ и учитывая, что $\log_7^2 x + \frac{1}{\log_7^2 x} = \left(\log_7 x + \frac{1}{\log_7 x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2$, получить квадратное уравнение $4y^2 - 4y - 15 = 0$. **5.32.6.** 3. ● На ОДЗ ($x > -8$, $x \neq 0$) выполнено $\log_3 x^2 = 2\log_3 |x|$, поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $\log_3(x+8)|x| = 2$ или $(x+8)\cdot|x| = 9$. Далее рассмотреть два случая: $x > 0$ и $x < 0$. **5.32.7.** 2. **5.32.8.** $x = -2 + \sqrt{0{,}1}$. ● Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_2 \log_{x+3}(11x^2 + 46x + 48) = 1, \\ x + 2 > 0, \quad x + 2 \neq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \log_{x+3}(11x^2 + 46x + 48) = 2, \\ x > -2, \quad x \neq -1, \end{cases}$$

5.32.9. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3^{-\frac{2}{11}}$. ● Обозначив $y = \log_3 x$, привести уравнение к виду $\dfrac{2y}{y-2} + \dfrac{5 \cdot 3y}{y+2} - \dfrac{12 \cdot (1/2) \cdot y}{y+1} = 0$ или $y(11y^2 - 9y - 2) = 0$.

5.32.10. $x = 20$. □ На ОДЗ ($x > 10$) уравнение равносильно следующему уравнению

$$\lg(x-10)\lg(x+10) = \lg(x-10) + \lg(x+10) - 1 \quad \text{или}$$
$$\lg(x-10)\lg(x+10) - \lg(x-10) = \lg(x+10) - 1. \text{ Отсюда}$$
$$\lg(x-10)\bigl(\lg(x+10) - 1\bigr) = \lg(x+10) - 1, \quad \text{т. е.}$$

$\lg(x+10) - 1 = 0$	$\lg(x-10) = 1$
$\lg(x+10) = 1$	$x - 10 = 10$
$x + 10 = 10$	$x = 20$
$x = 0$ — не входит в ОДЗ	— входит в ОДЗ.

Таким образом, $x = 20$ — корень уравнения. ■

5.32.11. При $k > -8$, $k \neq -3$ имеем $x = 4 - \sqrt{12+k}$. □ ОДЗ уравнения определяется системой

$$\begin{cases} 4x + k > 0, \\ 2 - x > 0, \\ 2 - x \neq 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2 > x > -\dfrac{k}{4}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Ясно, что ОДЗ $\neq \varnothing$ в точности, когда $-\dfrac{k}{4} < 2$, т. е. $k > -8$. При этих значениях k исходное уравнение на ОДЗ равносильно уравнению $4x + k = (2-x)^2$ или $x^2 - 8x + (4-k) = 0$. Решая его как квадратное относительно x, находим $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{12+k}$. Корень $x_1 = 4 + \sqrt{12+k}$ не удовлетворяет, очевидно, условию $x < 2$, а корень $x_2 = 4 - \sqrt{12+k}$ удовлетворяет этому условию в точности при $k > -8$, так как

$$4 - \sqrt{12+k} < 2 \iff \sqrt{12+k} > 2 \iff 12 + k > 4 \iff k > -8.$$

При этом $4 - \sqrt{12+k} \neq 1 \iff \sqrt{12+k} \neq 3 \iff k \neq -3$.

Таким образом, уравнение имеет решение при $k > -8$, $k \neq -3$ и это решение — $x = 4 - \sqrt{12+k}$. ■

5.32.12. $p > \dfrac{1}{2e}$. ● Уравнение не имеет решений в том и только в том случае, когда графики функций $y = px^2$ и $y = \ln x$ не пересекаются. Сразу заметим, что при $p < 0$ парабола $y = px^2$ пересекает график $y = \ln x$ (см. рис. 3). При $p = 0$ также есть решение $x = 1$.

Если же $p > 0$, то уравнение не имеет решений в точности, когда $p > p_0$, где значение p_0 соответствует случаю касания обоих графиков в некоторой точке (x_0, y_0). Условие касания графиков (т. е. наличие общей точки и общей касательной в этой же точке) определяется системой, из которой мы и найдем искомое значение p_0:

$$\begin{cases} p_0 x^2 = \ln x, \\ (p_0 x^2)' = (\ln x)' \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p_0 x^2 = \ln x, \\ p_0 = \dfrac{1}{2x^2}. \end{cases}$$

Подставляя $p_0 = \frac{1}{2x^2}$ в первое уравнение системы, получим $\ln x = \frac{1}{2}$, т. е. $x = \sqrt{e}$ и, значит, $p_0 = \frac{1}{2e}$. Итак, при $p > \frac{1}{2e}$ уравнение не имеет решений.

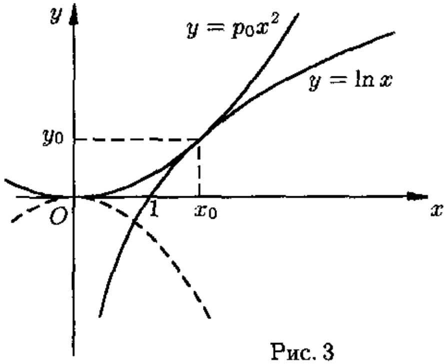


Рис. 3

5.32.13. $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 2^{-\frac{2}{3}}$, $x = 2^b$, где $b = \frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}$. ● Преобразовать средний логарифм следующим образом $\log_a x = \log_{2^{\log_2 a}} x = \frac{1}{\log_2 a}\log_2 x$, после чего привести уравнение к виду

$$\log_2 x\left(1 + \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{2}\right) = 1 \quad \text{или} \quad \log_2 x = \frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}.$$

5.33.1. $x_1 = 5$, $y_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{5}$, $y_2 = 2$. □ Поскольку $\log_x 25 = 2\log_x 5$, а $\log_x 0{,}2 = \log_x \frac{1}{5} = -\log_x 5$, то обозначая $t = \log_x 5$, преобразуем исходную систему к виду

$$\begin{cases} 2t + 2y = 2, \\ t^3 + y = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = 1 - t, \\ t^3 + y = 1. \end{cases}$$

Подставляя $y = 1 - t$ во второе уравнение последней системы, получим $t^3 - t = 0$, т. е. $t(t-1)(t+1) = 0$. Отсюда

$t_1 = 0$	$t_2 = 1$	$t_3 = -1$
$\log_x 5 = 0$	$\log_x 5 = 1$	$\log_x 5 = -1$
нет решений	$x_1 = 5$	$x_2 = \frac{1}{5}$
	$y_1 = 1 - t = 0$	$y_2 = 1 - t = 2.$

Таким образом, $x_1 = 5$, $y_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{5}$, $y_2 = 2$. ■

5.33.2. $x = \sqrt{2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. ● Преобразовав первое уравнение к виду $\log_y x - \frac{2}{\log_y x} = 1$, найти: $\log_y x = -1$ и $\log_y x = 2$. Отсюда с учетом ОДЗ ($x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$) получить $x = \frac{1}{y}$ и $x = y^2$. Подставляя в каждом случае

найденные значения x во второе уравнение системы, найти y.
5.33.3. $x = 10000$, $y = 0$. ● Преобразовать систему к виду

$$\begin{cases} \lg x + 2y = 3 + 5^y, \\ 5^y(\lg x + 2y) = 4. \end{cases}$$

Тогда второе уравнение полученной системы примет вид $5^y(3+5^y) = 4$. **5.33.4.** $x = 6$, $y = 6$. ● На ОДЗ ($x > 0$, $y > 0$) исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 12xy, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 12xy, \\ 3(x+y) = xy. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 36, \\ 3(x+y) = xy, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x+y)^2 - 3xy = 36, \\ 3xy = 9(x+y), \end{cases} \quad \text{т. е.}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 9(x+y) - 36 = 0, \\ xy = 3(x+y). \end{cases}$$

5.33.5. $x_1 = 5$, $y_1 = 2\sqrt{5}$; $x_2 = 5$, $y_2 = -2\sqrt{5}$. ● На ОДЗ ($2x + y > 0$, $2x - y > 0$) исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 150, \\ 4x^2 - y^2 = 50. \end{cases}$$

5.33.6. $x = \frac{1}{4}$, $y = 1$. ● При $y > 0$ первое уравнение системы распадается на два уравнения: $y = 1$ и $2y^2 + x^2 = 3xy$, т. е. $(y-x)^2 = y(x-y)$. Последнее уравнение в свою очередь распадается на два уравнения: $y = x$ и $x = 2y$. Далее рассмотреть три случая, подставив соответственно $y = 1$, $y = x$ и $y = \frac{x}{2}$ во второе уравнение. **5.33.7.** $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $y = \sqrt{\frac{2}{5}}$. ● Преобразуем первое уравнение системы:

$$1 + \log_3(x+y) \cdot \log_2 3 = 2\log_4 7 - \log_2 x \iff$$

$$2^{1+\log_3(x+y)\cdot\log_2 3} = 2^{2\log_4 7 - \log_2 x} \iff \begin{cases} 2(x+y) = \dfrac{7}{x}, \\ x > 0. \end{cases}$$

Аналогично, второе уравнение исходной системы равносильно системе

$$\begin{cases} xy + 1 = \dfrac{y}{x - 2y}, \\ y > 0, \ x - 2y > 0. \end{cases}$$

Объединяя обе полученные системы, получим систему, равносильную исходной:

$$\left.\begin{cases} 2(x+y) = \dfrac{7}{x}, \\ xy + 1 = \dfrac{y}{x - 2y}, \\ x > 0, \ y > 0, \ x - 2y > 0 \end{cases}\right| \implies \frac{7}{2} - x^2 + 1 = \frac{\dfrac{7}{2} - x^2}{x^2 - 7 + 2x^2}.$$

Далее сделать замену $t = x^2$. **5.33.8.** $x = \frac{\sqrt{33}}{6}$, $y = \frac{4}{\sqrt{33}}$. **5.33.9.** $x = 2$, $y = 1$. ● Поскольку $\lg^2 xy = (\lg x + \lg y)^2 = \lg^2 x + 2\lg x \lg y + \lg^2 y$, то первое уравнение системы равносильно уравнению $\lg y(\lg y + \lg x) = 0$, откуда $\lg y = 0$ и $\lg y + \lg x = 0$. **5.33.10.** $1 < a < 2$. ● Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 4y = x + 3y, \\ y > 0, \\ y = x + 2a - 4 + 2(x-a)^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = x, \quad y > 0, \\ x^2 - 2ax + a^2 + a - 2 = 0. \end{cases}$$

Последняя система имеет два решения в точности, когда имеет два положительных корня квадратное уравнение $x^2 - 2ax + (a^2 + a - 2) = 0$, т. е. тогда и только тогда, когда $D = 2 - a > 0$ и меньший корень $x_1 = a - \sqrt{2-a}$ больше нуля.

5.34.1. $\frac{2}{3} < x < 1$, $1 < x \leqslant 2$. □ Заметим, что

$$\log_x^2(3x-2) + 4\log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right) =$$
$$= \log_x^2(3x-2) - 4\log_x(3x-2) + 4 = \bigl(\log_x(3x-2) - 2\bigr)^2;$$

и исходное уравнение равносильно уравнению $\log_x(3x-2) - 2 = |\log_x(3x-2) - 2|$. Поскольку $a = |a| \iff a \geqslant 0$, то последнее уравнение равносильно неравенству $\log_x(3x-2) - 2 \geqslant 0$ или неравенству $\log_x(3x-2) \geqslant \log_x x^2$. Учитывая ОДЗ ($x > \frac{2}{3}$, $x \neq 1$) рассмотрим 2 случая: $\frac{2}{3} < x < 1$ и $x > 1$. Тогда последнее неравенство распадается на две системы:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} < x < 1, \\ 3x - 2 \leqslant x^2, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \frac{2}{3} < x < 1. \quad \Bigg| \quad \begin{cases} x > 1, \\ 3x - 2 \geqslant x^2, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad 1 < x \leqslant 2. \ \blacksquare$$

5.34.2. $\frac{5}{6} < x < 1$, $1 < x \leqslant 5$.

5.34.3. $x = 1$. □ Преобразуем уравнение к виду

$$\log_2(7 + 2x - x^2) = x^4 - 2x^2 + 4 \quad \text{или} \quad \log_2\bigl(8 - (x-1)^2\bigr) = (x^2-1)^2 + 3.$$

Поскольку $\log_2\bigl(8 - (x-1)^2\bigr) \leqslant \log_2 8 = 3$, а $(x^2-1)^2 + 3 \geqslant 3$, то последнее уравнение имеет решение в том и только в том случае, когда обе его части равны 3, т. е. $\begin{cases} 8 - (x-1)^2 = 8, \\ (x^2-1)^2 = 0. \end{cases}$ Отсюда $x = 1$. ■

5.34.4. $x = 3$. ● Показать, что $\log_2(6x - x^2 - 5) \leqslant 2$, а $x^2 - 6x + 11 \geqslant 2$ для всех $x \in$ ОДЗ. **5.34.5.** $x = \frac{1}{2}$. ● Показать, что $\log_2\bigl(x(1-x)\bigr) \leqslant -2$, а $-2 + \left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \geqslant -2$ для всех $x \in$ ОДЗ. **5.34.6.** $x = 1$. ● Преобразовав уравнение к виду $\log_2 \frac{1+x^2}{x} = 2x - x^2$, показать, что для всех $x \in$ ОДЗ выполнено $\log_2 \frac{1+x^2}{x} \geqslant 1$, а $2x - x^2 \leqslant 1$. **5.34.7.** $x = 0{,}5$. ● Преобразовав уравнение к виду $\log_2 \frac{4x^2+1}{x} = 8x(1-x)$, показать, что для всех $x \in$ ОДЗ выполнено

$\log_2 \dfrac{4x^2+1}{x} \geqslant 2$, а $8x(1-x) \leqslant 2$. **5.34.8.** $x = \frac{5}{4}$. • Пусть $y = \sqrt{\log_{4x^2-x} 5}$, тогда $\log_5\left(\dfrac{25}{4x^2-x}\right) = 2 - \log_5(4x^2-x) = 2 - \dfrac{1}{y^2}$, и уравнение принимает вид $y\left(2-\dfrac{1}{y^2}\right) = 1$ или $2y^3 - y = y^2$, т. е. (т. к. $y \neq 0$) $2y^2 - y - 1 = 0$. Далее найти y и x, найденные значения x проверить, подставив в неравенство $\sin x > \operatorname{ctg} 2x$.

5.34.9. $x = 2$. □ Пусть $y = \log_2 x$. Тогда

$$\log_{2x} \frac{2}{x} = \log_{2x} 2 - \log_{2x} x = \frac{1}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{1+\log_x 2} =$$

$$= \frac{1}{1+\log_2 x} - \frac{\log_2 x}{1+\log_2 x} = \frac{1-\log_2 x}{1+\log_2 x} = \frac{1-y}{1+y},$$

и исходное уравнение приводится к виду

$$\frac{1-y}{1+y}\cdot y^2 = 1 - y^4 \quad \text{или} \quad \frac{(1-y)y^2}{1+y} = (1-y)(1+y)(1+y^2),$$

откуда

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ \log_2 x = 1 \\ x = 2 > 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \dfrac{y^2}{1+y} = (1+y)(1+y^2) \\ y^4 + 2y^3 + 2y + 1 = 0 \\ y^4 + 1 + 2y(y^2+1) = 0. \end{array}$$

Поскольку $y^4 + 1 > 0$ и $y^2 + 1 > 0$, то должно быть $y < 0$, т.е. $\log_2 x < < 0 = \log_2 1$, а значит $x < 1$. Таким образом, во втором случае нет решений, удовлетворяющих условию $x > 1$.

Окончательно $x = 2$. ■

5.34.10. $x = 4\log_3 2 - 2\log_2 3$, $y = 3\log_2 3 - 4\log_3 2$. □ Преобразуем исходную систему, перейдя в первом уравнении к основаниям 2 и 3, а во втором — к логарифмам по основанию 5:

$$\begin{cases} 2^{2x+2y}\cdot 3^{3x+2y} = 144, \\ \log_5(3^{3x+2y} + 2^{2x+2y}) = \log_5 25, \\ 0{,}2x + 0{,}1y > 0, \\ 0{,}2x + 0{,}1y \neq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2^{2x+2y}\cdot 3^{3x+2y} = 144, \\ 2^{2x+2y} + 3^{3x+2y} = 25, \\ 0{,}2x + 0{,}1y > 0, \\ 0{,}2x + 0{,}1y \neq 1. \end{cases}$$

Полученная система равносильна совокупности двух систем:

$$\left.\begin{array}{c} \begin{cases} 2^{2x+2y} = 16, \\ 3^{3x+2y} = 9, \\ 0{,}2x + 0{,}1y > 0, \\ 0{,}2x + 0{,}1y \neq 1 \end{cases} \\ \text{нет решений} \end{array}\right| \begin{array}{l} \begin{cases} 2^{2x+2y} = 9, \\ 3^{3x+2y} = 16, \\ 0{,}2x + 0{,}1y > 0, \\ 0{,}2x + 0{,}1y \neq 1 \end{cases} \\ x = 4\log_3 2 - 2\log_2 3, \\ y = 3\log_2 3 - 4\log_3 2. \end{array}$$

Во втором случае решение найдено, так как $\log_2 3 \in (1;2)$, $\log_3 2 \in (0{,}5;1)$ и, следовательно,

$$0{,}2x + 0{,}1y = 0{,}4\cdot\log_3 2 - 0{,}1\cdot\log_2 3 \in (0;0{,}3) \subset \text{ОДЗ}. \quad ■$$

5.34.11. $x = 8\log_5 2 - 6\log_2 5$, $y = 8\log_2 5 - 12\log_5 2$.

5.34.12. $x = \sqrt{2}$, $y = 2$. ● При $x > 0$ выполнено $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$, поэтому неравенство $\log_2 x^2 \geqslant \log_2 y$ приводится к виду $2\log_2 x \geqslant \log_2 y$. Так как из уравнения $4\log_2^2 x + 1 = 2\log_2 y$ следует, что $\log_2 y > 0$, то можно возвести обе части неравенства $2\log_2 x \geqslant \log_2 y$ в квадрат: $4\log_2^2 x \geqslant \log_2^2 y$. Отсюда и из первого уравнения следует, что

$$0 = 4\log_2^2 x - 2\log_2 y + 1 \geqslant \log_2^2 y - 2\log_2 y + 1 = (\log_2 y - 1)^2 \geqslant 0.$$

Поэтому уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $\log_2 y = 1$, т. е. $y = 2$.

5.34.13. $x = 9$, $y = 3$. □ Второе уравнение системы равносильно совокупности двух уравнений

$$\left.\begin{array}{l} y-2=1, \\ y=3 \end{array}\right| \begin{array}{l} 1=\log_9(x+8) \\ x+8=9, \quad x=1. \end{array}$$

Так как $x = 1$ *не входит в ОДЗ первого уравнения системы* ($x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq -9$), то остается значение $y = 3$. Подставим его в первое уравнение системы: $\log_x \dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{x+9} = 0$ или $\log_x 3 = \dfrac{x}{x+9}$. Поделив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x}{x+9}$ на x и обозначив $t = \dfrac{9}{x}$, преобразуем последнее уравнение к виду $\log_{\frac{9}{t}} 3 = \dfrac{1}{1+t}$ или $\dfrac{1}{2-\log_3 t} = \dfrac{1}{1+t}$. Отсюда $2 - \log_3 t = 1 + t$, т. е. $\log_3 t = 1 - t$. Непосредственно подбирается корень $t = 1$. Других корней нет, так как при $t \neq 1$ функции $y = \log_3 t$ и $y = 1 - t$ имеют разные знаки (см. рис. 4). Таким образом, $t = 1$ и, значит, $x = 9$, $y = 3$. ■

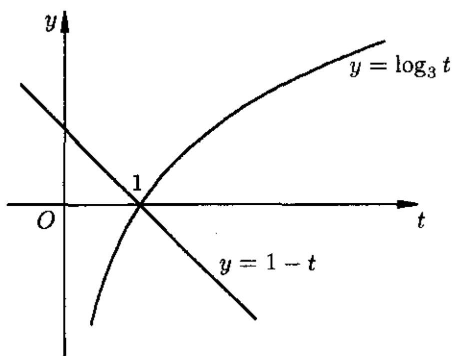


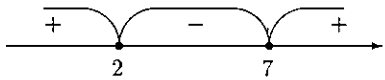
Рис. 4

6. Неравенства

6.1.1. 7. □ Перепишем неравенство в виде $2x > 13$, откуда получим, что $x > 6{,}5$. Наименьшим целым решением будет $x = 7$. ■

6.1.2. -1. **6.1.3.** -2. ● *Свести данное квадратное неравенство к линейному* $14x < -18$.

6.1.4. 7. □ Решим неравенство методом интервалов. Для этого найдем нули функции $f(x) = x^2 - 9x + 14$, решив квадратное уравнение $x^2 - 9x + 14 = 0$, корнями которого являются числа $x_1 = 2$, $x_2 = 7$. Нанесем на числовую ось эти точки.



Они разбивают ось на три интервала, в каждом из которых функция $f(x)$ сохраняет свой знак. Для определения знака функции в каждом интервале достаточно определить ее знак в произвольных точках каждого интервала. Поскольку $f(0) = 14 > 0$, $f(3) = -4 < 0$ и $f(8) = 6 > 0$, то решением данного неравенства будет множество $[2; 7]$. Наибольшим целым решением будет $x = 7$. ■

6.1.5. 11. ● Показать, что множеством решений неравенства будет интервал $(-10; 2)$. **6.1.6.** $(-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$. **6.1.7.** 1. ● Привести неравенство к виду $(x-1)^2 \leqslant 0$. **6.1.8.** -4. ● Воспользовавшись тем, что и (x^2+1) и (x^2+x+1) положительны для всех действительных значений x, привести неравенство к равносильному ему неравенству $(x+5)^5 > 0$, которое в свою очередь равносильно неравенству $x + 5 > 0$. **6.1.9.** $(-\infty; -2) \cup (1; 2)$. ● Решить уравнение $(x^3-1)\cdot(x^4-16) = 0$. Далее методом интервалов определить множество, на котором выполняется неравенство.

6.1.10. $(0; 5)$. □ Перенесем все члены неравенства в левую часть и перепишем его в виде: $\dfrac{5-x}{x} > 0$. ОДЗ неравенства является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Найдем нули функции $f(x) = \dfrac{5-x}{x}$, решив уравнение $\dfrac{5-x}{x} = 0$, корнем которого является $x = 5$. Отметив на ОДЗ точку $x = 5$, решим неравенство методом интервалов. ■

6.1.11. $(-\infty; -2)$. **6.1.12.** $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$. **6.1.13.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$. **6.1.14.** 0. **6.1.15.** $\left(-1; \frac{5}{3}\right) \cup (2; +\infty)$. **6.1.16.** 1. ● Показать, что решением неравенства является множество $(-\infty; -2) \cup [1; 4]$. **6.1.17.** $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$. **6.1.18.** $(-\infty; 0) \cup$ $\cup \left(\frac{1}{3}; 3\right)$. **6.1.19.** -4. ● Привести неравенство к виду $\dfrac{(x+4)^2}{x-1} \geqslant 0$. Далее показать (например, методом интервалов), что его решением является множество $\{-4\} \cup (1; +\infty)$. **6.1.20.** $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup [2; +\infty)$ **6.1.21.** $(3; +\infty)$. **6.1.22.** 9. **6.1.23.** $(-5; -1) \cup (3; +\infty)$. **6.1.24.** 2. **6.1.25.** $(-1-\sqrt{6}; -1+\sqrt{6})$. **6.1.26.** $(2; 3] \cup$ $\cup \left(\frac{11}{3}; +\infty\right)$.

6.1.27. $(2; 3)$. □ Знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства, не имеет корней. Следовательно, он всегда положителен, поскольку является квадратичной функцией с положительным коэффициентом при старшем члене. Тогда, умножив на него обе части неравенства, получим равносильное неравенство $3x^2 - 2x + 3 > 4x^2 - 7x + 9 \iff x^2 - 5x + 6 < 0$. Решив последнее, получим $x \in (2; 3)$. ■

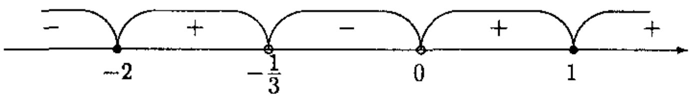
6.1.28. 6. ● Показать, что решением неравенства является множество $(1; 3) \cup$ $\cup (3; 5)$. **6.1.29.** -6. **6.1.30.** 2. **6.1.31.** $(6; 7] \cup [12; \infty)$. **6.1.32.** $-0{,}3$. ● Преобразовать неравенство к виду $\dfrac{5x-2}{(x^2-1)(x+8)} > 0$. Методом интервалов показать, что его решением будет множество $(-\infty; -8) \cup \left(-1; \frac{2}{5}\right) \cup (1; +\infty)$. **6.1.33.** 8.

6.1.34. $\left(\frac{1}{5};1\right)\cup(2;+\infty)$.

6.1.35. $(-\infty;-2]\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\{1\}$. □ Преобразуем неравенство к равносильному неравенству: $\frac{x^3-3x+2}{x(3x+1)}\leqslant 0$. ОДЗ неравенства является множество $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup(0;+\infty)$. Найдем нули функции $f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x(3x+1)}$.

$$\frac{x^3-3x+2}{x(3x+1)}=0\underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow}x^3-3x+2=0\Longleftrightarrow(x-1)^2(x+2)=0\Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow x=1$ или $x=-2$. На ОДЗ неравенства отметим критические точки $x=1$ и $x=-2$



и определим знаки функции $f(x)$ на каждом интервале. Учитывая, что неравенство нестрогое, выпишем ответ: $x\in(-\infty;-2]\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\{1\}$. ■

6.1.36. 4,75. **6.1.37.** 10,8. **6.1.38.** 9. ● Заметить, что $x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3$, и преобразовать неравенство к следующему виду: $\frac{(x+2)^3(5-x)}{(x-1)^2(x+8)}\geqslant 0$.

6.1.39. 1,875. □ Подставив в неравенство значение $y=\sqrt{8x-14}$, получим неравенство $2x+1<\frac{\left(\sqrt{8x-14}\right)^2+3}{2x-3}$. ОДЗ неравенства является множество $x\geqslant\frac{7}{4}$. Учитывая, что на ОДЗ выполнено $\left(\sqrt{8x-14}\right)^2=8x-14$ и $2x-3>0$, получим, что исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x\geqslant\frac{7}{4},\\ (2x+1)(2x-3)<(8x-14)+3.\end{cases}$$

Второе неравенство системы имеет решение: $x\in(1;2)$. Тогда решением системы является множество $\left[\frac{7}{4};2\right)$. Его серединой является число 1,875. ■

6.2.1. $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. □ Неравенство равносильно системе $\begin{cases}4x+1<3,\\4x+1>-3.\end{cases}$ Первое неравенство системы выполняется на множестве $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$, а второе — на множестве $(-1;\infty)$. Решением системы является множество $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, получающееся пересечением решений этих неравенств. ■

6.2.2. -10. □ Неравенство равносильно совокупности двух неравенств $x+3{,}5>6$ и $x+3{,}5<-6$. Решением данной совокупности является множество, являющееся объединением решений этих неравенств, т. е. $x\in(-\infty;-9{,}5)\cup\cup(2{,}5;\infty)$. Наибольшим целым отрицательным решением будет число -10. ■

6.2.3. $(-\infty;-4)\cup(-2;0)\cup(2;\infty)$. **6.2.4.** -6.

6.2.5. $(4;6)$. ☐ Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x-3>0 \\ x^2-8x+15<x-3 \\ x^2-8x+15>3-x. \end{cases}$$

Решениями каждого неравенства системы являются, соответственно, множества $(3;\infty)$, $(3;6)$ и $(-\infty;3)\cup(4;\infty)$. Пересекая эти множества, получаем ответ. ■

6.2.6. 4.

6.2.7. $(-\infty;1)$. ☐ Поскольку модуль любой величины задается различными аналитическими выражениями, зависящими от знака этой величины, разобьем множество всех действительных чисел на два множества: множество отрицательных чисел и множество неотрицательных чисел. Тогда неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x<0 \\ 3x-1<-2x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x\geqslant 0 \\ 3x-1<2x. \end{cases}$$

Решением первой — является множество $(-\infty;0)$, а второй — множество $[0;1)$. Взяв объединение этих множеств, получаем ответ. ■

6.2.8. $(-\infty;1)$. **6.2.9.** $[2;4]$. ● Заметив, что выражение $6x-24$, стоящее под знаком модуля, обращается в нуль в точке $x=4$, разбить множество действительных чисел на два множества: $(-\infty;4]$ и $(4;\infty)$. После этого показать, что неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x\leqslant 4 \\ x^2-6x+24\leqslant 16 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x>4 \\ x^2+6x-24\leqslant 16. \end{cases}$$

6.2.10. 2. ☐ Неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} x\geqslant 2 \\ x^2+x-10<2x-4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x<2 \\ x^2+x-10<4-2x. \end{cases}$$

Первая система имеет решение: $[2;3)$. Следовательно, наибольшим целым решением неравенства будет число 2, так как вторая система, если и имеет решения, то меньшие 2. ■

6.2.11. $(-\infty;-1]\cup\{0\}\cup[3;\infty)$. **6.2.12.** $[-2\sqrt{2};0)\cup(0;2\sqrt{2}]$. ● Решить неравенство методом интервалов.

6.2.13. $(-\infty;0)\cup(3;\infty)$. ☐ Выражения $x-1$ и $2-x$, стоящие под знаками модуля, обращаются в нуль в точках $x=1$ и $x=2$ соответственно. Множество действительных чисел представим в виде объединения множеств $(-\infty;1)\cup[1;2]\cup(2;\infty)$. На каждом из этих множеств оба выражения $x-1$ и $2-x$ сохраняют свой знак, определить который можно (как и в методе интервалов), выбирая по произвольной точке из каждого интервала и определяя знак выражений в этой точке. Непосредственно убеждаемся, что на множестве $(-\infty;1)$ выполняются соотношения $x-1<0$, $2-x>0$; на множестве $[1;2]$ — соотношения $x-1\geqslant 0$, $2-x\geqslant 0$; на множестве $(2;\infty)$ — соотношения $x-1>0$, $2-x<0$. Тогда исходное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x<1 \\ (1-x)+(2-x)>3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 2 \\ (x-1)+(2-x)>3 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ (x-1)+(x-2) > 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1 \\ x < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 > 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x > 3. \end{cases}$$

Вторая система не имеет решений, так как второе неравенство в ней не имеет решений; решениями первой и третьей систем являются, соответственно, множества $(-\infty; 0)$ и $(3; \infty)$. Объединяя их, получаем ответ. ■

6.2.14. -5. **6.2.15.** -1. **6.2.16.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; \infty)$. **6.2.17.** $\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

● Представить неравенство в виде совокупности четырех систем

$$\begin{cases} x < -1 \\ x^2 - 1 < x^2 + x + 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -1 \leqslant x < 0 \\ 1 - x^2 < x^2 + x + 1 \end{cases} \text{ или }$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x < 1 \\ 1 - x^2 < x^2 - x + 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x^2 - 1 < x^2 - x + 1. \end{cases}$$

6.2.18. $(\sqrt{2}; 2\sqrt{3})$. **6.2.19.** $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; \infty)$.

6.3.1. 1,25. □ Так как левая часть неравенства неотрицательна на ОДЗ неравенства, то неравенство выполнено для всех значений x из ОДЗ. Чтобы найти ОДЗ, необходимо решить неравенство $\dfrac{x-2}{1-2x} \geqslant 0$. Его решением является промежуток $\left(\frac{1}{2}; 2\right]$, серединой которого является число 1,25. ■

6.3.2. $-1{,}5$.

6.3.3. -2. □ ОДЗ неравенства является множество $[-5; \infty)$. Так как обе части неравенства неотрицательны, то оно равносильно на ОДЗ неравенству $(x+5) < 4$, получающемуся из исходного возведением в квадрат обеих частей неравенства. Из последнего неравенства получаем, что $x < -1$, и, учитывая ОДЗ, имеем: $x \in [-5; -1)$. Наибольшим целым числом в этом промежутке является $x = -2$. ■

6.3.4. 16.

6.3.5. 5. □ ОДЗ неравенства является множество решений системы

$$\begin{cases} 3x - 10 \geqslant 0 \\ 6 - x \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \left[\frac{10}{3}; 6\right].$$

Так как обе части неравенства неотрицательны, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \in \left[\dfrac{10}{3}; 6\right] \\ 3x - 10 > 6 - x, \end{cases}$$

решением которой является множество $(4; 6]$. Число 5 является серединой промежутка. ■

6.3.6. 4.

6.3.7. $[1; 2)$. □ ОДЗ неравенства является множество $[1; \infty)$. Так как левая часть неравенства неотрицательна, то для выполнения неравенства необходимо, чтобы и правая часть была такова, т. е. $3 - x \geqslant 0$. На множестве решений последнего неравенства обе части исходного неравенства неотрицательны. Поэтому неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \in [1; \infty) \\ 3 - x \geqslant 0 \\ x - 1 < (3-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 3 \\ x^2 - 7x + 10 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 3 \\ x \in (-\infty; 2) \cup (5; \infty). \end{cases}$$

Отсюда $x \in [1; 2)$. ■

6.3.8. $\left[-\frac{7}{3}; -1\right)$. ● Неравенство равносильно системе $\begin{cases} 7+3x \geqslant 0 \\ 1-x > 0 \\ 7+3x < (1-x)^2. \end{cases}$

6.3.9. $\left[\frac{20}{9}; 4\right) \cup (5; \infty)$.

6.3.10. $[2; 6)$. □ ОДЗ неравенства является множество $[2; \infty)$. ОДЗ разобьем на два множества M_1 и M_2, где M_1 — множество тех значений x, при которых левая часть отрицательна, а M_2 — множество значений x, при которых левая часть неотрицательна. На множестве M_1 неравенство, очевидно, выполнено, а на множестве M_2 оно равносильно (т. к. обе части неравенства неотрицательны) неравенству $(x-4)^2 < x-2$. Таким образом исходное неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} x \in [2; \infty) \\ x-4 < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \in [2; \infty) \\ x-4 \geqslant 0 \\ (x-4)^2 < x-2. \end{cases}$$

Вторую систему можно несколько упростить, заметив, что первое условие является следствием третьего, а, стало быть, его можно не учитывать при решении (оно автоматически будет выполнено). Решением первой системы является множество $[2; 4)$, а второй — множество $[4; 6)$. Объединяя их, получаем ответ $x \in [2, 6)$. ■

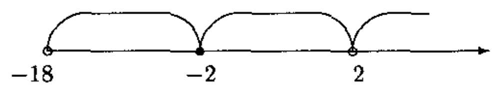
6.3.11. $[3; \infty)$. **6.3.12.** $(-\infty; 1)$. **6.3.13.** $\left(-7; \frac{11}{2}\right]$. ● Получить равносильную неравенству совокупность систем:

$$\begin{cases} 11-2x \geqslant 0 \\ 3-x < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3-x \geqslant 0 \\ 4(11-2x) \geqslant (3-x)^2. \end{cases}$$

6.3.14. $[2; \infty)$. **6.3.15.** $[-1{,}5; 3]$. **6.3.16.** $\left(-\frac{5}{8}; \frac{12}{5}\right]$. **6.3.17.** $(-\infty; -6]$. **6.3.18.** $(-\infty; -7] \cup \left(\frac{1}{5}; \infty\right)$. **6.3.19.** $[4; +\infty)$. **6.3.20.** $[-\sqrt{5}; 1]$. **6.3.21.** 3.

6.3.22. $(-\infty; -5] \cup \left[1; \frac{8+\sqrt{22}}{3}\right)$. **6.3.23.** $(-\infty; 4)$. **6.3.24.** $(-\infty; -5)$. **6.3.25.** $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup (1; \infty)$. **6.3.26.** 1. **6.3.27.** $\left[-9; 6{,}8 + 0{,}4 \cdot \sqrt{29}\right)$.

6.3.28. $(-18; -2) \cup (2; \infty)$. □ Решим неравенство обобщенным методом интервалов. Найдем ОДЗ неравенства: $x \in (-18; 2) \cup (2; \infty)$. После этого найдем критические точки, т. е. те точки, в которых выполняется равенство $\frac{1}{\sqrt{x+18}} = \frac{1}{2-x}$. Решив это уравнение, находим $x = -2$. Наносим критическую точку на ОДЗ:



ОДЗ разбилось на три промежутка. Выясним, выполняется или нет исходное неравенство на каждом промежутке. Для этого проверим выполнение неравенства для произвольной точки каждого интервала. Выбрав, например,

$x = -9$, $x = 0$, $x = 3$, убеждаемся, что неравенство выполнено на первом и третьем интервалах. Так как неравенство строгое, получим следующий ответ: $x \in (-18; -2) \cup (2; \infty)$. ■

6.3.29. 1,4. ● Заметить, что ОДЗ неравенства являются все действительные числа, а правая часть неравенства (как и левая) неотрицательна. Возвести обе части неравенства в квадрат и воспользоваться соотношением $|x-3|^2 = (x-3)^2$.

6.3.30. $(-\infty; -8{,}5] \cup \left(\dfrac{\sqrt{185}-9}{2}; \infty\right)$. **6.3.31.** 5. ● Заметить, что неравенство выполнено для наименьшего значения из ОДЗ.

6.3.32. $[1; 3] \cup \{-2\}$. □ Решим обобщенным методом интервалов. ОДЗ неравенства является множество $[-2; 3]$. Критическими точками являются решения уравнения $(x-1)\cdot\sqrt{-x^2+x+6} = 0$, т.е. точки $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$. ОДЗ разбивается этими точками на два интервала: $(-2; 1)$ и $(1; 3)$. Неравенство выполняется только на втором интервале. Учитывая то, что неравенство нестрогое, к интервалу $(1; 3)$ добавим все критические точки. Таким образом получаем ответ: $x \in \{-2\} \cup [1; 3]$. ■

6.3.33. $\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$. **6.3.34.** $[6; \infty)$. ● Заметить, что неравенство выполнено на всей ОДЗ. **6.3.35.** 0. **6.3.36.** 3. **6.3.37.** $\left[\dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{4}\right] \cup \left\{\dfrac{2}{5}\right\}$. **6.3.38.** $[-4; -2] \cup [1; 2]$.

6.3.39. $[-4; 1] \cup \{2\}$. **6.3.40.** $\{-12\} \cup [-3; 12]$.

6.3.41. 4. □ Сделаем замену $\sqrt{x} = t$. Тогда неравенство примет вид $t^2 - 5t + 2 \leqslant \leqslant 0$. Его решением будет множество $t \in \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$. Тогда $\dfrac{1}{2} \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2$ и, следовательно, $\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant 4$. Число 4 будет наибольшим решением. ■

6.3.42. 16. ● Сделать замену $t = \sqrt[4]{x}$. **6.3.43.** $(-4{,}84; 4)$. ● Сделать замену $\sqrt{x+5} = t$. **6.3.44.** 31,5. ● Сделать замену $\sqrt[6]{x+1} = t$. **6.3.45.** $[0; 1) \cup (4; \infty)$.

6.3.46. $[0; 4) \cup (9; \infty)$.

6.3.47. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$. □ ОДЗ неравенства является отрезок $[-1; 1]$. Преобразуем с помощью равносильных преобразований данное неравенство.

$$\sqrt{1+x} > 1 + \sqrt{1-x} \iff \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} > 1 \iff \begin{cases} \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} > 0 \\ 1 + x - 2\sqrt{1-x^2} + 1 - x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1;\, 1] \\ \sqrt{1+x} > \sqrt{1-x} \\ 1 > 2\sqrt{1-x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [-1;\, 1] \\ 1 + x > 1 - x \\ 1 > 4(1-x^2) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (0;\, 1] \\ 4x^2 > 3 \end{cases} \iff x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\, 1\right]. \ ■$$

6.3.48. $[0; 9]$. **6.3.49.** $\left[0; \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}\right]$. **6.3.50.** $[5; \infty)$. ● Заметить, что на ОДЗ левая часть неравенства положительна, а правая — отрицательна. **6.3.51.** 1. ● Проверить выполнение неравенства для целых чисел, принадлежащих ОДЗ.

6.3.52. $\{0\} \cup (1; \infty)$. **6.3.53.** $(1; 3)$.

6.4.1. $(-\infty; 13)$. □ Преобразуем неравенство к виду $(2^3)^{5-\frac{x}{3}} > 2^2$, а затем и к виду $2^{15-x} > 2^2$. Поскольку функция $y = 2^t$ — монотонно возрастающая, то последнее неравенство равносильно неравенству $15 - x > 2$, откуда и получаем ответ. ■

6.4.2. $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$. □ Неравенство равносильно неравенству

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3+2x-x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3}.$$

Далее, пользуясь тем, что функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ монотонно убывающая, преобразуем последнее неравенство к равносильному: $3 + 2x - x^2 < 3x - 3$, решением которого является множество $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$. ■

6.4.3. 12. ● Преобразовать неравенство к виду $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^{x-10} > \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^3$ и воспользоваться монотонным убыванием функции $y = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^t$. **6.4.4.** $(-1; 7)$. **6.4.5.** $(-8; 4)$.

6.4.6. -3. □ Преобразуем исходное неравенство: $\frac{(0{,}2)^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}} > \frac{(0{,}04)^x}{25} \iff \iff 5^{-x-0{,}5} \cdot 5^{-0{,}5} > 5^{-2x} \cdot 5^{-2} \iff 5^{-x-1} > 5^{-2x-2} \iff -x - 1 < -2x - 2$. Отсюда $x > -1$, тогда $4x > -4$ и наименьшим целым числом, принадлежащим множеству $(-4; \infty)$, будет -3. ■

6.4.7. 1. **6.4.8.** 0. ● В левой части неравенства вынести за скобки величину 4^x. **6.4.9.** $(0; 1)$. **6.4.10.** $\left(-\infty; \frac{9}{5}\right] \cup (3; \infty)$. **6.4.11.** $(0; 1)$.

6.4.12. $\left(-\infty; \log_7 \frac{16}{3}\right]$. □ Поскольку знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства, положителен, то неравенство равносильно следующему: $7^x - 30 \leqslant -14 \cdot (7^{x-1} + 1)$. Решив последнее неравенство, получаем ответ: $x \in \left(-\infty; \log_7 \frac{16}{3}\right]$. ■

6.4.13. $(0; 2]$. **6.4.14.** $(-1; 0) \cup (0; 1)$. **6.4.15.** 3. **6.4.16.** 63. ● Получить равносильное исходному неравенство $72 - x - \sqrt{x} > 0$ и сделать замену $\sqrt{x} = t$. **6.4.17.** $(-\infty; 1) \cup [2; 3]$. **6.4.18.** 3. ● Показать, что решением уравнения будет множество $(-\infty; -1) \cup \{3\}$. **6.4.19.** $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (3; \infty)$.

6.4.20. $(1; 3]$. □ ОДЗ неравенства является множество $(1; \infty)$. При помощи основного показательно-логарифмического тождества неравенство сводится к равносильному на ОДЗ неравенству $x^2 - x \leqslant 3x - 3$, решением которого является множество $[1; 3]$. Учитывая ОДЗ, получаем ответ: $x \in (1; 3]$. ■

6.4.21. $[-4; -2) \cup (0; \infty)$.

6.4.22. $(0; \infty)$. □ Преобразуем исходное неравенство: $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > > 5^{x+1} - 5^{x+2} \iff 2 \cdot 2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x+1} - 8 \cdot 2^{x+1} > 5^{x+1} - 5 \cdot 5^{x+1} \iff 10 \cdot 2^{x+1} < < 4 \cdot 5^{x+1}$. Разделив последнее неравенство на положительную величину $10 \cdot 5^{x+1}$, получим: $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} < \frac{2}{5}$, откуда вытекает, что $x > 0$. ■

6.4.23. $[-2; \infty)$.

6.4.24. $(1; 2)$. □ Сделав замену $3^{x-1} = t$, получим неравенство $t^2 - 4t + 3 < 0$. Его решением будет множество $(1; 3)$. Тогда исходное неравенство равносильно системе $1 \leqslant 3^{x-1} \leqslant 3$, откуда и получаем ответ. ■

6.4.25. $(-\infty; 2)$.

6.4.26. $(0; \infty)$. □ Замена $5^x = t$ приводит неравенство к виду $5t^2 - t - 4 > 0$, откуда или $t < -\frac{4}{5}$ или $t > 1$. Первое неравенство решений не имеет, так как $t = 5^x > 0$. Решением второго является множество $x \in (0; \infty)$. ■

6.4.27. $\left[-\sqrt{\log_3 4};\ \sqrt{\log_3 4}\right]$. □ Заменив 3^{x^2} на t, получим неравенство $2t^2 - 9t + 4 \leqslant 0$, откуда получаем, что $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 4$. Совершив обратную замену, получаем систему $\begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant 3^{x^2} \\ 3^{x^2} \leqslant 4. \end{cases}$ Первое неравенство выполняется для всех x, так как $3^{x^2} \geqslant 3^0 = 1$. Из второго получаем неравенство $x^2 \leqslant \log_3 4$, решением которого будет множество $\left[-\sqrt{\log_3 4}; \sqrt{\log_3 4}\right]$. ■

6.4.28. $(-\infty; -1)$.

6.4.29. 0. □ Замена $2^{2x+1} = t$ приводит неравенство к виду $t - \frac{21}{4 \cdot t} + 2 \geqslant 0$. Поскольку $t > 0$, то неравенство равносильно следующему: $4t^2 + 8t - 21 \geqslant 0$. Тогда $t \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \infty\right)$. Учитывая, что $t > 0$, получаем

$$t \geqslant \frac{3}{2} \iff 2^{2x+1} \geqslant \frac{3}{2} \iff 2x + 1 \geqslant \log_2 \frac{3}{2} \iff x \geqslant \log_2 \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Так как $0 > \log_2 \sqrt{\frac{3}{4}} > \log_2 \frac{1}{2} = -1$, то наименьшим целым числом, удовлетворяющим неравенству, будет нуль. ■

6.4.30. 0. **6.4.31.** $(-\infty; \log_3 4)$. **6.4.32.** 3. **6.4.33.** 0. **6.4.34.** 2. ● Воспользоваться тождеством $a^{\log_a b} = b$.

6.4.35. $[0; \infty)$. □ Поскольку $25^{\log_3^{-1} 5} = (5^2)^{\frac{1}{\log_3 5}} = 5^{2\log_5 3} = 9$, то сделав замену $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} = t$, получим неравенство $t^2 - 8t - 9 < 0$, откуда $t \in (-1; 9)$. Сделав обратную замену, и учитывая, что $t > 0$, имеем $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} < 9 \iff \sqrt{x} > \log_{\frac{1}{2}} 9$. Так как $\log_{\frac{1}{2}} 9 < 0$, то последнее неравенство выполнено для всех значений x, принадлежащих ОДЗ, т. е. $x \geqslant 0$. ■

6.4.36. $[0; 1)$. **6.4.37.** $[0; 4]$. **6.4.38.** 8,5.

6.5.1. $[-4; -3) \cup (0; 1]$. □ Выпишем ОДЗ неравенства: $x^2 + 3x > 0 \iff x \in (-\infty; -3) \cup (0; \infty)$. Так как $y = \log_2 t$ — монотонно возрастающая функция, то исходное неравенство равносильно на ОДЗ неравенству: $x^2 + 3x \leqslant 4$, решением которого является множество $[-4; 1]$. Пересекая это множество с ОДЗ, получаем ответ: $x \in [-4; -3) \cup (0; 1]$. ■

6.5.2. $(-1; 1) \cup (3; 5)$. **6.5.3.** $(3 - 2\sqrt{3}; 3 - \sqrt{7}] \cup [3 + \sqrt{7}; 3 + 2\sqrt{3})$. ● Воспользовавшись тем, что функция $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} t$ монотонно убывающая функция на своей области определения ($t > 0$), привести неравенство к равносильной ему системе

$$\begin{cases} -x^2 + 6x + 3 > 0, \\ -x^2 + 6x + 3 \leqslant 5. \end{cases}$$

6.5.4. $[-1; 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}; 3]$. **6.5.5.** $(0; 1)$. **6.5.6.** 1. **6.5.7.** 0,5. ● Привести неравенство к системе $0 < \frac{2 - 3x}{x} \leqslant 3$. Показать, что решением ее будет множество $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **6.5.8.** $(1; 2) \cup (3; 4)$.

6.5.9. $\left(-\frac{2}{3}; 2-\sqrt{6}\right] \cup \left[2+\sqrt{6}; \infty\right)$. □ Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x+2>0 \\ x^2-x \geqslant 3x+2. \end{cases}$$

Условие $x^2 - x > 0$ является следствием системы, а потому не включено в нее. Решением первого неравенства системы является множество $\left(-\frac{2}{3}; \infty\right)$, а второго — множество $(-\infty; 2-\sqrt{6}] \cup [2+\sqrt{6}; \infty)$. Так как $-\frac{2}{3} < 2-\sqrt{6}$, то решением системы будет множество $\left(-\frac{2}{3}; 2-\sqrt{6}\right] \cup \left[2+\sqrt{6}; \infty\right)$. ■

6.5.10. $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{7}\right]$. **6.5.11.** $\left(\frac{7}{3}; \infty\right)$.

6.5.12. $(4; 1+\sqrt{10}]$. □ ОДЗ неравенства является множество $(4; \infty)$. Преобразовав неравенство к виду $\log_3\big((x+2)(x-4)\big) \leqslant 0$, получим равносильное ему на ОДЗ неравенство $x^2 - 2x - 9 \leqslant 0$. Решением последнего будет множество $[1-\sqrt{10}; 1+\sqrt{10}]$. Пересекая его с ОДЗ, получим ответ: $x \in (4; 1+\sqrt{10}]$. ■

6.5.13. $\left(-\frac{7}{4}; -1\right] \cup [7; \infty)$. **6.5.14.** $(-\frac{1}{3}; 0)$. ● Показать, что неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x+1>0 \\ 1-x>0 \\ (1-x)^2>3x+1. \end{cases}$$

6.5.15. $(5; 6)$. **6.5.16.** $(3; 8)$. **6.5.17.** 9. ● Показать, что решением неравенства будет множество $\left(-\infty; \frac{48}{5}\right]$. **6.5.18.** 4. **6.5.19.** $(-2; 1)$. **6.5.20.** $\left[\frac{7-\sqrt{33}}{2}; 3\right)$.

6.5.21. $\left(\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{34}}{9}\right]$. **6.5.22.** $(2; 3) \cup (4; 5)$. **6.5.23.** $(3; 10)$.

6.5.24. $\left(2; \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{5}}{2}; 5\right)$. ● Перейти к логарифму по одному основанию. **6.5.25.** 5,5. **6.5.26.** $(1; \infty)$. **6.5.27.** 3. ● Показать, что неравенство имеет смысл при $1 < x < 4$. Проверкой убедитесь, что $x = 3$ удовлетворяет неравенству. **6.5.28.** $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. **6.5.29.** $(-2; 8)$. **6.5.30.** $\left(1; \frac{3}{2}\right]$. **6.5.31.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

6.5.32. $\left(0; \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$. □ На ОДЗ $(x > 0)$ неравенство равносильно неравенству $\log_5 x\sqrt{x} < \log_5 \frac{1}{\sqrt{3}}$, которое в свою очередь равносильно неравенству $\sqrt{x^3} < \frac{1}{\sqrt{3}} \iff x^3 < \frac{1}{3} \iff x < \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. Учитывая ОДЗ, получим $x \in \left(0; \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$. ■

6.5.33. $\left(0; \frac{1}{10}\right] \cup [100; \infty)$. □ Сделав замену $\lg x = t$, получим неравенство $t^2 - t - 2 \geqslant 0$. Тогда $t \leqslant -1$ или $t \geqslant 2$. Следовательно, $\lg x \leqslant -1$ или $\lg x \geqslant 2$, откуда получаем: $\left(0; \frac{1}{10}\right] \cup [100; \infty)$. ■

6.5.34. $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [4; \infty)$. **6.5.35.** -3. ● Заметить, что в левой части неравенства стоит полный квадрат. **6.5.36.** -28. **6.5.37.** $(0; 3) \cup (243; \infty)$. **6.5.38.** $(1; 4] \cup [28; \infty)$. ● Преобразовать неравенство к виду $\log^2_{\frac{1}{3}}(x-1) + 4\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + 3 \geqslant 0$ и сделать замену $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) = t$.

6.5.39. $(0;1)\cup(16;\infty)$. □ Сделаем замену $\log_2 x = t$. Тогда получим неравенство $\dfrac{4}{(t-4)t} > 0$. Решая последнее, получим $t \in (-\infty;0)\cup(4;\infty)$. Тогда $\log_2 x < 0$ или $\log_2 x > 4$. Следовательно, $x \in (0;1)\cup(16;\infty)$. ■

6.5.40. $(0;0{,}01)\cup(0{,}1;1000)$. **6.5.41.** $\left(0;\frac{9}{100}\right]\cup\left[1;\frac{10}{3}\right)$. **6.5.42.** $(0;0{,}1)\cup(10;\infty)$.

6.5.43. $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup(1;4)$. □ ОДЗ неравенства является множество решений системы $\begin{cases} x>0, \quad x\neq 1 \\ 1-2\log_x 2 \neq 0, \end{cases}$ т. е. множество $(0;1)\cup(1;4)\cup(4;\infty)$. Воспользовавшись равенством $\log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x}$ и заменив $t=\log_2 x$, получим после несложных преобразований неравенство $\dfrac{t(t+1)}{t-2} \leqslant 0$. Его решением будет множество $t \in (-\infty;-1]\cup[0;2)$. Тогда $x \in \left(0;\frac{1}{2}\right]\cup[1;4)$. Учитывая ОДЗ, получим окончательный ответ. ■

6.5.44. $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$. **6.5.45.** 101. ● Показать, что решением неравенства будет множество $\left(0;\frac{1}{10}\right)\cup(10^2;10^3)\cup(10^5;\infty)$. **6.5.46.** $(0{,}25;0{,}5]\cup[2;\infty)$. **6.5.47.** $(0;2]\cup[4;\infty)$. **6.5.48.** $(1;2]$.

6.5.49. $(1;\sqrt[3]{5})$. □ Решение получается из следующей цепочки равносильных преобразований: $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)\right) > 0 \iff \log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x) > 1 \iff 0 < \log_5 x < \frac{1}{3} \iff 1 < x < \sqrt[3]{5}$. ■

6.5.50. $(1;2)\cup(3;5)$. ● В левой части неравенства перейти к логарифму по основанию 2. **6.5.51.** $(-2;0)$. ● Показать, что $\sqrt{11}-\sqrt{5} > 1$. **6.5.52.** $(1;3)$. ● Показать, что $2\sqrt{2}-\sqrt{3} > 1$. **6.5.53.** $(-3;-1)$.

6.5.54. $[-1;0)\cup(0;3]$. □ Так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, то неравенство равносильно системе $\begin{cases} x \neq 0, \\ x^2 \leqslant 2x+3, \end{cases}$ решением которой является множество $[-1;0)\cup(0;3]$. ■

6.5.55. $(-1;0)\cup(0;4)$. ● Показать, что $2\sin\frac{\pi}{7} < 1$.

6.5.56. $\frac{7}{8}$. □ Решение вытекает из цепочки равносильных преобразований:

$$\log_2\frac{\left(\sqrt{4x+1}\right)^2+15}{x^2+2} + \log_{\frac{1}{2}}\frac{28}{x+5} > 0 \iff \begin{cases} 4x+1 \geqslant 0 \\ \log_2\dfrac{4(x+4)}{x^2+2} + \log_2\dfrac{x+5}{28} > 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 4x+1 \geqslant 0 \\ \dfrac{(x+4)(x+5)}{7(x^2+2)} > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x+1 \geqslant 0 \\ 2x^2-3x-2 < 0 \end{cases} \iff x \in \left[-\frac{1}{4};2\right).$$

Серединой промежутка является точка $x = \frac{7}{8}$. ■

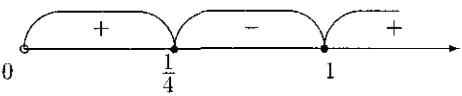
6.5.57. $(1;100)$. ● Привести неравенство к двойному неравенству $-1 < \lg x - 1 < 1$. **6.5.58.** $[0{,}5;8)$.

6.6.1. 1. □ Решим неравенство обобщенным методом интервалов.

1) Находим ОДЗ неравенства: $x \in (0; \infty)$.

2) Находим критические точки, решая уравнение $(4x-1)\log_2 x = 0 \iff \iff x = \frac{1}{4}$ или $x = 1$.

3) Наносим критические точки на ОДЗ и определяем знак функции $f(x) = = (4x-1)\cdot\log_2 x$ в каждом промежутке:



Тогда наименьшее целое решение — это точка $x = 1$. ■

6.6.2. $[-2; 3]$. **6.6.3.** $\left(3; \frac{7}{2}\right) \cup (4; \infty)$. **6.6.4.** $[-1; 1)$. ● Показать, что на ОДЗ неравенства, т. е. на множестве $(-2; 1)$ неравенство равносильно неравенству $\log_{0,1}(x+2) \leqslant 0$. **6.6.5.** $[-0{,}5; 3)$. **6.6.6.** Нет решений.

6.6.7. 0,245. □ Решение вытекает из следующей цепочки равносильных преобразований: $2^{\log_{0,7}(1+2x)} > 4 \iff \log_{0,7}(1+2x) > 2 \iff 0 < 1+2x < 0{,}49 \iff \iff -0{,}5 < x < -0{,}255$. Таким образом, длина промежутка, на котором выполняется неравенство, равна 0,245. ■

6.6.8. -36. **6.6.9.** $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

6.6.10. $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; -1\right) \cup \left(1; \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$. □ Решение вытекает из следующей цепочки равносильных преобразований:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)} > 1 \iff \log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right) < 0 \iff 0 < \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right) < 1$$

$$\iff 1 > \left(x^2-\frac{4}{5}\right) > \frac{1}{5} \iff \frac{9}{5} > x^2 > 1 \iff x \in \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; -1\right) \cup \left(1; \frac{3}{\sqrt{5}}\right). \ \blacksquare$$

6.6.11. $(-\infty; 2{,}5) \cup (\log_2 6; 3)$. ● Решить неравенство обобщенным методом интервалов; показать, что $2{,}5 < \log_2 6$.

6.6.12. $[0; 2) \cup [16; \infty)$. □ Решим неравенство обобщенным методом интервалов.

1) Множество $[0; 2) \cup (2; \infty)$ является ОДЗ неравенства.

2) Критические точки находим из равенства $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$. Решая последнее уравнение как квадратное (т. к. $x = (\sqrt{x})^2$), получаем $\sqrt{x} = 4$ или $\sqrt{x} = -2$. Последнее равенство не имеет корней, а решением первого будет $x = 16$ (удовлетворяет ОДЗ).

3) Исследуя знак функции $f(x) = \dfrac{x - 2\sqrt{x} - 8}{2^x - 4}$ на промежутках $[0; 2)$, $(2; 16)$, $[16; \infty)$, получаем ответ: $x \in [0; 2) \cup [16; \infty)$. ■

6.6.13. 2. ● Заметить, что на ОДЗ знаменатель дроби всегда отрицателен, поэтому неравенство выполняется лишь в том случае, когда числитель равен нулю; отбросить корень, не принадлежащий ОДЗ.

6.6.14. $\left(\frac{1}{125}; 125\right)$. **6.6.15.** $(-1; 2\log_3 5] \cup (3; \infty)$. ● Свести неравенство к равносильному ему неравенству $\dfrac{4\cdot(3^x - 25)}{(x+1)(x-3)} \geqslant 0$ и решить его методом интервалов. **6.6.16.** 4. ● Заметить, что на ОДЗ ($x > 3$) неравенства неравенство равносильно следующему: $3\cdot 2^{\frac{x}{2}} - 7\cdot 2^{\frac{x}{4}} - 20 \leqslant 0$. **6.6.17.** 2. **6.6.18.** $(-2; -1] \cup [0; 3)$.

6.7.1. $(2;5)$. **6.7.2.** $\left[-3;\frac{-3+\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{37}}{2};\infty\right)$. **6.7.3.** $(-2;2)\cup[4;\infty)$. **6.7.4.** $(3;\infty)$. **6.7.5.** $(-\infty;0]\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$. **6.7.6.** $[2;3]\cup(4;\infty)$. **6.7.7.** $[-1;3)$. **6.7.8.** $(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{1}{3};\infty\right)$. **6.7.9.** $\left[-\frac{3}{5};0\right)\cup\left(\frac{1}{10};\infty\right)$. **6.7.10.** $(0;2)\cup(2;3]$.

6.7.11. 21. ● Показать, что областью определения функции является множество $(-2;-1)\cup(-1;6]$. **6.7.12.** 10. **6.7.13.** $(3;4)$; $x=3{,}5$ — середина промежутка. **6.7.14.** $\left[-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(\frac{2}{3};1\right]$. **6.7.15.** $\left[-3;-\frac{8}{3}\right)\cup\left(0;\frac{1}{3}\right]$. **6.7.16.** $\left[\frac{19}{3};7\right)$. **6.7.17.** $(0;2]$. **6.7.18.** $[3;\infty)$. **6.7.19.** $[2;3]$. **6.7.20.** $(1;\infty)$. **6.7.21.** $(-\infty;-6]\cup\left(\frac{2}{5};\infty\right)$. **6.7.22.** 18. **6.7.23.** 10. **6.7.24.** $(0;1)\cup(1;\infty)$. **6.7.25.** $(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(8;\infty)$. **6.7.26.** $[2;\infty)$. **6.7.27.** $\left(\frac{3}{7};1\right]\cup(3;6]$. **6.7.28.** $[-1;3]$. **6.7.29.** 18. ● Показать, *что областью определения функции является множество $(2;6]$.* ***6.7.30.*** $(0;1]\cup(3;\infty)$. **6.7.31.** $(-1;0]\cup(1;\infty)$. **6.7.32.** $(0;1)\cup[4;\infty)$. **6.7.33.** $(1;\infty)$.

6.8.1. 11. **6.8.2.** $(-\infty;7)$. **6.8.3.** 3. ● Показать, что решением системы является множество $(2;4)$. **6.8.4.** -4. **6.8.5.** $(-\infty;-6)\cup(1;10{,}8)$.

6.8.6. $\varnothing$ □ Решением первого неравенства будет множество $\left(\frac{5-\sqrt{15}}{2};\frac{5+\sqrt{15}}{2}\right)$. Решением второго неравенства — множество $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2};\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$. Покажем, что эти множества не пересекаются. Для этого достаточно показать, что $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}<\frac{5-\sqrt{15}}{2}$. Действительно, так как $64\cdot15=960<961=31^2$, то $8\sqrt{15}<31$. Тогда $17<64-16\sqrt{15}+15$, следовательно $\sqrt{17}<8-\sqrt{15}$. Значит, $-3+\sqrt{17}<5-\sqrt{15}$, и, окончательно $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}<\frac{5-\sqrt{15}}{2}$. Следовательно множеством решения системы будет пустое множество. ■

6.8.7. $(-1;0)\cup(3;6)$. **6.8.8.** 3,5. **6.8.9.** 1. **6.8.10.** 1. **6.8.11.** $(-2;-1]\cup[1;4)$. **6.8.12.** 1,5. **6.8.13.** 10. **6.8.14.** 5. **6.8.15.** 3. **6.8.16.** 7. **6.8.17.** 5. **6.8.18.** 1. **6.8.19.** 1,5. ● Показать, что решением первого неравенства будет множество $\left\{\frac{3}{2}\right\}\cup[4;\infty)$, а решением второго — множество $(-\infty;-2)\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

6.9.1. Первое. ● Разделив первое число на второе, получить выражение $\sqrt[5]{\frac{1990\cdot1991}{1992\cdot1989}}$. Далее убедиться, что под знаком радикала стоит число больше 1. **6.9.2.** Первое. **6.9.3.** Второе. ● Заметить, что $2^{\log_3 5}=5^{\log_3 2}$. **6.9.4.** Второе.

6.9.5. Нет. □ Предположим, что неравенство верно. Тогда (т.к. $\log_{11}8+1>0$) верно неравенство, получающееся из исходного возведением в квадрат обеих его частей, то есть $(3\log_{11}2+1)^2<2\log_{11}^2 2+\log_{11}2+3$. Последнее же равносильно неравенству $7\log_{11}^2 2+5\log_{11}2-2<0$. Так как функция $7x^2+5x-2$ отрицательна на множестве $x\in\left(-1;\frac{2}{7}\right)$, то для опровержения исходного неравенства достаточно показать, что $\log_{11}2>\frac{2}{7}$, или (что равносильно) $2>11^{\frac{2}{7}}$. Последнее верно, т.к. $2^7>11^2$, а, значит и $\log_{11}2>\frac{2}{7}$. Таким образом неравенство не справедливо. ■

6.9.6. Верно.

6.10.1. 9. • Заметить, что $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, а $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$ и решить неравенство методом интервалов. **6.10.2.** $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}; 1\right)$. • Решить неравенство обобщенным методом интервалов. **6.10.3.** $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. **6.10.4.** $(-\infty; -199) \cup (-66; 200)$. **6.10.5.** $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; 2) \cup [5; +\infty)$. **6.10.6.** $(-\infty; 2) \cup \{3\} \cup (4; \infty)$. **6.10.7.** $(-\infty; -8] \cup (-6; -2) \cup (-2; \infty)$.

6.10.8. $\left(-1; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right] \cup (2; \infty)$. □ $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \geqslant \frac{1}{2-x} \iff$

$$\begin{cases} 1+x>0 \\ 2-x<0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} 1+x>0 \\ 2-x>0 \\ 2-x \geqslant \sqrt{1+x} \end{cases} \iff x>2 \text{ или } \begin{cases} x \in (-1;2) \\ x^2-5x+3 \geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad x>2 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \in (-1;2) \\ x \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \infty\right). \end{cases}$$

Так как $\frac{5+\sqrt{13}}{2} > 2$, а $-1 < \frac{5-\sqrt{13}}{2} < 2$, то последняя система имеет решение: $x \in \left(-1; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right]$. Тогда решением неравенства будет множество $\left(-1; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right] \cup (2; \infty)$. ■

6.10.9. $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{\sqrt{13}-3}{2}; 2\right)$. **6.10.10.** $[0; 1) \cup (1; \infty)$. • Сделать замену $\sqrt{\frac{2x}{1+x^2}} = y$.

6.10.11. $\left(\frac{-3-\sqrt{33}}{2}; -1\right] \cup \{2\}$. □ Проведем решение с помощью обобщенного метода интервалов. Находим ОДЗ неравенства

$$\begin{cases} x \leqslant 2 \\ \sqrt{6-3x} \neq -x \end{cases} \iff x \in \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3-\sqrt{33}}{2}; 2\right].$$

Находим критические точки неравенства, решая уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{6-3x}+x} = \frac{1}{2} \iff \sqrt{6-3x}+x = 2 \iff \sqrt{6-3x} = 2-x \iff$$

$\iff x = -1$ или $x = 2$. В результате ОДЗ неравенства распадется на три промежутка: $\left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{33}}{2}\right)$, $\left(\frac{-3-\sqrt{33}}{2}; -1\right]$ и $[-1; 2]$. Выбирая по произвольной точке из каждого интервала, определяем, в каких интервалах выполняется неравенство (оно выполнено только на втором интервале). Учитывая, что неравенство нестрогое (из этого вытекает, что критические точки принадлежат решению), получаем ответ: $\left(\frac{-3-\sqrt{33}}{2}; -1\right] \cup \{2\}$. ■

6.10.12. $(-\infty; -1-\sqrt{7}) \cup [1; 3]$. **6.10.13.** $\{-2\} \cup \left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}; \infty\right)$.

6.10.14. $\{-1\} \cup \left(\frac{1-\sqrt{37}}{18}; \infty\right)$.

6.10.15. 24. □ Преобразуем неравенство к виду $\sqrt{(4+x)(1-x)}\cdot\left(x-\frac{4}{x}+3\right)\geqslant 0$. Последнее выполняется, если $\sqrt{(4+x)(1-x)}=0$ или если

$$\begin{cases} x-\frac{4}{x}+3\geqslant 0\\ (4+x)(1-x)\geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение с радикалом имеет решения $x=1$ и $x=-4$, а решением системы будет множество $[-4;0)\cup\{1\}$. Таким образом, решением неравенства будет множество $[-4;0)\cup\{1\}$. Целые числа, принадлежащие решению — это -4, -3, -2, -1, 1. Их произведение равно 24. ■

6.10.16. 9. **6.10.17.** $\left(1;\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$. **6.10.18.** $\left[0;\frac{1}{9}\right)\cup(9;25)$. ● Сделать замену $\sqrt{x}=t$.

6.10.19. $\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

6.10.20. $\{4\}$. □ Чтобы неравенство выполнялось, необходимо, чтобы все подкоренные выражения, а также правая часть неравенства были неотрицательны, а это возможно только при $x=4$ (решение соответствующей системы не вызывает затруднений). Остается проверить, что $x=4$ удовлетворяет исходному неравенству. ■

6.10.21. $(-\infty;\sqrt[3]{2})\cup(\sqrt[3]{2};\infty)$. □ Заметив, что под знаком радикала стоит полный квадрат, перепишем неравенство в виде $|x^3-2|>x-\sqrt[3]{2}$. При $x-\sqrt[3]{2}<0$ неравенство, очевидно, выполнено. При $x=\sqrt[3]{2}$ обе части неравенства равны нулю, и, следовательно, это значение не является решением. При $x-\sqrt[3]{2}>0$ выражение, стоящее под знаком модуля, положительно, и неравенство равносильно такому неравенству:

$$x^3-2>x-\sqrt[3]{2}\iff(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})>(x-\sqrt[3]{2})\iff$$
$$\iff(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}\cdot x+\sqrt[3]{4}-1)>0.$$

Второй сомножитель всегда положителен, так как соответствующий ему дискриминант $D=4-3\sqrt[3]{4}<0$ и коэффициент при x^2 положителен. Стало быть, последнее неравенство выполнено при $x>\sqrt[3]{2}$. Объединяя все полученные решения, имеем: $x\in(-\infty;\sqrt[3]{2})\cup(\sqrt[3]{2};\infty)$. ■

6.10.22. $\{3\}\cup[4;7]$. □ $\sqrt{x-3}\leqslant 3-|x-6|\iff$

$$\iff\quad\begin{cases}3\leqslant x\leqslant 6\\ \sqrt{x-3}\leqslant x-3\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x>6\\ \sqrt{x-3}\leqslant 9-x\end{cases}\quad\iff$$

$$\iff\quad\begin{cases}3\leqslant x\leqslant 6\\ x-3\leqslant(x-3)^2\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}6<x\leqslant 9\\ x-3\leqslant 81-18x+x^2\end{cases}\quad\iff$$

$$\iff\begin{cases}3\leqslant x\leqslant 6\\ x\in(-\infty;3]\cup[4;+\infty)\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}6<x\leqslant 9\\ x\in(-\infty;7]\cup[12;\infty)\end{cases}\iff$$

$\iff\ x\in\{3\}\cup[4;7]$. ■

6.10.23. $\{2\}\cup[3;11]$. **6.10.24.** $\{-2\}\cup[-1;7]$.

6.10.25. $\left(-\infty;\frac{7-\sqrt{657}}{16}\right]\cup[1;\infty)$. □ Найдем ОДЗ неравенства:

$$x^2+|x|-2\geqslant 0\iff|x|^2+|x|-2\geqslant 0\iff|x|\in(-\infty;-2]\cup[1;\infty)\iff$$

$$\iff |x| \geqslant 1 \iff x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty).$$

Тогда неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ 3\sqrt{x^2+x-2} \geqslant 1-x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leqslant -1 \\ 3\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 1-x. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $x \geqslant 1$ (при этом правая часть второго неравенства неположительна, и неравенство выполнено). Так как при $x \leqslant -1$ правая часть второго неравенства во второй системе положительна, то система равносильна системе

$$\begin{cases} x \leqslant -1 \\ 8x^2 - 7x - 19 \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{657}}{16}\right].$$

Объединяя полученные решения, получаем окончательный ответ. ■

6.10.26. $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. **6.10.27.** $\left(-\infty; -\frac{9}{4}\right) \cup [\sqrt{5}; \infty)$.

6.10.28. $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{-7-\sqrt{657}}{16}; \infty\right)$. **6.10.29.** $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1+\sqrt{28}}{3}; \infty\right)$.

6.10.30. $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{8}\right)$. ● Записать неравенство в виде $5 \cdot \sqrt{1-\frac{1}{z}} > 6 + \left(1 - \frac{1}{z}\right)$ и сделать замену $\sqrt{1-\frac{1}{z}} = t$. **6.10.31.** $\left(-\infty; \frac{-31-\sqrt{265}}{6}\right) \cup (-5; \infty)$.

6.11.1. $[-3; -\sqrt{8}) \cup (\sqrt{8}; 3]$. ● Сделать замену $2^{\sqrt{9-x^2}} = t$. **6.11.2.** $(0; 2)$.

6.11.3. $(-\infty; \log_{\frac{3}{5}} 3) \cup (1; \infty)$. □ Разделив неравенство на 25^x, получаем: $5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - 18 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 9 > 0$. Сделав замену $\left(\frac{3}{5}\right)^x = y$, получим неравенство $5y^2 - 18y + 9 > 0$, решением которого является множество $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right) \cup (3; \infty)$. Тогда $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{3}{5}$ или $\left(\frac{3}{5}\right)^x > 3$, откуда $x > 1$ или $x < \log_{\frac{3}{5}} 3$. ■

6.11.4. $\left(1; \log_{\frac{7}{3}} 3\right)$. **6.11.5.** Нет. **6.11.6.** 1. ● Произведя группировку, привести неравенство к виду $(3^x - 3\sqrt{3})(2^x - 128) \geqslant 0$. **6.11.7.** 2,5. **6.11.8.** 3.

6.11.9. $[-2; -1) \cup [1; \infty)$. □ Поскольку $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 1$, то $\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$ и неравенство приводится к виду $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geqslant (\sqrt{5}+2)^{-\frac{x-1}{x+1}} \iff$

$$\iff x - 1 \geqslant -\frac{x-1}{x+1} \iff \frac{(x-1)(x+2)}{x+1} \geqslant 0 \iff x \in [-2; -1) \cup [1; \infty). \ ■$$

6.11.10. $(-\infty; -1] \cup [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}] \cup [3; \infty)$. ● Разделить обе части неравенства на 2^{2x} и привести полученное неравенство к виду $4^{x^2-2x} - 10 \cdot 2^{x^2-2x} + 16 \geqslant 0$; сделать замену $2^{x^2-2x} = t$. **6.11.11.** $(-\infty; -2-\sqrt{6}] \cup [-2+\sqrt{6}; \infty)$. ● Домножить обе части неравенства на 3^{4x}. **6.11.12.** $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$.

6.11.13. $\left[\log_{42} \frac{1}{63}; \log_{\frac{7}{6}} \frac{9}{7}\right]$. □ $6^{x+2} \geqslant 4 \cdot 7^{|x+1|} \iff$

$$\begin{cases} x \geqslant -1 \\ 36 \cdot 6^x \geqslant 28 \cdot 7^x \end{cases} \text{или} \begin{cases} x < -1 \\ 36 \cdot 6^x \geqslant \frac{4}{7 \cdot 7^x} \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant -1 \\ \left(\frac{7}{6}\right)^x \leqslant \frac{36}{28} \end{cases} \text{или} \begin{cases} x < -1 \\ 42^x \geqslant \frac{4}{36 \cdot 7} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \leqslant \log_{\frac{7}{6}} \dfrac{9}{7} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < -1 \\ x \geqslant \log_{42} \dfrac{1}{63}. \end{cases}$$

Поскольку $\log_{\frac{7}{6}} \dfrac{9}{7} \geqslant -1$, а $\log_{42} \dfrac{1}{63} < -1$, то получаем окончательно $x \in \left[\log_{42} \dfrac{1}{63}; \log_{\frac{7}{6}} \dfrac{9}{7}\right]$. ■

6.11.14. $\left(\log_{15} \dfrac{35}{3}; \log_{\frac{5}{3}} \dfrac{15}{7}\right)$. **6.11.15.** $\left[\dfrac{11 - \log_2 5}{2\log_2 5 + 5}; \dfrac{\log_2 5 - 1}{5 - 2\log_2 5}\right]$.

6.11.16. $(-\infty; \log_2(\sqrt{2} - 1)] \cup \left[\dfrac{1}{2}; \infty\right)$.

6.11.17. 35. □ Неравенство равносильно двойному неравенству

$$-\frac{5}{2} \leqslant 2^{\frac{x}{3}} - \frac{11}{2} \leqslant \frac{5}{2} \iff 3 \leqslant 2^{\frac{x}{3}} \leqslant 8 \iff \log_2 27 \leqslant x \leqslant 9.$$

Поскольку $4 = \log_2 16 < \log_2 27 < \log_2 32 = 5$, то целых решений будет пять: от 5 до 9. Их сумма равна 35. ■

6.11.18. 9. **6.11.19.** 3. **6.11.20.** $(-\infty; -8] \cup [4; \infty)$.

6.11.21. $(-1; 1]$. □ Так как $3^x + 5 > 0$, то неравенство равносильно неравенству

$$\frac{3^x + 5}{3 \cdot 3^x - 1} \geqslant 1 \iff \frac{6 - 2 \cdot 3^x}{3 \cdot 3^x - 1} \geqslant 0 \iff \frac{1}{3} < 3^x \leqslant 3 \iff x \in (-1; 1]. ■$$

6.11.22. $(-\infty; 1) \cup [\log_2 20; \infty)$. **6.11.23.** -1. **6.11.24.** $(-\infty; 0) \cup \left[\log_2 \dfrac{3}{2}; 2\right]$.

6.11.25. $(0; 2)$. **6.11.26.** $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$. **6.11.27.** $(-\infty; 0] \cup \left(\dfrac{1}{2}; \infty\right)$. **6.11.28.** $\left[-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$. **6.11.29.** 2. **6.11.30.** $\left(\log_{\frac{2}{3}} 2; 0\right) \cup (0; 1]$. **6.11.31.** $[\log_4 3; \infty)$. **6.11.32.** $(0; 1) \cup (4; \infty)$. **6.11.33.** $[1; 5) \cup (10; \infty)$.

6.11.34. 8,5. □ Решение вытекает из следующей цепочки равносильных преобразований: $\log_2 \log_4 x + \log_4 \log_2 x \leqslant 2 \iff \log_4(\log_4 x)^2 + \log_4 \log_2 x \leqslant 2 \iff$

$$\iff \log_4 [\log_4^2 x \cdot \log_2 x] \leqslant 2 \iff \begin{cases} x > 1 \\ \log_4^2 x \cdot \log_2 x \leqslant 16 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ \log_4^3 x \leqslant 8 \end{cases} \iff$$

$\iff \begin{cases} x > 1 \\ \log_4 x \leqslant 2 \end{cases} \iff 1 < x \leqslant 16$. Серединой множества решений неравенства является число 8,5. ■

6.11.35. $(-1; 1)$.

6.11.36. $(0; \sqrt[3]{10}) \cup (\sqrt{5}; \infty)$. ● Воспользовавшись соотношениями $\lg x^6 = 2\lg x^3$ и $\log_5 x^2 = 2\log_5 x$ (справедливыми на ОДЗ ($x > 0$) данного неравенства), произвести группировку и получить неравенство $(2\log_5 x - 1)(\lg x^3 - 1) > 0$.

6.11.37. $(5; 6]$.

6.11.38. $(1; 4)$. □ $\log_2(x + \sqrt{x} - 2) < 2 \iff \begin{cases} x + \sqrt{x} - 2 > 0 \\ x + \sqrt{x} - 2 < 4. \end{cases}$

Рассматривая каждое неравенство как квадратное относительно переменной $\sqrt{x}$, получаем равносильную предыдущей систему

$$\begin{cases} -3 < \sqrt{x} < 2 \\ \sqrt{x} < -2 \quad \text{или} \quad 1 < \sqrt{x} \end{cases} \iff 1 < \sqrt{x} < 2$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\sqrt{x}$ не может быть отрицательным). Тогда $1 < x < 4$. ■

6.11.39. $(-\infty; 0) \cup (1; 2)$.

6.11.40. 1. □ Неравенство равносильно системе $\begin{cases} \sqrt{x+7} - x - 1 > 0, \\ \sqrt{x+7} - x - 1 < 1. \end{cases}$ Решим первое неравенство в этой системе. $\sqrt{x+7} - x - 1 > 0 \iff \sqrt{x+7} > x + 1 \iff$

$$\iff \begin{cases} x+1<0 \\ x+7 \geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ x+7 > (x+1)^2 \end{cases} \iff x \in [-7; -1) \text{ или } \begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \in (-3; 2) \end{cases}$$

$\iff x \in [-7; -1)$ или $x \in [-1; 2) \iff x \in [-7; 2)$. Решим второе неравенство системы:

$$\sqrt{x+7} - x - 1 < 1 \iff \sqrt{x+7} < x + 2 \iff \begin{cases} x+2>0 \\ x+7 \geqslant 0 \\ x+7 < (x+2)^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > -2 \\ x \in \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{21}}{2}; \infty\right) \end{cases} \iff x \in \left(\frac{-3+\sqrt{21}}{2}; \infty\right).$$

Тогда система будет иметь решение при $x \in \left(\frac{-3+\sqrt{21}}{2}; 2\right)$. Единственным целым числом, принадлежащим данному интервалу, является единица. ■

6.11.41. -1. **6.11.42.** 8.

6.11.43. $\left(\log_4 \frac{2}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$. □ $\log_4(3 \cdot 4^{x+1} - 8) < 2x + 1 \iff$

$$\iff \begin{cases} 3 \cdot 4^{x+1} - 8 > 0 \\ 3 \cdot 4^{x+1} - 8 < 4^{2x+1} \end{cases} \iff \begin{cases} 4^x > \frac{2}{3} \\ 4^{2x} - 3 \cdot 4^x + 2 > 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 4^x > \frac{2}{3} \\ 4^x < 1 \text{ или } 4^x > 2 \end{cases} \iff \frac{2}{3} < 4^x < 1 \text{ или } 4^x > 2 \iff x \in \left(\log_4 \frac{2}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right). ■$$

6.11.44. $[0; 1)$. **6.11.45.** $(1; 2)$.

6.11.46. 2. □

$$\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1 \iff 0 \leqslant \log_2 \frac{3-2x}{1-x} < 1 \iff 1 \leqslant \frac{3-2x}{1-x} < 2 \iff \begin{cases} \frac{2-x}{1-x} \geqslant 0 \\ \frac{1}{1-x} < 0. \end{cases}$$

Из второго неравенства следует, что $1 - x < 0$. Тогда для выполнения первого неравенства необходимо, чтобы $2 - x \leqslant 0$. Следовательно, $x \geqslant 2$. Число 2 является наименьшим целым решением. ■

6.11.47. $(-2; -1] \cup [1; 2)$. □ Решение вытекает из следующей цепочки равносильных преобразований:

$$\log_{0,5}(6|x| - 3) \leqslant \log_{0,5}(4 - x^2) \iff \begin{cases} 6|x| - 3 \geqslant 4 - x^2 \\ 4 - x^2 > 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} |x|^2 + 6|x| - 7 \geqslant 0 \\ |x| < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| \in (-\infty; -7] \cup [1; \infty) \\ |x| < 2 \end{cases} \iff |x| \in [1; 2) \iff$$

$\Longleftrightarrow x \in (-2;-1] \cup [1;2)$. ■

6.11.48. -1. **6.11.49.** $[10;\infty)$. **6.11.50.** $\left(0;\frac{1}{25}\right] \cup [25;\infty)$. ● Сделать замену $|\log_5 x| = t$. **6.11.51.** 4.

6.11.52. 1. □ Воспользовавшись формулой перехода от логарифма по одному основанию к другому, получим: $-\log_2(2^x-1)\cdot\log_2(2^{x+1}-2) > -2$. Далее имеем: $\log_2(2^x-1)\cdot[\log_2(2^x-1)+1] < 2$. Сделаем замену: $\log_2(2^x-1) = y$. Тогда неравенство примет вид $y^2+y-2<0$, решением которого будет множество $(-2;1)$. Тогда $-2<\log_2(2^x-1)<1 \Longleftrightarrow \frac{1}{4}<2^x-1<2 \Longleftrightarrow \log_2\frac{5}{4}<x<\log_2 3$. Очевидно, что 1 является единственным целым решением. ■

6.11.53. 3. ● Привести неравенство к виду $\log_2\log_3\frac{x+1}{x-1} < 0$. **6.11.54.** $\left[-12;-\frac{5}{6}\right) \cup \left(-\frac{5}{6};-\frac{4}{5}\right)$. ● Заметить, что на ОДЗ неравенства справедливо тождество $\log_{\frac{1}{6}-x}\sqrt{\frac{1}{6}-x} = \frac{1}{2}$. **6.11.55.** $\left(\frac{1}{2};3\right]$.

6.11.56. $(0;\sqrt{2})\cup(\sqrt[5]{7};\infty)$. □ Неравенство имеет смысл при $x>0$. На этом множестве оно равносильно неравенству $2\log_2 x+5\log_7 x-1-10\log_7 x\log_2 x<0$. Сгруппировав попарно члены неравенства, получим:

$$(2\log_2 x-1)-5\log_7 x\cdot(2\log_2 x-1)<0 \Longleftrightarrow (2\log_2 x-1)(1-5\log_7 x)<0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 2\log_2 x-1<0 \\ 1-5\log_7 x>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\log_2 x-1>0 \\ 1-5\log_7 x<0. \end{cases}$$

Решив каждое неравенство, и заметив, что $\sqrt{2} < \sqrt[5]{7}$, получим (учитывая ОДЗ), что $x \in (0;\sqrt{2}) \cup (\sqrt[5]{7};\infty)$. ■

6.11.57. $[-2;-\sqrt{2})\cup[0;-1+\sqrt{2})$. ● Решить неравенство обобщенным методом интервалов. **6.11.58.** $\left[\frac{1}{6};\frac{3}{8}\right)$. **6.11.59.** $\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup[2;\infty)$. **6.11.60.** $(0;2]\cup[3;\infty)$.

6.11.61. 6,4. ● Заметить, что из ОДЗ неравенства вытекает, что основание логарифма меньше 1. **6.11.62.** 2. ● Заметить, что из ОДЗ следует, что основание логарифма больше 1. **6.11.63.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. ● Заметить, что из ОДЗ следует, что основание логарифма меньше 1.

6.11.64. $(0;1)\cup(1;1{,}5)$. □ ОДЗ неравенства является множество $(0;1)\cup(1;1{,}5)$. На множестве $(0;1)$ основание логарифма больше 1, а на множестве $(1;1{,}5)$ — меньше 1. Следовательно, неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x \in (0;1) \\ x<(3-2x)^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \in (1;1{,}5) \\ x>(3-2x)^2 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in (0;1) \\ x \in (-\infty;1)\cup\left(\frac{9}{4};\infty\right) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \in (1;1{,}5) \\ x \in \left(1;\frac{9}{4}\right) \end{cases} \Longleftrightarrow x \in (0;1)\cup(1;1{,}5). ■$$

6.11.65. $(3;1+\sqrt{5})$.

6.11.66. $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1;2) \cup (3;6)$. □ ОДЗ неравенства является множество $(0;2) \cup (3;\infty)$. Тогда $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1 \iff$

$$\iff \begin{cases} x \in (0;2) \cup (3;\infty) \\ 2x > 1 \\ x^2 - 5x + 6 < 2x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \in (0;2) \cup (3;\infty) \\ 2x < 1 \\ x^2 - 5x + 6 > 2x \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (3;\infty) \\ x^2 - 7x + 6 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \\ x^2 - 7x + 6 > 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (3;\infty) \\ x \in (1;6) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \\ x \in (-\infty;1) \cup (6;\infty) \end{cases} \iff$$

$\iff x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1;2) \cup (3;6)$. ■

6.11.67. $(-3;-2) \cup (-1;0) \cup (1;3)$. **6.11.68.** $(2;\infty)$. **6.11.69.** $(-0{,}1;0)$. **6.11.70.** $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (1; 5\sqrt{5})$. **6.11.71.** $[-4;-1) \cup (2;\infty)$.

6.11.72. $(\sqrt{5};3)$. □ Неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - 2 > 1 \\ 0 < 1 - 5x^3 + x^5 < 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < x - 2 < 1 \\ 1 - 5x^3 + x^5 > 1. \end{cases}$$

Из первого неравенства первой системы следует, что $x > 3$. Тогда $x^5 - 5x^3 + 1 = x^3(x^2 - 5) + 1 > 109$, а, следовательно, второе неравенство первой системы не выполняется. Таким образом, первая система решений не имеет. Вторая система имеет решение: $x \in (\sqrt{5};3)$. ■

6.11.73. $(1;4]$. **6.11.74.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \log_2 3\right)$. **6.11.75.** $\left(-\frac{6}{5}; -1\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 0\right)$.

6.11.76. $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup [2;+\infty)$. **6.11.77.** $(4;5) \cup (5;6)$. • Применить обобщенный метод интервалов. **6.11.78.** 1.

6.11.79. $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]$. □ Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{1 - 5x}{6x - 4} > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \iff x \in \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right).$$

Преобразуем неравенство.

$$\log_x 9 \cdot \log_3 \frac{1 - 5x}{6x - 4} \geqslant 2 \iff \frac{2 \log_3 \dfrac{1 - 5x}{6x - 4}}{\log_3 x} \geqslant 2 \iff \log_x \frac{1 - 5x}{6x - 4} \geqslant 1.$$

Так как основание логарифма меньше 1 (это вытекает из ОДЗ), то последнее неравенство равносильно на ОДЗ неравенству $\frac{1 - 5x}{6x - 4} \leqslant x \iff 1 - 5x \geqslant x(6x - 4)$. Равносильность последнего перехода объясняется тем, что $6x - 4 < 0$ на ОДЗ.

Окончательно имеем $6x^2+x-1\leqslant 0$, откуда $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right]$. Пересекая последнее множество с ОДЗ, получаем ответ: $x\in\left(\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right]$. ■

6.11.80. $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$.

6.11.81. $(1;27)$. ● Преобразовать неравенство к виду $\dfrac{\log_3 x-3}{\log_3 x}<0$. **6.11.82.** $(0;\sqrt[6]{2}-1]\cup[63;\infty)$. **6.11.83.** $(-\infty;-1)\cup\left(-10^{-\frac{3}{4}};0\right)\cup\left(0;10^{-\frac{3}{4}}\right)\cup(1;\infty)$. ● Преобразовать неравенство к виду $\left|\dfrac{6-4\lg|x|}{3+4\lg|x|}\right|<2$ и сделать замену $\lg|x|=t$.

6.11.84. $\left[\frac{1}{4};1\right)\cup[\sqrt{2};\infty)$. **6.11.85.** $[1;1{,}5)$.

6.11.86. $\left(\frac{1}{2};\frac{7-\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\frac{7-\sqrt{17}}{4};1\right)\cup\left(2;\frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{17}}{4};3\right)$. **6.11.87.** $\left(0;\frac{1}{27\sqrt{3}}\right]\cup\left(\frac{1}{9};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup[1;\infty)$. **6.11.88.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup[1;\infty)$. **6.11.89.** $\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)$.

6.11.90. $(\log_9 7;1)\cup(1;\infty)$. □ $\log_x(\log_3(9^x-6))\geqslant 1\iff$

$$\iff\begin{cases}x>1\\ \log_3(9^x-6)\geqslant x\end{cases}\text{ или }\begin{cases}0<x<1\\ 0<\log_3(9^x-6)\leqslant x\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}x>1\\ 9^x-3^x-6\geqslant 0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}0<x<1\\ 9^x>7\\ 9^x-3^x-6\leqslant 0\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}x>1\\ x\geqslant 1\end{cases}\text{ или }\begin{cases}0<x<1\\ x>\log_9 7\\ x\leqslant 1\end{cases}\iff x\in(\log_9 7;1)\cup(1;\infty).\ ■$$

6.11.91. $(\log_4 7;\log_2 3]$. **6.11.92.** $(\log_4 13;2]$. **6.11.93.** $(2;5)$. **6.11.94.** 23.
6.11.95. $(\log_4 13;2]$. ● Показать, что неравенство имеет смысл при $x>\log_4 13$; при этом $|x|=x$ и основание внешнего логарифма больше 1. **6.11.96.** $(2;\infty)$.
6.11.97. $\left(0;\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)$.

6.11.98. $(3;5-\sqrt{3})\cup(7;\infty)$. □ Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases}x^2-10x+22>0\\ \log_2\left(\frac{x}{2}\right)>0\\ \log_2\left(\frac{x}{2}\right)\neq 1\end{cases}\iff\begin{cases}x\in(-\infty;5-\sqrt{3})\cup(5+\sqrt{3};\infty)\\ x>2\\ x\neq 4\end{cases}\iff$$

$\iff x\in(2;5-\sqrt{3})\cup(5+\sqrt{3};\infty)$. Тогда $\log_{\log_2\left(\frac{x}{2}\right)}(x^2-10x+22)>0\iff$

$$\iff\begin{cases}x\in(2;5-\sqrt{3})\\ x^2-10x+22<1\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x\in(5+\sqrt{3};\infty)\\ x^2-10x+22>1\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}x\in(2;5-\sqrt{3})\\ x\in(3;7)\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x\in(5+\sqrt{3};\infty)\\ x\in(-\infty;3)\cup(7;\infty)\end{cases}\iff$$

$\iff x \in (3; 5 - \sqrt{3}) \cup (7; \infty)$. ■

6.11.99. $(1; 3)$. **6.11.100.** $\left(0; \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right] \cup (1; \sqrt[7]{25}]$. **6.11.101.** $(-\infty; 1)$. ● Записать неравенство в виде $2^{4^x} < 4^{2^x}$ и далее — в виде $4^x < 2^x \cdot 2$. **6.11.102.** $(2-\sqrt{2}; 1] \cup \cup [3; 2 + \sqrt{2})$.

6.12.1. $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. □ Неравенство преобразуется к неравенству: $\cos x \cdot (2 - \sin x) > 0$. Так как второй сомножитель положителен для всех x, то неравенство выполнено, если $\cos x > 0$, откуда получаем приведенный выше ответ. ■

6.12.2. $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. **6.12.3.** $\varnothing$. ● Преобразовать неравенство к виду $\sin^2 2x - \sin 2x + \sqrt{2} < 0$ и показать, что последнее неравенство (рассматриваемое как квадратичное) не имеет решений.

6.12.4. $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. □ Неравенство приводится к виду $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 > 0$. Сделаем замену $\sin x = y$, и решим неравенство $2y^2 + 3y - 2 > 0 \iff y < -2$ или $y > \frac{1}{2}$. Сделав обратную замену, и заметив, что неравенство $\sin x < -2$ не может выполняться, получим: $\sin x > \frac{1}{2}$, откуда следует ответ. ■

6.12.5. $\left[-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$. **6.12.6.** $\left[2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. ● Привести неравенство к системе $\begin{cases} \sin x \geqslant 0 \\ \sin x < \frac{1}{2}. \end{cases}$ **6.12.7.** $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

6.12.8. $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. □ Решим неравенство обобщенным методом интервалов на тригонометрическом круге. Найдем ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Найдем критические точки:

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0 \iff \operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x + 1) - (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \iff$$
$$\iff (\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg} x + 1) = 0 \iff \operatorname{tg} x = \pm 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Нанесем на тригонометрический круг ОДЗ и критические точки, и далее, как и в классическом методе интервалов, определим знаки функции $y = (\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg} x + 1)$ (рис. 1).

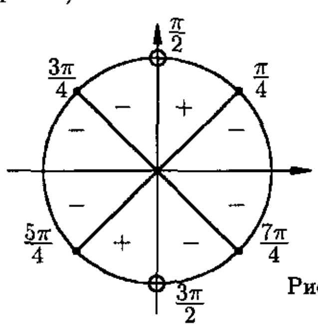


Рис. 1

Получаем окончательный ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{4}+\pi k\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

6.12.9. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. □ Найдем ОДЗ:

$$6\sin^2 x - 6\sin x - 12 \geqslant 0 \iff \sin x \leqslant -1 \text{ или } \sin x \geqslant 2 \iff \sin x = -1.$$

Проверкой убеждаемся, что $\sin x = -1$ является решением неравенства. Тогда $x = -\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

6.12.10. $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

6.13.1. 4. □ Неравенство равносильно следующему неравенству: $(x-3)(3-4\cdot 3^{\sqrt{x}}) \geqslant 0$. Так как $3^{\sqrt{x}} \geqslant 1$, то $3-4\cdot 3^{\sqrt{x}} < 0$ и для выполнения неравенства необходимо, чтобы $x-3 \leqslant 0$. Учитывая, что по ОДЗ имеем: $x \geqslant 0$, окончательно получаем: $x \in [0;3]$. На этом отрезке 4 целых числа. ■

6.13.2. 3. **6.13.3.** 2. ● Группировкой привести неравенство к виду $(2x^2-x-3)(2-3^{\sqrt{x}}) < 0$. Заметить, что $2-3^{\sqrt{x}} < 0$. **6.13.4.** $[2;3) \cup \left(3; \frac{7}{2}\right) \cup \{4\}$.
● Воспользоваться методом интервалов.

6.13.5. $(-\infty; 0]$. □ Сделав замену $2^{-x} = t$, получим: $\sqrt{7+2t} \geqslant 7-4t \iff$

$$\iff \begin{cases} 7+2t \geqslant 0 \\ 7-4t < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 7-4t < 0 \\ 7+2t \geqslant (7-4t)^2 \end{cases} \iff t > \frac{7}{4} \text{ или } \begin{cases} t < \frac{7}{4} \\ t \in [1;\infty) \end{cases} \iff$$

$\iff t > 1$. Тогда $2^{-x} \geqslant 1$, что выполняется при $x \leqslant 0$. ■

6.13.6. $(-\infty; 0]$. **6.13.7.** $\left[1-\sqrt{3}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(2; \frac{5}{2}\right)$. **6.13.8.** $\{4\} \cup (5;\infty)$. **6.13.9.** $[\log_{15} 9; 1]$.

6.13.10. $[-1;2) \cup \{3\}$. □ Перепишем неравенство в виде

$$\frac{(x+1)(x-2)\sqrt{3-x}}{2-\left(\frac{5^x}{25}+\frac{25}{5^x}\right)} \geqslant 0.$$

Заметим, что $\frac{5^x}{25}+\frac{25}{5^x} \geqslant 2$ как сумма двух взаимно обратных положительных чисел. Тогда неравенство равносильно системе $\begin{cases} (x+1)(x-2)\sqrt{3-x} \leqslant 0 \\ x \neq 2. \end{cases}$

Решая ее стандартным способом, получим приведенный выше ответ. ■

6.13.11. $\left(\log_5 \frac{3}{10}; \log_5 \frac{1}{3}\right) \cup (0; \log_5 3)$. **6.13.12.** $\left(-\infty; -\frac{8}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

6.13.13. 3. □ Так как из ОДЗ вытекает, что $x \leqslant 3$, то $x-4\cdot 4^{\sqrt{3-x}} \leqslant 3-4\cdot 1 < 0$. Следовательно, неравенство равносильно неравенству

$$4\cdot 4^{\sqrt{3-x}} - x \leqslant \frac{5}{3}x - 4\cdot 4^{\sqrt{3-x}} \iff 4^{\sqrt{3-x}} \leqslant \frac{1}{3}x.$$

На ОДЗ левая часть не меньше 1, а правая часть — не больше 1. Следовательно, равенство возможно, если обе части одновременно равны 1, что, действительно, достигается при $x = 3$. ■

6.13.14. 6. **6.13.15.** $\{1\} \cup \{4\}$. ● Показать, что неравенство имеет смысл лишь при $x = 1$ и $x = 4$. Подстановкой убедиться, что при этих значениях x неравенство выполнено.

6.14.1. $[-8;8]\cup\{10\}$. **6.14.2.** $(-\infty;-2]\cup[2;3)\cup(3;4]\cup[5;\infty)$.
6.14.3. $(-\infty;-\sqrt{10}]\cup[\sqrt{10};4)$. **6.14.4.** $(0;10)\cup\{100\}$.

6.14.5. $\left(\frac{2}{3};1\right)\cup(1;\infty)$. □ Функция определена при тех x, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases}\log_5 x-\log_{125}(3x-2)>0\\ 3x-2>0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\log_5 x^3>\log_5(3x-2)\\ 3x-2>0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x^3-3x+2>0\\ 3x-2>0.\end{cases}$$

Заметив, что $x=1$ является корнем многочлена x^3-3x+2, представим этот многочлен в виде $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)$. Это разложение можно получить, разделив (x^3-3x+2) на $(x-1)$. Тогда первое неравенство системы выполнено при $x\in(-2;1)\cup(1;\infty)$, а сама система — при $x\in\left(\frac{2}{3};1\right)\cup(1;\infty)$. ■

6.14.6. $(-\infty;-3]\cup[-\sqrt{2};\sqrt{2}]\cup\left\{\frac{5}{2}\right\}\cup[3;\infty)$. **6.14.7.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$. **6.14.8.** 11.

● Показать, что областью определения функции является множество $\left(1;\frac{\pi}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{3\pi}{2};6{,}5\right)$. **6.14.9.** $\left(-\frac{1}{7};-\frac{1}{8}\right]\cup[0;\infty)$.

6.15.1. $(3;-4)$, $(4;-5)$. □ Первое неравенство перепишем в виде: $2(x-3)^2+$ $+2(y+5)^2<3$. Целочисленными решениями этого неравенства являются точки $(3;-4)$, $(4;-5)$, $(3;-5)$. Первые две удовлетворяют и второму неравенству. ■
6.15.2. $m=11$, $n=-9$. □ Выделив полные квадраты относительно m и n в каждом неравенстве, получим систему $\begin{cases}(m-8)^2+(n+11)^2<15\\ (m-15)^2+(n+7)^2<22.\end{cases}$ Пользуясь целочисленностью m, получим, что $(m-8)^2\leqslant 3$ и $(m-15)^2\leqslant 4$. Этим неравенствам удовлетворяет лишь единственное целое $m=11$. Подставив это значение в систему, получим систему $\begin{cases}(n+11)^2<6\\ (n+7)^2<6.\end{cases}$ Так как и n — целое, то $(n+11)^2\leqslant 4$ и $(n+7)^2\leqslant 4$, откуда получим $n=-9$. Таким образом $m=11$, $n=-9$. ■
6.15.3. $p=12$, $q=-8$. **6.15.4.** $\left(1;\frac{15}{8}\right)\cup(3;5)$. **6.15.5.** (x,y), где $x\in(1{,}5;2)$, $y\in(1;2)$. **6.15.6.** (x,y), где x, $y\in(1,2)$.

6.15.7. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_4 3;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_4 3\right)$. □ $\begin{cases}4^{x+y-1}+3\cdot4^{2y-1}\leqslant 2\\ x+3y\geqslant 2-\log_4 3\end{cases}\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}4^{x+y-1}+3\cdot4^{2y-1}\leqslant 2\\ 4^{x+3y}\geqslant 4^{2-\log_4 3}\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}4^{x+y}+3\cdot4^{2y}\leqslant 8\\ 4^{x+y}\cdot3\cdot4^{2y}\geqslant 16.\end{cases}$$

Обозначив $u=4^{x+y}$, $v=3\cdot4^{2y}$, получим систему

$$\begin{cases}u+v\leqslant 8\\ u\cdot v\geqslant 16\\ u>0,\quad v>0.\end{cases}$$

Возведя в квадрат первое неравенство и вычтя из него второе неравенство, умноженное на 4, получим $(u-v)^2 \leqslant 0$, откуда имеем $u = v$. Но тогда

$$\begin{cases} 2u \leqslant 8 \\ u^2 \geqslant 16 \\ u > 0 \end{cases}$$

и, следовательно, $u = 4$. Тогда и $v = 4$. Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} 4^{x+y} = 4 \\ 3 \cdot 4^{2y} = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y = 1 - \log_4 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_4 3 \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_4 3. \end{cases} \blacksquare$$

6.15.8. $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\log_3 2; \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\log_3 2\right)$. **6.15.9.** 4. **6.15.10.** $(0;1)$, $(0;-1)$. ● Домножив на 2^x, записать неравенство в виде $(y^2-2^x)^2 \leqslant 0$, откуда $y^2 = 2^x$.

6.16.1. Рис. 2. **6.16.2.** Рис. 3.
6.16.3. Рис. 4. □ Неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} y-4<0 \\ 4y-x^2 \geqslant 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} y-4 \geqslant 0 \\ (y-4)^2 \leqslant 4y-x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y<4 \\ y \geqslant \frac{x^2}{4} \end{cases} \text{или} \begin{cases} y \geqslant 4 \\ x^2+(y-6)^2 \leqslant 20. \end{cases}$$

Первая система описывает множество точек плоскости, заключенное между прямой $y=4$ и параболой $y = \frac{x^2}{4}$. Вторая система — множество точек круга $x^2+(y-6)^2 \leqslant 20$, лежащих выше прямой $y = 4$. Нетрудно убедиться, что граница круга, задаваемая уравнением $(y-6)^2+x^2 = 20$ и парабола $y = \frac{x^2}{4}$ пересекаются лишь в двух точках, то есть окружность вписана в параболу. ■

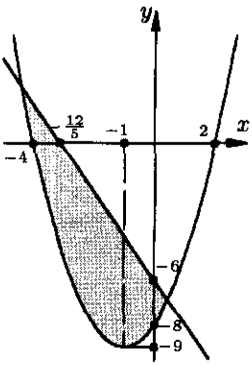


Рис. 2

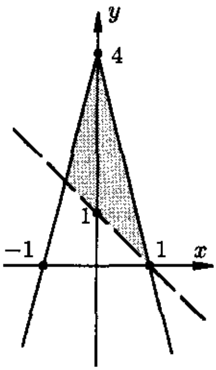


Рис. 3

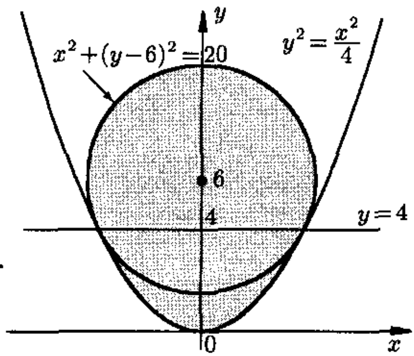


Рис. 4

6.16.4. Рис. 5. □ Неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} |x-1|-2|x|+4>1 \\ y>0 \\ 4-x>0 \\ y>4-x \end{cases} \text{или} \begin{cases} 0<|x-1|-2|x|+4<1 \\ y>0 \\ 4-x>0 \\ y<4-x \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 2 \\ y > 0 \\ y > 4 - x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \in (-5; -4) \cup (2; 3) \\ y > 0 \\ y < 4 - x. \end{cases} \quad \blacksquare$$

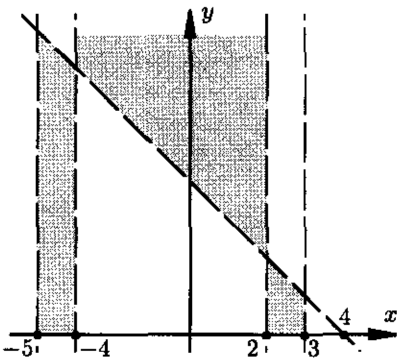


Рис. 5

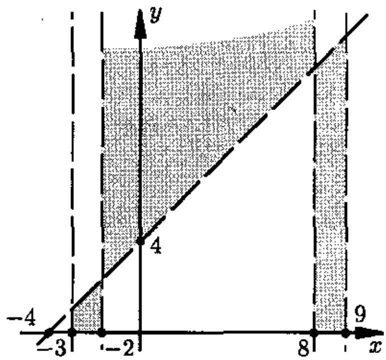


Рис. 6

6.16.5. Рис. 6.

6.16.6. Ось Oy и часть круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$, лежащая в правой полуплоскости $(x \geqslant 0)$. □ Так как правая часть неравенства неотрицательна, то необходимо $x \geqslant 0$. Линия $x = 0$ удовлетворяет неравенству. Если же $x > 0$, то неравенство равносильно неравенству $1 \geqslant x^2 + y^2$. ■

6.16.7. Ось Ox и часть круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$, лежащая в верхней полуплоскости $(y \geqslant 0)$.

6.17.1. $b = -2$; $b = 1$. **6.17.2.** $a = -3$; $a = -4$.

6.17.3. $m = -\sqrt{5}$; $m = 3$. □ Функция определена на множестве, являющемся решением системы

$$\begin{cases} 2mx - x^2 - 5 \geqslant 0 \\ 1 - x \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2mx + 5 \leqslant 0 \\ x \leqslant 1. \end{cases}$$

Для того, чтобы система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы парабола $y = x^2 - 2mx + 5$ либо имела один единственный корень не превосходящий 1, либо имела два корня, меньший из которых был бы равен 1. Эти условия будут выполнены, если

$$\begin{cases} D = 0 \\ x_{\text{в}} \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y(1) = 0 \\ x_{\text{в}} > 1, \end{cases}$$

где $D = 4m^2 - 20$ — дискриминант квадратичного выражения, а $x_{\text{в}} = m$ — абсцисса вершины параболы. Решением совокупности этих систем будут числа $m = -\sqrt{5}$ и $m = 3$. ■

6.17.4. 77.

6.17.5. $p \leqslant -\frac{1}{7}$. □ Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы неравенство $-px^2 + (3p + 1)x - 4p \geqslant 0$ выполнялось для всех действительных значений x. В свою очередь это будет выполнено, если $p < 0$ и $D \leqslant 0$

(случай $p = 0$ необходимо рассмотреть особо и убедиться, что требуемые условия не выполнены). Решив систему

$$\begin{cases} p < 0 \\ D \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p < 0 \\ 7p^2 - 6p - 1 \geqslant 0 \end{cases} \iff p \leqslant -\frac{1}{7},$$

получаем ответ. ■

6.17.6. $[0; 4)$. ● Случай, когда неравенство становится линейным ($a = 0$), рассмотреть отдельно. **6.17.7.** 2.

6.17.8. $[2{,}5; \infty)$. □ Заменой $t = 2^x$ задача сводится к следующей: «Найти все значения a, при которых неравенство $t^2 + (a-1)t + (2a-5) > 0$ выполнено для всех $t > 0$». Для этого необходимо, чтобы функция $f(t) = t^2+(a-1)t+(2a-5)$ не имела положительных корней, что выполняется, если $D < 0$ или $\begin{cases} t_{\text{в}} \leqslant 0 \\ f(0) \geqslant 0, \end{cases}$

где $D = (a-1)^2 - 4(2a-5) = a^2 - 10a + 21$, а $t_{\text{в}} = \dfrac{1-a}{2}$ — абсцисса вершины параболы. Первое условие $D < 0$ выполняется при $a \in (3; 7)$. Второй вариант имеет место при

$$\begin{cases} t_{\text{в}} \leqslant 0 \\ f(0) \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \geqslant 1 \\ 2a - 5 \geqslant 0 \end{cases} \iff a \geqslant 2{,}5.$$

Объединив найденные значения a, получаем ответ: $a \geqslant 2{,}5$. ■

6.17.9. $\left[-\frac{1}{8}; \infty\right)$.

6.17.10. $(-\infty; -4]$. □ Сделаем замену $6^x = t$. Тогда требуется найти значения a, при которых неравенство $t^2 + at + a + 8 \leqslant 0$ выполняется хотя бы при одном положительном значении t. А это выполняется, если парабола $f(t) = t^2 + at + a + 8$ имеет хотя бы один положительный корень. Последнее выполнено, если $f(0) < 0$ или $\begin{cases} D \geqslant 0 \\ t_{\text{в}} > 0. \end{cases}$ ■

6.17.11. $[2; \infty)$. **6.17.12.** $(-\infty; -2-\sqrt{6}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$. ● Сделать замену $\cos x = t$. Показать, что задача эквивалентна следующей: «Найти все a, при которых неравенство $t^2 - 2at + (a^2 + 2a - 3) > 0$ выполнено для любого $t \in [-1; 1]$». Показать, что это будет выполнено, если

$$D < 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(1) > 0 \\ t_{\text{в}} > 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(-1) > 0 \\ t_{\text{в}} < -1. \end{cases}$$

6.17.13. $[2-\sqrt{10}; 1] \cup [5; 2+\sqrt{10}]$. □ Функция переменной c

$$f(c) = (2c-6)x^2 + (32-10c)x - (8+c) < 0$$

является линейной. Следовательно, для выполнения условия задачи нужно, чтобы выполнялась система

$$\begin{cases} f(2) \leqslant 0 \\ f(4) \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x^2 + 12x - 10 \leqslant 0 \\ 2x^2 - 8x - 12 \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [5; \infty) \\ x \in [2-\sqrt{10}; 2+\sqrt{10}] \end{cases} \iff$$

$\iff x \in [2-\sqrt{10}; 1] \cup [5; 2+\sqrt{10}]$. ■

6.17.14. $[3-\sqrt{6}; 2] \cup [5; 3+\sqrt{6}]$. **6.17.15.** 13. **6.17.16.** 18.

6.17.17. $(2;3]$. □ Чтобы неравенство выполнялось для всех x, необходимо, во-первых, чтобы $a>0$ и дискриминант $16-4a^2$ выражения ax^2+4x+a был отрицателен, то есть $a>2$. Кроме того, нужно, чтобы для всех x выполнялось неравенство $5(x^2+1)\geqslant ax^2+4x+a \iff (a-5)x^2+4x+(a-5)\leqslant 0$. Это *выполняется, если* $\begin{cases} a-5<0 \\ D\leqslant 0, \end{cases}$ *где* $D=16-4(a-5)^2$, *то есть* $a\leqslant 3$. *Таким* образом, $a\in(2;3]$. ■

6.17.18. -52. ● Заметив, что знаменатель дроби всегда положителен, привести неравенство к виду $3x^2+(4+a)x+3\geqslant 0$.

6.17.19. 1. **6.17.20.** $a\leqslant\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. **6.17.21.** $a\leqslant 20$. **6.17.22.** $\begin{cases} a=2 \\ b=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$ или $\begin{cases} a=-2 \\ b\in\mathbb{R}. \end{cases}$ ● Показать, что при $a\in(-2;2)$ второе неравенство не имеет решений; при $a>2$ — первое неравенство не имеет решений; при $a<-2$ — система имеет не единственное решение. Исследовать отдельно случаи $a=2$ и $a=-2$. **6.17.23.** $x\in\left[a-\dfrac{a}{\sqrt{2}};2a\right]$ при любом $a>0$. ● Сделать замену $a-x=t$. **6.17.24.** $x\in[-1;\infty)$ при $a<1$; $x\in\left((a-1)^2\cdot\log_3^2 2-1;\ \infty\right)$ при $a\geqslant 1$. **6.17.25.** $x\in\left(2k-1;\ \frac{1}{8}(19k-14)\right]$ при $k>2$; $x\in\varnothing$ при $k\leqslant 2$.

6.18.1. $[-2;-1)\cup[0;1]$. ● Привести неравенство к виду

$$\frac{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}-(1+x+x^2)}{1+x}\leqslant 0.$$

Далее, воспользовавшись тем, что $\sqrt{1+x+x^2}>0$ для всех действительных значений x, получить неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x+x^2}}{1+x}\leqslant 0$, которое легко решается стандартными методами. **6.18.2.** $[-1;0]\cup(1;2]$. **6.18.3.** $\left[\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};\infty\right)$. ● Воспользоваться тем, что по ОДЗ величина x положительна и, умножив обе части неравенства на x, получить неравенство $\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}>2$. Далее сделать замену $x^3=t$.

6.18.4. $\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$. □ *Неравенство равносильно системе*

$$\begin{cases} x^3+x^2-2x+1\geqslant 0 \\ x^3-2x+1\leqslant 0, \quad x\geqslant 0. \end{cases}$$

Если представить первое неравенство в виде $x^3+(x-1)^2\geqslant 0$, то можно заметить, что оно выполнено для всех $x\geqslant 0$. Записав второе неравенство в виде $(x-1)\cdot(x^2+x-1)\leqslant 0$, получим, что его решением является множество $\left(-\infty;\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$. Тогда решением системы будет множество $x\in\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$. ■

6.18.5. 2. □ ОДЗ неравенства является множество $[-1;0)\cup[1;\infty)$. Решим неравенство обобщенным методом интервалов.

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x} \iff \sqrt{\frac{x-1}{x}}(\sqrt{x+1}-1)=\frac{x-1}{x} \iff$$

$$\iff x=1 \text{ или } \sqrt{x+1}-1=\sqrt{\frac{x-1}{x}} \iff x=1 \text{ или } \sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}=1 \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} \sqrt{x+1}>\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} \\ x+1-2\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}+\dfrac{x-1}{x}=1 \end{cases}\end{array}\right. \underset{\text{ОДЗ}}{\iff} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x+1>\dfrac{x-1}{x} \\ \dfrac{x^2-1}{x}-2\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}+1=0 \end{cases}\end{array}\right. \iff$$

$$\iff x=1 \text{ или } \begin{cases} x>0 \\ \left(\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}-1\right)^2=0 \end{cases} \underset{\text{ОДЗ}}{\iff} x=1 \text{ или } \begin{cases} x>0 \\ \dfrac{x^2-1}{x}=1 \end{cases} \iff$$

$$\iff x=1 \text{ или } \begin{cases} x>0 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \iff x=1 \text{ или } x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Оба корня принадлежат ОДЗ неравенства. Таким образом, ОДЗ неравенства разбивается на три промежутка: $[-1;0)$, $\left[1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$. Неравенство выполняется на втором и третьем промежутках, причем концевые точки не принадлежат множеству решений, так как неравенство строгое. Следовательно, наименьшим целым решением будет число 2. ■

6.18.6. $\left(\frac{9-\sqrt{69}}{2};\frac{9+\sqrt{69}}{2}\right)$. ● Заметив, что из ОДЗ вытекает, что $x \geqslant 0$, а также, что $x=0$ не является решением, разделить обе части неравенства на x и привести его к виду $\sqrt{x+\frac{3}{x}}>x+\frac{3}{x}-6$. Далее сделать замену $\sqrt{x+\frac{3}{x}}=y$.

6.18.7. $(8-\sqrt{60};8+\sqrt{60})$. **6.18.8.** $\left[0;\frac{841}{144}\right)$. ● Сделав замену $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=y$ привести неравенство к виду $y^2+y-42<0$.

6.18.9. $\left[\frac{3-\sqrt{264}}{3};\frac{1-\sqrt{85}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{349}}{4};\frac{3+\sqrt{264}}{3}\right]$. □ Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} 4v^2-4v-84\geqslant 0 \\ 4v^2-6v-85\geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{85}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{85}}{2};\infty\right) \\ v\in\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{349}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{349}}{4};\infty\right). \end{cases}$$

Поскольку $\frac{1-\sqrt{85}}{2} < \frac{1-9}{2} = -4 = \frac{3-19}{4} < \frac{3-\sqrt{349}}{4}$ и $\frac{1+\sqrt{85}}{2} < < \frac{1+9{,}5}{2} = 5{,}25 = \frac{3+18}{4} < \frac{3+\sqrt{349}}{4}$, то ОДЗ неравенства будет множество $\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{85}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{349}}{4};\infty\right)$. Обозначим $4v^2-4v-84=a$, $4v^2-6v-85=b$. Тогда неравенство примет вид

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant|a-b| \iff \sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|.$$

А так как $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq 0$ (поскольку a и b одновременно не обращаются в ноль), то последнее неравенство равносильно неравенству $1 \leqslant |\sqrt{a}-\sqrt{b}|$. Таким образом, исходное неравенство равносильно неравенству

$$1 \leqslant \left|\sqrt{4v^2-4v-84}-\sqrt{4v^2-6v-85}\right| \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt{4v^2-4v-84}-\sqrt{4v^2-6v-85} \geqslant 1 \quad \text{или} \quad \sqrt{4v^2-4v-84}-\sqrt{4v^2-6v-85} \leqslant -1$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \sqrt{4v^2-4v-84} \leqslant -1-v \quad \text{или} \quad v \geqslant \sqrt{4v^2-6v-85} \underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} v \leqslant -1 \\ 3v^2-6v-85 \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} v \geqslant 0 \\ 3v^2-6v-85 \leqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow v \in \left[\frac{3-\sqrt{264}}{3}; \frac{3+\sqrt{264}}{3}\right]$. Пересекая полученный отрезок с ОДЗ неравенства, получим: $v \in \left[\frac{3-\sqrt{264}}{3}; \frac{1-\sqrt{85}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{349}}{4}; \frac{3+\sqrt{264}}{3}\right]$. ■

6.18.10. $\left[\frac{27-4\sqrt{66}}{9}; \frac{8-\sqrt{85}}{3}\right] \cup \left[\frac{17+\sqrt{349}}{6}; \frac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]$.

6.19.1. 4. ● Переписав неравенство в виде $4^x \leqslant 4 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} - 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{\sqrt{x}+1}$ и произведя группировку членов, привести неравенство к виду $\left(2^x - 4 \cdot 2^{\sqrt{x}}\right) \times \left(2^x + 2^{\sqrt{x}}\right) \leqslant 0$. **6.19.2.** $\left(0; 2^{-2\sqrt{2}}\right] \cup \left[2^{2\sqrt{2}}; \infty\right)$. **6.19.3.** $\left(0; 3^{-2\sqrt{3}}\right] \cup \left[3^{2\sqrt{3}}; \infty\right)$. **6.19.4.** $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2)$. **6.19.5.** 3.

6.19.6. $(0;1) \cup (10;11)$. ● Прологарифмировать неравенство по основанию 10 и привести неравенство к виду $\frac{(\lg x - \lg 11) \cdot (\lg x - 1)}{\lg x} < 0$. **6.19.7.** $(1;3) \cup (4;\infty)$.

6.19.8. $(0;1) \cup [2;3]$. **6.19.9.** $(-\infty; \log_3(3-\sqrt{6})) \cup (\log_3(3+\sqrt{6}); +\infty)$. ● Сделать замену $3^x = y$ и получить неравенство $y^4 - 3y^3 - 12y^2 - 9y + 9 > 0$. Далее попытаться разложить многочлен $y^4 - 3y^3 - 12y^2 - 9y + 9$ на произведение квадратичных многочленов $(y^2 + ay + b) \cdot (y^2 + cy + d)$ с целыми коэффициентами и получить неравенство $(y^2 - 6y + 3) \cdot (y^2 + 3y + 3) > 0$. **6.19.10.** $(-\infty; -6-\sqrt{5}] \cup [-6+\sqrt{5}; -3{,}5)$. **6.19.11.** $[-4-\sqrt{5}; -6) \cup (-2; -4+\sqrt{5}] \cup \cup (-1{,}5; -0{,}5)$. **6.19.12.** $\left(0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **6.19.13.** $\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$. **6.19.14.** $\left[\frac{2}{3}; \frac{1+2\sqrt{7}}{9}\right) \cup \left(\frac{5}{7}; \infty\right)$. **6.19.15.** $(3;4)$. **6.19.16.** $\varnothing$. **6.19.17.** 5. **6.19.18.** 2. **6.19.19.** $(0;1) \cup (2;3)$. ● Показать, что на ОДЗ неравенства $2^x - 3^x < 0$ и свести неравенство к равносильному: $\log_x(x^2 - 5x + 7) < 0$. **6.19.20.** $\left(-5; \frac{-7-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \cup \left[-\frac{7}{2}; \frac{-7+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-7+\sqrt{13}}{2}; \infty\right)$. **6.19.21.** $\left(-1; \frac{4-\sqrt{31}}{3}\right] \cup (1;2)$. **6.19.22.** $(-\infty; 2) \cup \left(\frac{5}{2}; 3\right) \cup (3;4)$. **6.19.23.** $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right]$. **6.19.24.** $[1;2)$.

6.19.25. $\left(2; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; 3\right)$. □ ОДЗ неравенства: $x \in (1;2) \cup (2;3) \cup (3;4)$. Преобразуем неравенство: $\frac{1}{2}\log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) > 3 \Longleftrightarrow$

$\iff \frac{1}{2}\log_{x-1}(x-4)^2 + \log_{4-x}[-(x-1)(x-4)] > 3 \iff \log_{x-1}|x-4| + \log_{4-x}|x-1| + \log_{4-x}|x-4| > 3$. Поскольку $x-4<0$, а $x-1>0$ на ОДЗ, то неравенство равносильно следующему

$$\log_{x-1}(4-x) + \log_{4-x}(x-1) + \log_{4-x}(4-x) > 3 \iff$$

$$\iff \log_{x-1}(4-x) + \frac{1}{\log_{x-1}(4-x)} > 2 \iff \frac{[\log_{x-1}(4-x)-1]^2}{\log_{x-1}(4-x)} > 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \log_{x-1}(4-x) > 0 \\ \log_{x-1}(4-x) \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (2;3) \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases} \iff x \in \left(2;\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2};3\right). \blacksquare$$

6.19.26. $[-2\sqrt{2};-1) \cup \left[\frac{-2+2\sqrt{11}}{5};1\right)$. □ Неравенство равносильно совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} x \in [-3;-1) \\ \sqrt{9-x^2}-x-1>0 \\ \sqrt{9-x^2}-x-1 \geqslant -x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \in (-1;0) \\ \sqrt{9-x^2}-x-1>0 \\ \sqrt{9-x^2}-x-1 \leqslant -x \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} x \in (0;1) \\ \sqrt{9-x^2}-x-1>0 \\ \sqrt{9-x^2}-x-1 \leqslant x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \in (1;3] \\ \sqrt{9-x^2}-x-1>0 \\ \sqrt{9-x^2}-x-1 \geqslant x. \end{cases}$$

В первой системе второе неравенство является следствием третьего, а потому система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x \in [-3;-1) \\ \sqrt{9-x^2} \geqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [-3;-1) \\ x^2 \leqslant 8 \end{cases} \iff x \in [-2\sqrt{2};-1).$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} x \in (-1;0) \\ \sqrt{9-x^2} > x+1 \\ \sqrt{9-x^2} \leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-1;0) \\ \sqrt{9-x^2} > x+1 \\ x^2 \geqslant 8. \end{cases}$$

Так как первое условие противоречит третьему, то система не имеет решений. Решая третью систему, имеем

$$\begin{cases} x \in (0;1) \\ \sqrt{9-x^2} > x+1 \\ \sqrt{9-x^2} \leqslant 2x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (0;1) \\ x^2+x-4<0 \\ 5x^2+4x-8 \geqslant 0. \end{cases}$$

Последний переход совершен в силу того, что правые части двух последних неравенств на множестве $x \in (0;1)$ положительны. Неравенство $x^2+x-4<0$ выполнено для всех $x \in (0;1)$; решением же неравенства $5x^2+4x-8 \geqslant 0$ будет множество $x \in \left(-\infty;\frac{-2-2\sqrt{11}}{5}\right] \cup \left[\frac{-2+2\sqrt{11}}{5};1\right)$. Следовательно, решением третьей системы будет множество $\left[\frac{-2+2\sqrt{11}}{5};1\right)$. Четвертая система не имеет решений в силу следующей цепочки равносильных преобразований:

$$\begin{cases} x\in(1;3] \\ \sqrt{9-x^2}-x-1>0 \\ \sqrt{9-x^2}-x-1\geqslant x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in(1;3] \\ \sqrt{9-x^2}-x-1\geqslant x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in(1;3] \\ \sqrt{9-x^2}\geqslant 2x+1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x\in(1;3] \\ 5x^2+4x-8\leqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in(1;3] \\ x\in\left[\frac{-2-2\sqrt{11}}{5};\frac{-2+2\sqrt{11}}{5}\right] \end{cases} \Longleftrightarrow x\in\varnothing.$$

Объединяя полученные решения каждой из четырех систем, получаем ответ: $x\in[-2\sqrt{2};-1)\cup\left[\frac{-2+2\sqrt{11}}{5};1\right)$. ■

6.19.27. $(0;\sqrt[6]{2}-1]\cup[63;\infty)$. ● Показать, что правая часть неравенства равна $\frac{37}{4}$.

6.19.28. $\left(-\frac{1}{3};\frac{-7-\sqrt{7}}{42}\right)\cup\left[\frac{-15+\sqrt{197}}{84};0\right)\cup\left(0;\frac{13-\sqrt{141}}{84}\right]\cup\left[\frac{13+\sqrt{141}}{84};\frac{1}{3}\right)$.

6.19.29. $(0;1)\cup\{7\}$. ● Показать, что на ОДЗ величина $(4^{-x}+3\cdot2^x)$ больше 1, откуда следует, что неравенство равносильно неравенству $\log_7 x-\log_x\frac{1}{7}-2\leqslant \leqslant 0$.

6.20.1. 5. ● Преобразовать неравенство к виду $(x^2-9)(\sin x-2)>0$, откуда $x^2-9<0$. **6.20.2.** $(-\sqrt{10};-\pi)\cup(-\pi;-3)\cup(3;\pi)\cup(\pi;\sqrt{10})$. ● Заметить, что при $x=\pi n$ величина $\log_{\frac{1}{2}}|\sin x|$ не определена, а при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ левая часть равна нулю, а, следовательно, неравенство не выполнено. При остальных x неравенство равносильно неравенству $\log_{\frac{1}{7}}(10-x^2)>0$. **6.20.3.** $(-\sqrt{10};-\pi)\cup \cup(-\pi;-3)\cup(3;\pi)\cup(\pi;\sqrt{10})$.

6.20.4. 60°. □ Неравенство равносильно следующему неравенству ($n\in\mathbb{Z}$):

$$2\sin(5x-30^\circ)<-\sqrt{2}\Longleftrightarrow\sin(5x-30^\circ)<-\frac{\sqrt{2}}{2}\Longleftrightarrow$$

$$-135^\circ+360^\circ\cdot n<5x-30^\circ<-45^\circ+360^\circ\cdot n\Longleftrightarrow-21^\circ+72^\circ\cdot n<x<-3^\circ+72^\circ\cdot n.$$

Промежуток, принадлежащий отрезку $[0^\circ;90^\circ]$, получается при $n=1$ и представляет собой отрезок $[51^\circ;69^\circ]$. Его серединой является точка $x=60^\circ$. ■

6.20.5. $x\neq\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. ● Показать, что величина $4^{\sin^2x}-1\geqslant0$, и в силу этого исходное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству $4^{\sin^2x}\cdot(4^{\sin^2x}-1)<12$.

6.20.6. $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{\pi};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\setminus\{k\pi\}$, где $k=-1,-2,-3,\ldots$ ● Показать, что первый сомножитель отрицателен на ОДЗ.

6.20.7. $\left[1;\frac{\pi}{2}\right]\cup\{3\}$. □ ОДЗ: $x\in[1;3]$. Очевидно, неравенство выполнено при $x=1$, $x=3$ и, если $\sqrt{2}\cos x-\sqrt{1+\cos2x}\geqslant0$. Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\cos x\geqslant\sqrt{\frac{1+\cos2x}{2}}\Longleftrightarrow\cos x\geqslant\sqrt{\cos^2x}\Longleftrightarrow\cos x\geqslant|\cos x|.$$

Последнее выполнено, если $\cos x \geqslant 0$. С учетом ОДЗ это неравенство выполнено для $x \in \left[1; \frac{\pi}{2}\right]$. Таким образом, решением неравенства является множество $x \in \left[1; \frac{\pi}{2}\right] \cup \{3\}$. ■

6.20.8. $\left(\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right) \cup \left[\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arcctg} \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **6.20.9.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ **6.20.10.** $2\pi n$, $n = -1, -2, \ldots$

6.20.11. $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi n}{2}\right)$, $x \neq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. ● Преобразовать неравенство к виду $\frac{(2\cos x + \sqrt{3})^2}{\sin 4x} < 0$.

6.20.12. $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. ● *Показать, что неравенство равносильно неравенству* $\frac{(\sin x - \sqrt{3}\cos x)^2}{\cos^2 x \cdot \sin 4x} < 0$.

6.21.1. 1. ● Заметить, что функция $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(2x+3)$ — убывающая, а $g(x) = 2x - 1$ — возрастающая. Следовательно, эти функции не могут иметь более одной точки пересечения. Подбором найти эту точку, после чего записать множество, на котором неравенство выполнено. **6.21.2.** $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. ● ОДЗ неравенства естественным образом разбить на четыре промежутка: $\left(-6; -\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$, $(0; 3)$, $[3; \infty)$. Показать, что на первых двух промежутках неравенство равносильно неравенству $\frac{9x}{3x+2} - 1 < \log_3(x+6)$, а на оставшихся двух — неравенству $\frac{9x}{3x+2} - 1 > \log_3(x+6)$. Далее, анализируя поведение функций $y_1 = \frac{9x}{3x+2} - 1$ и $y_2 = \log_3(x+6)$ на каждом промежутке, получить приведенный выше ответ.

6.21.3. $\frac{\pi(8k-3)}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. □ Преобразуем неравенство.

$$\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \leqslant \frac{\sin x - 3}{\sqrt{2}} \iff \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2} \leqslant \frac{\sin x}{2} - \frac{3}{2} \iff$$

$\iff \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \frac{\sin x}{2} \leqslant -\frac{3}{2}$. Так как значения функции $\sin t$ заключены в пределах от -1 до 1, то неравенство возможно лишь в том случае, если $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = -1$ и $\sin x = 1$ одновременно. Решением первого уравнения будут точки $x = -\frac{3\pi}{2} + 4\pi n$, а второго — $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. Выбирая точки, являющиеся одновременно решениями обоих уравнений, получим ответ: $x = -\frac{3\pi}{2} + 4\pi n = \frac{\pi(8n-3)}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

6.21.4. $\frac{3}{8} + k$, $k \in \mathbb{Z}$. ● Преобразовать неравенство к виду: $\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \geqslant \frac{1}{3}\sin 4\pi x + \frac{4}{3}$. Далее показать, что неравенство выполнено для тех значений x, которые удовлетворяют системе $\begin{cases} \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin 4\pi x = -1. \end{cases}$ **6.21.5.** $x = 5$,

$y = 4$, $z = 4$. ● Заметить, что сумма аргументов логарифмов тождественно равна 3. Пользуясь положительностью и целочисленностью аргументов логарифмов, показать, что каждый из них равен 1. Тогда неравенство примет вид $0 > z^2 - 9z + 17$. Показать, что его целочисленными решениями будут $z = 3, 4, 5, 6$. Еще раз используя целочисленность аргументов логарифмов, показать, что $z = 4$, откуда $x = 5$ и $y = 4$. **6.21.6.** $x = -3$, $y = -3$, $z = -4$.

6.21.7. $\frac{2}{5}\pi+\pi l$, $\frac{3}{5}\pi+\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. □ Преобразуем неравенство. Так как $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\pi = -1$, $\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\frac{3\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{5}$ и $\cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 5x$, то неравенство примет вид:

$$2 \geqslant \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\sin 5x} + \frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\sin 5x}}.$$

Сумма двух последних слагаемых представляет собой сумму двух взаимно обратных положительных чисел, и потому не меньше двух. С другой стороны, $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \geqslant 0$. Следовательно, неравенство может быть выполнено только в том случае, когда $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 0$ (т. е. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 0$) и $\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\sin 5x} = 1$ (т. е. $\sin 5x = 0$). Тогда имеем систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 0 \\ \sin 5x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right] \\ x = \frac{\pi k}{5}, \end{cases} \quad n,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Точки $x = \frac{\pi k}{5}$ принадлежат промежуткам $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right]$ только при $k = 2 + 5l$ и $k = 3 + 5l$. Таким образом, $x = \frac{2\pi}{5} + \pi l$ и $x = \frac{3\pi}{5} + \pi l$. ■

6.22.1. □ В силу неотрицательности подкоренных выражений, получаем, что $a \geqslant -0{,}5$, $b \geqslant -0{,}5$, $c \geqslant -0{,}5$. Тогда $a = 1 - b - c \leqslant 1 + 0{,}5 + 0{,}5 = 2$. Аналогично, $b \leqslant 2$ и $c \leqslant 2$. Следовательно, $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} < \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} < 15$. ■

6.22.2. □ Обозначив $\sqrt{x-1} + 1 = a$, $\sqrt[3]{x^2 - 1} - 1 = b$, получим следующую задачу: доказать, что если $a + b > 2$, то $a^2 + b^2 > 2$. Это следует из следующей цепочки преобразований: $a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2} > \frac{2^2 + 0^2}{2} = 2$. ■

6.22.3. ● Использовать те же соображения, что и в предыдущей задаче.

6.22.4. □ Перепишем неравенство в виде: $x^2+\pi x > -\frac{15}{2}\pi\sin x$. Рассмотрим две функции: $f(x) = x^2 + \pi x$ и $g(x) = -\frac{15}{2}\pi\sin x$. Все множество положительных чисел разобьем на три промежутка: $(0;\pi]$, $\left(\pi; \frac{7\pi}{6}\right]$ и $\left(\frac{7\pi}{6};\infty\right)$. Рассмотрим поведение функций на каждом промежутке. На промежутке $(0;\pi]$ функция $f(x)$ положительна, а $g(x)$ — неположительна. Следовательно, $f(x) > g(x)$ при $x \in (0;\pi]$. На промежутке $\left(\pi; \frac{7\pi}{6}\right]$ функция $f(x)$ монотонно возрастает и принимает значения большие, чем $f(\pi) = 2\pi^2$. Функция $g(x)$ тоже возрастает и принимает значения не больше, чем $g\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{15\pi}{4}$. Поскольку $2\pi^2>15>\frac{15\pi}{4}$, то неравенство $f(x)>g(x)$ выполнено и на этом промежутке. На промежутке $\left(\frac{7\pi}{6};\infty\right)$ справедлива цепочка $f(x)>f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{91}{36}\pi^2>\frac{90}{36}\pi>\frac{15}{2}\pi\geqslant g(x)$. Таким образом, и здесь неравенство $f(x)>g(x)$ выполнено. ■

6.23.1. $\left[\frac{2}{3};\infty\right)$. ● Выделить полный квадрат и записать неравенство в виде $(|x+2|+3a)^2\leqslant 4$. **6.23.2.** $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$. ● Заменой $\sqrt{3x+1}=t$ свести задачу к такой: «Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-2)t^2+2t-3<0$ выполняется для всех $t\in[2;4]$». **6.23.3.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. ● Сделать замену $\sqrt{2x+3}=t$.

6.23.4. $\left(\frac{10}{17};\infty\right)$. □ Сделав замену $t=2+\sin^2 x$, получим неравенство $at^4-t+a-8>0$. Теперь требуется найти такие значения a, что неравенство справедливо для всех $t\in[2;3]$. Для этого необходимо, чтобы $f(2)=a\cdot 2^4-2+a-8>0$, т. е. $a>\frac{10}{17}$. Покажем, что при таких значениях a функция $f(t)=at^4-t+a-8$ возрастает на отрезке $[2;3]$. Действительно, так как $f'(t)=4at^3-1$, то производная обращается в нуль в точке $t_0=\sqrt[3]{\frac{1}{4a}}$, причем при $t>t_0$ функция $f(t)$ — возрастающая (т. к. $f'(t)>0$ при $t>t_0$). При $a>\frac{10}{17}$ выполнено $t_0<\sqrt[3]{\frac{17}{40}}<2$. Таким образом, при $a<\frac{10}{17}$ функция $f(t)$ возрастает на отрезке $[2;3]$ и $f(2)>0$. Следовательно, $f(t)>0$ для всех значений $t\in[2;3]$. ■

6.23.5. 2. □ Преобразовав, запишем неравенство в виде

$$\frac{\left|(a+\cos x)-\sqrt{x^2+9}\right|^2}{a+\cos x}\leqslant 0.$$

Его решениями будут решения уравнения $a+\cos x=\sqrt{x^2+9}$ и неравенства $a+\cos x<0$. Неравенство не может иметь единственного решения ни при каком значении a. Следовательно, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо, чтобы неравенство $a+\cos x<0$ не имело решений, а это будет выполнено, если $a\geqslant 1$. Теперь необходимо, чтобы уравнение $a+\cos x=\sqrt{x^2+9}$ имело ровно одно решение. Заметим, что если x_0 — решение уравнения, то и $-x_0$ является решением. Стало быть, для того чтобы решение было единственно, необходимо, чтобы $x=0$ было решением. А это выполнено при $a=2$. Тогда уравнение выглядит так: $2+\cos x=\sqrt{x^2+9}$. Его левая часть не превосходит числа 3, а правая — не меньше 3. Следовательно, решение $x=0$ — единственное решение уравнения. Вспоминая, что при $a=2$ неравенство $a+\cos x<0$ не имеет решений, получаем ответ: $a=2$. ■

6.23.6. $(-\infty;0]\cup[3;\infty)$.

6.23.7. $\left(-\frac{9}{4};2\right)$. □ Исходное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x\geqslant -a\\ x^2+x+a-2<0\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases} x<-a\\ x^2-x-a-2<0.\end{cases}$$

Теперь требуется найти такие a, чтобы хотя бы одна из систем имела хотя бы одно положительное решение.

Рассмотрим сначала $a \geqslant 0$. Тогда вторая система не имеет положительных решений. Чтобы первая система имела хотя бы одно положительное решение, необходимо и достаточно, чтобы функция $f_1(x) = x^2 + x + a - 2$ имела два корня, из которых по крайней мере один положительный. Так как график $f_1(x)$ представляет собой параболу с вершиной, имеющей абсциссу в точке $x_1 = -\frac{1}{2}$, то для выполнения этих условий необходимо и достаточно, чтобы $f_1(0) < 0$, то есть $a < 2$. Таким образом, для $a \in [0; 2)$ условие задачи выполняется.

Рассмотрим теперь $a < 0$. Первая система имеет решения (они автоматически будут положительными), если $f_1(-a) < 0$, то есть при $a \in (-\sqrt{2}; 0)$ (с учетом условия $a < 0$). Вторая система будет иметь положительные решения, если или $f_2(0) < 0$, или $f_2(-a) < 0$, или $\begin{cases} D > 0 \\ 0 < x_2 < -a, \end{cases}$ где $f_2(x) = x^2 - x - a - 2$, $D = 1 + 4(a+2) = 4a + 9$ — дискриминант квадратичного трехчлена и $x_2 = +\frac{1}{2}$ — абсцисса вершины параболы. Первое условие выполнено при $a \in (-2; 0)$, второе — при $a \in (-\sqrt{2}; 0)$, третье — при $a \in \left(-\frac{9}{4}; 0\right)$ (всюду учтено, что $a < 0$). Таким образом, в случае $a < 0$ неравенство имеет хотя бы одно положительное решение при $a \in \left(-\frac{9}{4}; 0\right)$. Объединяя значения $a \in \left(-\frac{9}{4}; 0\right)$ и $a \in [0; 2)$, получим ответ: $a \in \left(-\frac{9}{4}; 2\right)$. ■

6.23.8. $\left[1; \frac{29}{5}\right]$. ● Привести функцию, стоящую под знаком модуля, к виду $f(x) = 4\cos^2 x - 2(a-1)\sin x \cos x + 3 - a = 2\cos 2x - (a-1)\sin 2x + 5 - a = \sqrt{4 + (a-1)^2}\sin(\varphi - 2x) + 5 - a$, где $\varphi = \arcsin \frac{2}{\sqrt{4 + (a-1)^2}}$. Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы наименьшее (m) и наибольшее (M) значения функции $f(x)$ удовлетворяли системе

$$\begin{cases} m \geqslant -6 \\ M \leqslant 6 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{4 + (a-1)^2} + 5 - a \leqslant 6 \\ -\sqrt{4 + (a-1)^2} + 5 - a \geqslant -6. \end{cases}$$

6.23.9. $a = -8$, $b = 7$. ● Показать, что условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда выполнены условия системы

$$\begin{cases} f(1) \leqslant 1 \\ f(3) \leqslant 1 \\ f\left(-\frac{a}{4}\right) \geqslant -1, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} f(x) = 2x^2 + ax + b \quad \text{и} \\ -\frac{a}{4} \text{ — абсцисса вершины параболы.} \end{array}$$

Из первого и третьего неравенств получить условие: $a \in [-8; 0]$, а из второго и третьего — условие: $a \in [-16; -8]$, откуда следует, что $a = -8$. Далее найти значение b.

6.23.10. $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; \infty)$. **6.23.11.** $(-\infty; -99]$. **6.23.12.** $\frac{1}{16}$. ● Рассмотреть положительные значения a, и привести в этом случае неравенство к виду $\sqrt[4]{a} \cdot \left(\sqrt{a} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{\sqrt{a}(x-1)^2}\right) \leqslant \left|\sin \frac{\pi x}{2}\right|$. Далее показать, что при $a > \frac{1}{16}$ решений нет, а при $a = \frac{1}{16}$ указать решение. **6.23.13.** $[-3; -2) \cup \{1\}$.

6.23.14. $\frac{1}{8}$. ● Заметить, что если (x_0, y_0) — решение системы, то и (y_0, x_0) — тоже решение системы, и для того, чтобы решение было единственным необходимо, чтобы оно имело вид (x_0, x_0). Подставив это решение в любое неравенство, получить условие для параметра a, исходя из условия единственности решения. **6.23.15.** $-\frac{1}{4}$. **6.23.16.** $a = 0$; $a = 1$. **6.23.17.** $c \in \{-4\} \cup \left[-\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right]$.
● Рассмотреть графики функций $y_1 = x^2 - 3x$ и $y_2 = -3|x + c| - c$ (рис. 7).

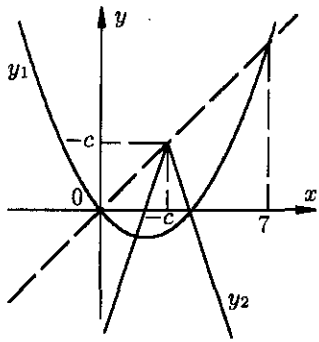


Рис. 7

Доказать, что целочисленными решениями неравенства могут быть только $x = 0, 1, 2, \ldots, 7$. Выяснить, при каких c каждое из этих значений является решением и выбрать те значения c, при которых количество решений наибольшее.

6.23.18. $\left(-\infty; -\frac{3\pi}{2} - \frac{5}{9}\right)$. □ Заменив $x^2 + ax = t$ и воспользовавшись соотношением $\cos t = -\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$, получим неравенство

$$\frac{6}{5}\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{6}{5}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Слева и справа стоят значения одной и той же функции $y = \frac{6}{5}z + \sin z$ в точках $2t + \frac{\pi}{3}$ и $t - \frac{\pi}{2}$. Так как эта функция возрастающая ($y' > 0$), то неравенство равносильно неравенству $2t + \frac{\pi}{3} < t - \frac{\pi}{2} \iff x^2 + ax + \frac{5\pi}{6} < 0$. Это неравенство должно выполняться для всех $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы для функции $f(x) = x^2 + ax + \frac{5\pi}{6}$ выполнялись условия:

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0 \end{cases} \iff a \in \left(-\infty; -\frac{3\pi}{2} - \frac{5}{9}\right). \blacksquare$$

6.23.19. $x \in \left(-\frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{4a+1});\ a\right)$ при $a \geqslant 0$.

6.23.20. $x \in \varnothing$ при $m \in (-\infty; -1]$; $x \in \left(-\infty; \frac{4m-1}{m+1}\right)$ при $m \in (-1; 1]$; $x \in \left(-\infty; \frac{4m-1}{m+1}\right) \cup \left(\frac{4m+1}{m-1}; \infty\right)$ при $m > 1$. □ Неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x > 4 \\ x(m-1) > 4m+1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leqslant 4 \\ x(1+m) < 4m-1. \end{cases}$$

Решим первую систему.

1) При $m < 1$ система примет вид $\begin{cases} x > 4 \\ x < \dfrac{4m+1}{m-1} \end{cases} \iff x \in \varnothing$, так как $\dfrac{4m+1}{m-1} = 4 + \dfrac{5}{m-1} < 4$.

2) При $m = 1$: $x \in \varnothing$, ибо второе неравенство не имеет решений.

3) При $m > 1$ система примет вид: $\begin{cases} x > 4 \\ x > \dfrac{4m+1}{m-1} \end{cases} \iff x > \dfrac{4m+1}{m-1}$, так как $\dfrac{4m+1}{m-1} = 4 + \dfrac{5}{m-1} > 4$.

Решим вторую систему.

1) При $m < -1$ система примет вид: $\begin{cases} x \leqslant 4 \\ x > \dfrac{4m-1}{m+1} \end{cases} \iff x \in \varnothing$, так как $\dfrac{4m-1}{m+1} = 4 - \dfrac{5}{m+1} > 4$.

2) При $m = -1$: $x \in \varnothing$, поскольку не выполняется второе неравенство.

3) При $m > -1$ система примет вид: $\begin{cases} x \leqslant 4 \\ x < \dfrac{4m-1}{m+1} \end{cases} \iff x < \dfrac{4m-1}{m+1}$, так как $\dfrac{4m-1}{m+1} = 4 - \dfrac{5}{m+1} < 4$.

Окончательно имеем: $x \in \varnothing$ при $m \in (-\infty; -1)$; $x \in \left(-\infty; \dfrac{4m-1}{m+1}\right)$ при $m \in (-1; 1]$; $x \in \left(-\infty; \dfrac{4m-1}{m+1}\right) \cup \left(\dfrac{4m+1}{m-1}; \infty\right)$ при $m > 1$. ■

6.23.21. $x \leqslant 3$ при $a < 1$; $x < 3 - \log_{11}^2 a$ при $a \geqslant 1$. ● Записать неравенство в виде $\left(11^{\sqrt{3-x}} - a\right)(12 - 11^{x-2}) > 0$. Показать, что на ОДЗ $12 - 11^{x-2} > 0$. **6.23.22.** $x \in [1; \infty)$ при $c \geqslant -2$; $x \in \left[1; 1+\log_3^2 \dfrac{c+1}{c+2}\right]$ при $c < -2$. **6.23.23.** $x \in \varnothing$ при $a \leqslant 5$; $x \in \left(a - 8; \dfrac{17a-130}{15}\right]$ при $a > 5$. **6.23.24.** $x \in \left[2^{\frac{(1-\log_2 a)}{(1+\log_a 2)}}; \infty\right)$ при $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$; $x \in (0; \infty)$, при $a = \frac{1}{2}$; $x \in \left(0; 2^{\frac{(1-\log_2 a)}{(1+\log_a 2)}}\right]$ при $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$; $x \in \varnothing$ при $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$. **6.23.25.** а) $x > \log_a 8$ при $a > 1$; $x < \log_a 8$ при $0 < a < 1$; б) $(-\infty; -4) \cup (-4; -3)$; в) $x \in \left(\log_a(4+\sqrt{17}); \infty\right)$ при $a > 1$; $x \in (\log_a(4+\sqrt{17}); \log_a 8)$ при $0 < a < 1$. **6.23.26.** $x \in \left[a; -\dfrac{3}{a}\right]$, если $a < 0$; $x \in \varnothing$, если $a = 0$; $x \in \left[-\dfrac{3}{a}; a\right]$, если $a > 0$. **6.23.27.** $x \in (-\infty; -3] \cup \left[0; -\dfrac{3}{a}\right]$, если $a \in (-\infty; 0)$; $x \in (-\infty; -3] \cup [0; \infty)$, если $a = 0$; $x \in \left[-\dfrac{3}{a}; -3\right] \cup [0; \infty)$, если $a \in (0; 1)$; $x \in \{-3\} \cup [0; \infty)$, если $a = 1$; $x \in \left[-3; -\dfrac{3}{a}\right] \cup [0; \infty)$, если $a \in (1; \infty)$.

6.23.28. $x \in [-a; 0) \cup (0; a]$, если $a > b$; $x \in [-a; 0) \cup \left(0; \dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}\right)$, если $a \leqslant b$.

6.23.29. $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty)$ при $a \in (-\infty; -5-\sqrt{24}] \cup (5-\sqrt{24}; \infty)$; $x \in \mathbb{R}$ при $a \in (-5-\sqrt{24}; 0]$; $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_3; x_4] \cup [x_2; \infty)$, при $a \in (0; 5-\sqrt{24}]$, где $x_{1,2} = \dfrac{5+a \mp \sqrt{a^2+10a+1}}{2}$, $x_{3,4} = \dfrac{5+a \mp \sqrt{a^2-10a+1}}{2}$.

6.23.30. $x \in [a+\sqrt{a^2+1}; -a-\sqrt{a^2-1}] \cup [-a+\sqrt{a^2-1}; \infty)$ при $a < -1$; $x \in [a+\sqrt{a^2+1}; \infty)$ при $a \geqslant -1$.

6.24.1. $\frac{1}{2}$. ● Заметить, что неравенство $\min\left\{1-x^2, \dfrac{1+x}{2}\right\} \geqslant 0{,}5$ равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 1-x^2 \leqslant \dfrac{1+x}{2} \\ 1-x^2 \geqslant 0{,}5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1-x^2 \geqslant \dfrac{1+x}{2} \\ \dfrac{1+x}{2} \geqslant 0{,}5. \end{cases}$$

6.24.2. $\left(\log_2 \dfrac{8}{5}; \infty\right)$. ● Достаточно найти те значения x, при которых хотя бы одно из чисел положительно. **6.24.3.** $\left(-\infty; -\dfrac{5}{3}\right)$. **6.24.4.** $10+2\sqrt{5}$. ● Показать, что область, задаваемая системой, имеет вид, изображенный на рис. 8.

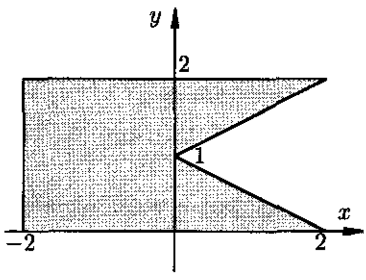


Рис. 8

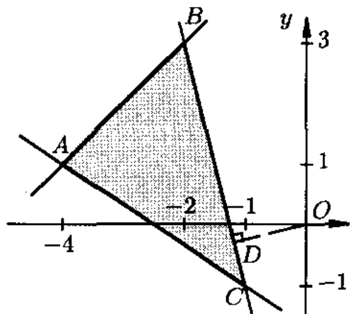


Рис. 9

6.24.5. а) $\left[\dfrac{25}{17}; 17\right]$; б) $[-1{,}5; 1]$. □ Множество точек (x, y), удовлетворяющих системе, заполняют треугольник, изображенный на рис. 9. Очевидно, что $-4 \leqslant x \leqslant -1$.

а) Функция $\rho(M) = x^2 + y^2$ есть квадрат расстояния от точки $O(0,0)$ до $M(x,y)$. Нужно найти наибольшее и наименьшее значения функции $\rho(M)$, при условии, что точка M принадлежит треугольнику ABC. $\rho_{\text{наиб}} = \rho(A)$, а $\rho_{\text{наим}} = \rho(D)$, где D — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BC (докажите). $\rho(A) = 17$, $\rho(D) = \dfrac{25}{17}$.

б) Линии $\dfrac{y}{x} = \text{const}$ являются прямыми, проходящими через начало координат. Наименьшее значение отношение $\dfrac{y}{x}$ принимает, когда прямая проходит через точку B и тогда $\dfrac{y}{x} = -1{,}5$; а наименьшее — когда прямая проходит через точку C и тогда $\dfrac{y}{x} = 1$. ■

6.24.6. $f(x) = \text{const}$. □ Пусть x и y — произвольные ($y > x$). Положим $\Delta x = \frac{y-x}{n}$ (n выбрано тоже произвольно). Тогда

$$f(y) - f(x) = f(x + n\cdot\Delta x) - f(x) =$$
$$= \left[f(x+n\cdot\Delta x) - f(x+(n-1)\cdot\Delta x)\right] + \left[f(x+(n-1)\cdot\Delta x) - f(x+(n-2)\cdot\Delta x)\right] +$$
$$+ \ldots + [f(x+\Delta x) - f(x)] \leqslant [(x+n\cdot\Delta x) - (x+(n-1)\cdot\Delta x)]^2 +$$
$$+ [(x+(n-1)\cdot\Delta x) - (x+(n-2)\cdot\Delta x)]^2 + \ldots + [(x+\Delta x) - x]^2 =$$
$$= \underbrace{\Delta x^2 + \Delta x^2 + \ldots + \Delta x^2}_{n \text{ раз}} = n\cdot\Delta x^2 = n\cdot\frac{(y-x)^2}{n^2} = \frac{(y-x)^2}{n}.$$

Таким образом, $f(y) - f(x) \leqslant \frac{(y-x)^2}{n}$ для любого n. Следовательно, $f(y) - f(x) \leqslant 0$. Аналогично доказывается, что $f(x) - f(y) \leqslant 0$. Следовательно, $f(y) - f(x) = 0$ для любых x и y. Таким образом, $f(x) = \text{const}$. ■

7. Текстовые задачи

7.1.1. 400 км. □ Пусть S — расстояние между городами. Тогда в первый день турист проехал $\left(\frac{S}{5} + 60\right)$ км, во второй — $\left(\frac{S}{4} + 20\right)$ км, а в третий — $\left(\frac{23}{80}S + 25\right)$ км. По условию задачи имеем уравнение: $\left(\frac{S}{5} + 60\right) + \left(\frac{S}{4} + 20\right) + \left(\frac{23}{80}S + 25\right) = S$. Решив уравнение, получим $S = 400$ км. ■

7.1.2. 105 км. ● Обозначив путь по ровному участку за S, получите уравнение $\frac{S}{70} + \frac{125-S}{60} + \frac{125-S}{80} + \frac{S}{75} = \frac{209}{60}$.

7.1.3. 4,5 ч. □ С момента начала движения мотоциклиста и до встречи велосипедист проехал расстояние в 3 раза меньшее, чем мотоциклист за это же время, то есть $\frac{1}{6}$ часть всего пути. Следовательно, до этого он проехал $\frac{1}{3}$ часть всего пути за 3 часа. Стало быть, оставшуюся часть ($\frac{1}{6}$ расстояния от A до B) он проехал за 1,5 часа. Следовательно, все время движения велосипедиста составит 4,5 часа. ■

7.1.4. 40 км/ч. □ Пусть v км/ч — скорость мотоциклиста до задержки. Тогда $(v+10)$ км/ч — его скорость после задержки. Расстояние в 80 км мотоциклист должен был проехать за время $\frac{80}{v}$ ч, а проехал за $\frac{80}{v+10}$ ч, причем первое время по условию задачи больше на 24 минуты, что соответствует $\frac{2}{5}$ ч. Таким образом, получим уравнение $\frac{80}{v} - \frac{80}{v+10} = \frac{2}{5} \Longleftrightarrow v^2 + 10v - 2000 = 0$. Решением последнего уравнения является $v = 40$ (второй корень отрицателен). ■

7.1.5. 64 км/ч. □ Если за S км обозначить весь путь, то время, затраченное поездом на первую четверть пути, составит $\frac{S}{320}$ ч, а на оставшуюся часть — $\frac{3S}{240} = \frac{S}{80}$ (ч). Тогда на весь путь поезд затратил $\frac{S}{320} + \frac{S}{80} = \frac{5S}{320}$ часов и средняя скорость составит $S : \frac{5S}{320} = 64$ км/ч. ■

7.1.6. 1375 км.
7.1.7. 9 минут. □ Пусть x м/мин — скорость приятеля. Тогда $2x$ и $8x$ — скорости пассажира и трамвая соответственно. За ту минуту, пока пассажир ехал в трамвае после того, как заметил своего приятеля, расстояние между приятелями станет $x + 8x = 9x$ (м). Теперь пассажир должен ликвидировать отставание от приятеля в $9x$ метров, причем скорость их сближения будет $2x - x = x$ (м/мин). Тогда приятели поравняются через $9x : x = 9$ (минут). ■
7.1.8. 60 км/ч. □ Пусть t ч — время, затрачиваемое поездом по расписанию на оставшиеся полпути длиной 10 км. После стоянки ему нужно преодолеть те же 10 км за время $\left(t - \frac{1}{20}\right)$ ч. Следовательно, поезд должен ехать эти 10 км со скоростью $\frac{10}{t - \frac{1}{20}}$ км/ч, а скорость по графику равна $\frac{10}{t}$. Из условия задачи получаем уравнение $\frac{10}{t - \frac{1}{20}} - \frac{10}{t} = 10 \Longleftrightarrow 20t^2 - t - 1 = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{1}{4}$ (второй корень $t = -\frac{1}{5}$ не удовлетворяет физическому смыслу величины t). Т. о., поезд должен проходить оставшиеся 10 км за $\frac{1}{4}$ часа. Если же он задержится на 5 минут, то те же 10 км он должен проехать за $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ часа. Тогда его скорость должна быть $10 : \frac{1}{6} = 60$ км/ч. ■
7.1.9. *50 км/ч; 20 км/ч.* ● *Обозначив за x скорость второго велосипедиста,* получить уравнение $\frac{100}{x} = \frac{100}{x+30} + 3$. **7.1.10.** 0,5 км/мин; 0,6 км/мин. **7.1.11.** 10 км/ч; 8 км/ч. **7.1.12.** 30 км. **7.1.13.** 5 км/ч.
7.1.14. 30 км/ч. □ Пусть скорости велосипедиста и мотоциклиста соответственно x км/ч и y км/ч. Тогда в минуту они проезжают $\frac{x}{60}$ км и $\frac{y}{60}$ км. По условию задачи получаем первое уравнение: $\frac{y}{60} - \frac{x}{60} = 0{,}5$. На весь путь велосипедист и мотоциклист затрачивают $\frac{120}{x}$ и $\frac{120}{y}$ часов, соответственно. По второму условию задачи получим уравнение $\frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 2$. Решая систему $\begin{cases} \frac{y}{60} - \frac{x}{60} = 0{,}5 \\ \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 2, \end{cases}$ получим $x = 30$ км/ч (второй корень отрицателен). ■
7.1.15. 15 км/ч. ● Ввести неизвестные S км — длина ровного участка и x км/ч и y км/ч — скорости велосипедиста по ровной дороге и в гору, соответственно. Получить систему:

$$\begin{cases} S = x, \\ 25 - S = y, \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{30}. \end{cases}$$

7.1.16. 40 км/ч и 55 км/ч.
7.1.17. 50 км/ч. □ Пусть расстояние между A и B равно S км, а v км/ч — скорости автомобилей. Тогда $2v$ — скорость сближения автомобилей, и из первого условия задачи получим уравнение $S = 2v \cdot \frac{11}{2}$. Из второго условия задачи находим время движения каждого автомобиля до предполагаемой встречи:

$t_1 = \dfrac{\frac{S}{2}+25}{v+10}$ (для автомобиля, увеличившего свою скорость) и $t_2 = \dfrac{\frac{S}{2}-25}{v}$. По условию $t_1 = t_2$. Т. о., получим систему

$$\begin{cases} S = 2v \cdot \frac{11}{2} \\ \dfrac{\frac{S}{2}+25}{v+10} = \dfrac{\frac{S}{2}-25}{v}, \end{cases}$$

из которой получаем указанный ответ. ■

7.1.18. На 1 час. □ Пусть S км — расстояние между городами, а t ч — время, прошедшее между выездом первой и второй автомашины. Тогда $\frac{S}{6}$ и $\frac{S}{8}$ — скорости первой и второй автомашины соответственно. За время t первая автомашина проедет $\frac{S}{6}\cdot t$ км. Оставшееся расстояние $S-\frac{S}{6}\cdot t$ автомашины покроют за $\left(S-\frac{S}{6}t\right):\left(\frac{S}{6}+\frac{S}{8}\right) = \frac{4(6-t)}{7}$ часов (здесь $\frac{S}{6}+\frac{S}{8}$ — скорость сближения автомашин). Тогда первая машина до встречи проедет $\left[\frac{4(6-t)}{7}+t\right]\cdot\frac{S}{6}$ км, а вторая — $\frac{4(6-t)}{7}\cdot\frac{S}{8}$ км. По условию задачи получаем уравнение $\left[\frac{4(6-t)}{7}+t\right]\cdot\frac{S}{6} = \frac{4(6-t)}{7}\cdot\frac{S}{8}\cdot\frac{9}{5}$, из которого получаем, что $t = 1$. ■

7.1.19. 4 км/ч; 16 км/ч. **7.1.20.** $t_1 = 4$ часа, $t_2 = 6$ часов; $v_1 = 6$ км/ч, $v_2 = 4$ км/ч. **7.1.21.** 150 км. **7.1.22.** 60 км/ч; 80 км/ч. **7.1.23.** 60 км. **7.1.24.** 24 минуты.

7.1.25. 20 км/ч. □ Пусть x км/ч — скорость третьего велосипедиста. К моменту его выезда из поселка первый велосипедист проехал 24 км, а второй — 10 км. Относительная скорость сближения третьего велосипедиста со вторым и с первым равна, соответственно, $(x-10)$ км/ч и $(x-12)$ км/ч. Чтобы ликвидировать отставание в 10 км и 24 км от второго и первого велосипедистов, третьему понадобится соответственно $\frac{10}{x-10}$ ч и $\frac{24}{x-12}$ ч. Т. к. время между встречами составляет по условию задачи 2 часа, то получим уравнение $\frac{24}{x-12} - \frac{10}{x-10} = 2$. Решив это уравнение, получим $x_1 = 20$ и $x_2 = 9$. Последний корень не удовлетворяет условию $x > 12$ (т. к. скорость третьего велосипедиста больше скорости первых двух). ■

7.1.26. 100 км/ч. **7.1.27.** 72 км/ч. **7.1.28.** 12 часов. **7.1.29.** 7,5 часов.

7.1.30. 8 км. □ Пусть x км — половина расстояния от A до B. По условию задачи, когда первый пешеход прошел x км, второй прошел $(2x-24)$ км. Отношение пройденных расстояний (за одинаковое время) равно отношению скоростей пешеходов. Аналогично, когда второй прошел x км, то первый прошел $(2x-15)$ км, и отношение $2x-15$ к x тоже равно отношению их скоростей. Т. о., получим уравнение $\frac{x}{2x-24} = \frac{2x-15}{x}$, решениями которого будут $x_1 = 20$ и $x_2 = 6$. Последний корень — посторонний, т. к. в этом случае расстояние от A до B равно 12 км и не может быть выполнено, например, первое условие задачи. Т. о. расстояние от A до B равно $2x = 40$. Когда первый пешеход пройдет 40 км, второй — пройдет $2(2x-24) = 2\cdot 16 = 32$ км и ему останется пройти 8 км. ■

7.1.31. 18 км/ч; 12 км/ч. **7.1.32.** 100 км/ч. **7.1.33.** 12 км. **7.1.34.** 30 км/ч.
7.1.35. 1 час. ● Покажите, что пункт B находится между A и C.
7.1.36. 2,5 км/ч; 1,5 км/ч. □ Т. к. лодка проплывает 19 км по озеру за 2 часа, то ее собственная скорость равна 9,5 км/ч. Пусть v — скорость течения второй реки. Тогда $(v+1)$ — скорость течения первой. Плывя вниз по течению первой реки, лодка перемещается со скоростью $(v+10{,}5)$ км/ч и тратит на это $\frac{36}{v+10{,}5}$ часов. Скорость передвижения лодки против течения второй реки равна $(9{,}5-v)$ км/ч, а затраченное на подъем в ее верховья время — $\frac{24}{9{,}5-v}$.
По условию задачи $\frac{36}{10{,}5+v}+\frac{24}{9{,}5-v}=6$. Решая это уравнение и учитывая, что $v>0$, получаем $v=1{,}5$. ■
7.1.37. 15 км/ч. **7.1.38.** 290 км; 2 км/ч. **7.1.39.** 32,5 км/ч. **7.1.40.** 21 км/ч.
● Обозначив за x км/ч и y км/ч скорости лодки в стоячей воде и реки соответственно, получить систему: $\begin{cases} \frac{18}{x+y}+\frac{18}{x-y}=\frac{7}{4} \\ \frac{6}{x-y}-\frac{6}{x+y}=\frac{1}{12}. \end{cases}$ Сделать замену $\frac{6}{x+y}=a$, $\frac{6}{x-y}=b$. **7.1.41.** 25 км/ч.
7.1.42. 20 км/ч и 12 км/ч. □ Пусть $v_п$, $v_к$ и $v_р$ — собственные скорости парохода и катера и скорость течения реки соответственно. При движении по течению скорости парохода и катера будут $v_п+v_р$ и $v_к+v_р$ соответственно, причем первая скорость в 1,5 раза больше второй. К тому же разность этих скоростей $v_п-v_к$ равна 8. При движении против течения скорость парохода $v_п-v_р$ будет вдвое больше скорости $v_к-v_р$ катера. Следовательно, получаем систему:

$$\begin{cases} v_п+v_р=1{,}5(v_к+v_р), \\ v_п-v_к=8, \\ v_п-v_р=2(v_к-v_р). \end{cases}$$

Ее решением является $v_п=20$, $v_к=12$ и $v_р=4$. ■
7.1.43. 56 с. ● Обозначить длину эскалатора за S м, а скорости пассажира (собственную) и эскалатора — за x м/с и y м/с. Получить систему:
$\begin{cases} S=24(x+y), \\ S=42x. \end{cases}$ Далее найти $\frac{S}{y}$, исключив из системы переменную x.
7.1.44. 9 км/ч.
7.1.45. 15 с и 18 с. □ Пусть S м — длина окружности и x м/с и y м/с — скорости тел. Из первого условия вытекает, что $\frac{S}{x}-\frac{S}{y}=3$. Скорость, с которой первое тело догоняет второе, равна $(x-y)$ м/с. Каждые 1,5 минуты первое тело ликвидирует «отставание» в S м от второго тела. Следовательно, $90(x-y)=S \iff \frac{x}{S}-\frac{y}{S}=\frac{1}{90}$. Т. о. получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{S}{x}-\frac{S}{y}=3, \\ \frac{x}{S}-\frac{y}{S}=\frac{1}{90}. \end{cases}$$

Заменив $\frac{S}{x}=u$ и $\frac{S}{y}=v$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными, решив которую, найдем $u=15$ и $v=18$. ■
7.1.46. 70 см. **7.1.47.** 10 мин и 12 мин. **7.1.48.** 6 оборотов и 4 оборота.
● Ввести угловую скорость второй точки: x оборотов в минуту и получить

уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{12}$.

7.1.49. 10 км. ● Получить систему

$$\begin{cases} \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = \frac{1}{12}, \\ \frac{S}{v_2} = \frac{(7/5)S}{v_1} + \frac{1}{6}, \\ S = 2{,}5 \cdot v_2, \end{cases}$$

где v_1 и v_2 — скорости первого и второго туристов, а S — расстояние от A до B. **7.1.50.** 4 км/ч. **7.1.51.** 80 км/ч. **7.1.52.** 11 км/ч.

7.1.53. 80 км/ч. □ Введя неизвестные: v_1 — скорость скорого поезда и v_2 — скорость товарного поезда, получим систему: $\begin{cases} \frac{80}{v_1 + v_2} = \frac{2}{3} \\ \frac{40}{v_1} - \frac{5}{v_2} = \frac{3}{8}. \end{cases}$ Исключив v_2, получим уравнение $v_1^2 - 240v_1 + 320 \cdot 40 = 0$, которое имеет корни $v_1^{(1)} = 160$ и $v_1^{(2)} = 80$. Первый корень — посторонний, т. к. из первого уравнения вытекает, что $v_1 + v_2 < 120$, что невозможно при $v_1 = 160$ и $v_2 > 0$. ■

7.1.54. 30 км; 6 км/ч и 4 км/ч.

7.1.55. 1 ч. □ Пусть после встречи мотоциклист ехал x ч, а велосипедист — $(x+2)$ ч. Очевидно, $x < \frac{3}{4}$, т. к. мотоциклист проедет расстояние, которое проехал велосипедист до встречи быстрее его (т. е. быстрее 45 минут). Тогда отношение времен движения мотоциклиста до встречи и после нее равно отношению времен движения велосипедиста после встречи и до нее, т. е. $\frac{0{,}75}{x} = \frac{x+2}{0{,}75} \iff x_1 = \frac{1}{4}$ и $x_2 = \frac{9}{4}$ (посторонний корень). Следовательно, все время движения мотоциклиста будет 1 час. ■

7.1.56. В 2 раза. **7.1.57.** 10 ч и 15 ч. **7.1.58.** 5 часов. ● Получить систему $\begin{cases} \frac{S}{v_п + v_в} = \frac{5}{6} \\ \frac{S}{v_п} - \frac{S}{v_в} = 4, \end{cases}$ где $v_п$, $v_в$ — скорости пешехода и велосипедиста, а $S = |AB|$. Сделать замену $\frac{S}{v_п} = x$ и $\frac{S}{v_в} = y$. Решив систему, исключить постороннее решение. **7.1.59.** На 10 минут. **7.1.60.** 24 км/ч и 72 км/ч.

7.2.1. За 3 дня. □ I решение. Из условия следует, что второй рабочий за день выполняет $\frac{1}{6}$ часть работы. Следовательно, первый рабочий за два дня выполняет $\frac{2}{3}$ всей работы, а всю работу — за 3 дня.

II решение. Пусть S — весь объем работ (можно S принять и за 1), а x, y — производительность труда первого и второго рабочих, соответственно. Тогда получим систему $\begin{cases} 2x + 2y = S \\ 2x + y = \frac{5}{6}S \end{cases} \Longrightarrow 2x = \frac{4}{6}S$ (из удвоенного второго уравнения вычли первое) $\Longrightarrow 3x = S$. ■

7.2.2. 20 часов. □ Из условия следует, что за 1 час первая труба наполняет такую же часть бассейна, что и вторая труба за 4 часа. Следовательно, скорость наполнения бассейна второй трубой в 4 раза меньше скорости наполнения первой. Т. о., вторая труба заполнит бассейн за 20 часов. ■

7.2.3. За 6 дней. **7.2.4.** 5 часов. ● Получить уравнение $\frac{30}{x} + \frac{30}{x+4} = 8$, где x м^3/ч — *скорость наполнения бассейна.* **7.2.5.** 12 часов и 6 часов. **7.2.6.** 15 дней. **7.2.7.** 48 га. **7.2.8.** 4 детали и 2 детали. **7.2.9.** $b = \frac{1}{2}$. ● Получить систему

$$\begin{cases} \frac{11}{6-b} + \frac{14}{6+2b} = 4 \\ 0 < b < 1. \end{cases}$$

7.2.10. 9 месяцев. **7.2.11.** 14 изделий.

7.2.12. Через 4 часа. □ Пусть v м^3/ч — скорость наполнения первого бассейна. Тогда $(v+22)$ м^3/ч — скорость наполнения второго бассейна. Пусть t — время, необходимое для уравнивания количества воды в бассейнах. За это время в первый бассейн нальется $(v+22) \cdot t$ м^3 воды, а во второй $v \cdot t$ м^3. Из условия задачи имеем уравнение $(v+22) \cdot t + 112 = v \cdot t + 200 \Longrightarrow 22t = 88 \Longrightarrow t = 4$. ■

7.2.13. 20 деталей в час и 18 деталей в час. □ Пусть производительности работы первого и второго рабочих — составляет x деталей в час и y деталей в час, соответственно. Тогда $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ — время, необходимое каждому рабочему на изготовление одной детали. Тогда на выполнение трети работы (12 деталей) каждому потребуется $\frac{12}{x}$ и $\frac{12}{y}$ часов. По условию задачи первый сделал эту часть работы на 4 мин быстрее второго, т. е. $\frac{12}{x} + \frac{4}{60} = \frac{12}{y}$. Из второго условия выводим, что на изготовление 38 деталей первому понадобилось на 6 мин меньше, чем второму на изготовление 36 деталей. Т. о., получим второе уравнение $\frac{38}{x} + \frac{6}{60} = \frac{36}{y}$. Решив систему $\begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{4}{60} = \frac{12}{y} \\ \frac{38}{x} + \frac{6}{60} = \frac{36}{y}, \end{cases}$ получим $x = 20$ и $y = 18$. ■

7.2.14. 30 машин. □ Пусть было затребовано n машин. Тогда каждая из них должна была перевезти $\frac{90}{n}$ т груза. В действительности, на каждую погрузили $\left(\frac{90}{n} - 0{,}5\right)$ т груза и весь груз был перевезен $n+6$ машинами, т. е.

$$(n+6) \cdot \left(\frac{90}{n} - 0{,}5\right) = 90 \Longrightarrow n = 30 \quad \text{и} \quad n = -36 \text{ (посторонний корень).} \ ■$$

7.2.15. За 25 и 20 часов. ● Обозначив за v_1 и v_2 количество страниц, печатаемое каждой машинисткой за 1 час, получить систему $\begin{cases} \frac{30}{v_1} - \frac{30}{v_2} = 2{,}5 \\ \frac{27}{v_1+v_2} = 5. \end{cases}$

7.2.16. 10 страниц. □ Пусть первая машинистка печатает x страниц в час, а третья — y страниц в час. Тогда вторая печатает $x-2$ страниц в час. Время перепечатки каждой машинисткой одной страницы составит $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x-2}$ и $\frac{1}{y}$ часов, соответственно. По условию задачи имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \\ \frac{1}{y} : \frac{1}{x-2} = \frac{4}{3} \end{cases} \Longrightarrow x^2 - 7x - 30 = 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} x = 10 \quad \text{и} \\ x = -3 \text{ (посторонний корень).} \end{array} \quad ■$$

7.2.17. 9,6 и 8 страниц. **7.2.18.** 10 м^3/ч. ● Обозначив пропускные способности первой и второй труб за x м^3/ч, y м^3/ч соответственно, получить систему:

$$\begin{cases} 3x+2y=54 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{60}. \end{cases}$$ **7.2.19.** 6 часов и 3 часа. **7.2.20.** За 9 часов.

7.2.21. За 9 часов. □ Обозначим время, необходимое для уборки одному комбайну первого и второго полей, за t_1 и t_2 часов, соответственно. Тогда получим систему $\begin{cases} \dfrac{1}{3}t_1+\dfrac{1}{2}t_2=12 \\ \dfrac{1}{6}(t_1+t_2)+\dfrac{1}{2}(t_1+t_2)=20. \end{cases}$ Тогда $t_1=18$, $t_2=12$. Следовательно, время, необходимое для вспашки двумя комбайнами первого поля, составляет 9 часов. ■

7.2.22. $20000\,м^2$ и $110000\,м^2$.

7.2.23. 2 м и 1,5 м. □ Пусть первая машина проходит в день x м тоннеля, а вторая — y м. Тогда за 60 дней каждая из них пройдет $60x$ м и $60y$ м тоннеля, соответственно. 30% всей работы первой машины составят $18x$ м, а $26\frac{2}{3}$% всей работы второй машины — $16y$ м. Из условия задачи получим первое уравнение $18x+16y=60$. Время, необходимое первой машине для выполнения $\frac{2}{3}$ работы второй машины, составит $\left(\frac{2}{3}\cdot 60y\right) : x = \frac{40y}{x}$; время, необходимое второй машине для выполнения 0,3 всей работы первой машины, составит $\frac{0{,}3\cdot 60x}{y} = \frac{18x}{y}$. Из условия задачи получим второе уравнение $\frac{40y}{x}-\frac{18x}{y}=6$. Итак, получаем систему $\begin{cases} 18x+16y=60 \\ \dfrac{40y}{x}-\dfrac{18x}{y}=6. \end{cases}$ Решив ее, получим $\begin{cases} x=2 \\ y=1{,}5. \end{cases}$ ■

7.2.24. 5 страниц и 7 страниц.

7.2.25. 80 деталей в минуту. □ Пусть третий станок штампует x деталей в минуту. К моменту его пуска каждый из двух первых станков наштамповал по 4200 деталей. Чтобы ликвидировать отставание от первого станка третьему станку потребуется $\dfrac{4200}{x-60}$ минут (скорость первого станка стала равной 60 деталей в минуту). Для того, чтобы сравняться по числу деталей со вторым, ему потребуется уже $\dfrac{4200}{x-70}$ минут, причем последнее время на 210 минут больше первого. Имеем: $\dfrac{4200}{x-70}-\dfrac{4200}{x-60}=210 \Longrightarrow x_1=80$ и $x_2=50$. Второй корень посторонний, т. к. $x>70$. ■

7.2.26. 20 ч и 30 ч. ● Ввести неизвестные: A — вся работа и x и y — производительности труда каждого рабочего. Получить систему: $\begin{cases} 12(x+y)=A \\ \dfrac{A}{2x}+\dfrac{A}{2y}=25. \end{cases}$

Сделав замену $\dfrac{A}{x}=u$ и $\dfrac{A}{y}=v$, получить систему: $\begin{cases} 12\left(\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}\right)=1 \\ u+v=50, \end{cases}$ откуда $u=20$ и $v=30$. **7.2.27.** 45 дней и 36 дней. **7.2.28.** 20 ч. **7.2.29.** 15 дней. **7.2.30.** 132 мин и 110 мин. ● Ввести неизвестные: V — объем бассейна ($м^3$), x и y — скорости наполнения бассейна каждой трубой отдельно ($м^3$/мин). Получив систему $\begin{cases} \dfrac{V}{x}-\dfrac{V}{y}=22 \\ \dfrac{V}{x+y}=60, \end{cases}$ сделать замену $\dfrac{V}{x}=t_1$ и $\dfrac{V}{y}=t_2$. Тогда получится система $\begin{cases} t_1 - t_2 = 22 \\ 60\Big(\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2}\Big) = 1 \end{cases} \Longrightarrow t_1^2 - 142t_1 + 1320 = 0 \Longrightarrow t_1 = 132$ или $t_1 = 10.$

Показать, что второй корень — посторонний. **7.2.31.** За 30 и 60 дней. **7.2.32.** За 18 и 24 часа. **7.2.33.** 4 и 6 часов. **7.2.34.** За 28 и 21 день. **7.2.35.** За 18 часов. **7.2.36.** За 1 день. **7.2.37.** За 12 часов и 15 часов. **7.2.38.** За 10 дней. **7.2.39.** За 24 часа. **7.2.40.** За 50 и 75 дней.

7.2.41. *В 1,5 раза.* □ *Пусть S (га) — размер поля и x, y, z (га/день) — скорости* вспашки для первой, второй, третьей бригад. Тогда получим систему:

$\begin{cases} 4(x+y+z) = S, \\ 6(x+y) = S, \\ 8(x+z) = S. \end{cases}$ Вычитая из второго уравнения первое, а затем из третьего — первое, получим следствие

$\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 0, \\ 4x - 4y + 4z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $2y - 3z = 0$. Следовательно, $\dfrac{y}{z} = 1{,}5$. ■

7.3.1. 1,5 кг. □ Изначально в сплаве содержалось $12 \cdot 0{,}45 = 5{,}4$ (кг) меди. Пусть x кг — добавленное количество олова. Тогда процентное содержание меди в сплаве составит $5{,}4 : (12 + x) \cdot 100\%$. По условию задачи имеем уравнение $5{,}4 : (12 + x) = 0{,}4$, откуда получаем: $x = 1{,}5$ (кг). ■

7.3.2. 18 кг.

7.3.3. 5%. □ По условию задачи в сырье II сорта находится $0{,}25 \cdot 38 = 9{,}5$ (т) примесей и $38 - 9{,}5 = 28{,}5$ (т) чистого сырья. Следовательно, после очистки в 30 т сырья I сорта содержится 1,5 т примесей, что составляет $1{,}5 : 30 \cdot 100\% = 5\%$. ■

7.3.4. 165 кг. □ Хлеб содержит 55% сухого вещества. Следовательно, в 255 килограммах хлеба содержится $0{,}55 \cdot 255 = 140{,}25$ (кг) сухого вещества. В *сухарях это сухое вещество составит 85% от общего веса (x кг) сухарей. Тогда* $0{,}85x = 140{,}25$, откуда $x = 165$ кг. ■

7.3.5. 200 кг. **7.3.6.** 36 кг. **7.3.7.** 2,5 кг. **7.3.8.** 13,5 кг. **7.3.9.** 2%.

7.3.10. *13%.* □ *Пусть x г — первоначальный вес раствора. Тогда* $\dfrac{39}{x}$ и $\dfrac{39}{x+1000}$ соответственно — первоначальная концентрация соли и концентрация соли после добавления 1000 г воды. По условию задачи имеем уравнение:

$$\frac{39}{x} - \frac{39}{x+1000} = 0{,}1 \Longleftrightarrow x^2 + 1000x - 390000 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 300,\ x_2 = -1300$$

(x_2 — посторонний корень). Тогда первоначальная процентная концентрация составит $\dfrac{39}{300} \cdot 100\% = 13\%$. ■

7.3.11. 36%. • Обозначив объем аквариума за V, а первоначальный объем воды за x, получить уравнение $0{,}6x + 1{,}6(V - x) = V$, откуда $x = 0{,}6V$. Тогда в конце месяца вода составит $0{,}36V$, что соответствует 36%. **7.3.12.** 200 г.

7.3.13. 20 г. □ Пусть x г — отлитое количество раствора. После выпаривания в пробирке осталось $\dfrac{x}{3}$ г раствора (причем количество соли осталось прежним). После переливания его из пробирки в колбе стало $\left(80 - \dfrac{2}{3}x\right)$ г раствора. В растворе изначально было 8 г соли, которые теперь составляют 12% от полученного раствора. Следовательно, вес полученного раствора составит $\dfrac{8 \cdot 100}{12} = \dfrac{200}{3}$ г. Получаем уравнение $80 - \dfrac{2}{3}x = \dfrac{200}{3} \Longleftrightarrow x = 20$ г. ■

7.3.14. $\frac{1}{8}(3p-30)$ л; $p \in \left[10; 15\frac{1}{3}\right]$. ● Обозначить количество перелитой жидкости за x и получить уравнение $\frac{3p}{100}+\frac{2x}{100}=\frac{10}{100}(x+3)$, откуда $x=\frac{3p-30}{8}$. Ограничения на величину p вытекают из условий $x \geqslant 0$ и $x \leqslant 2$.
7.3.15. 9 кг. ● Обозначив вес первого слитка за x кг, получить уравнение $0{,}1x+0{,}4(x+3)=0{,}3(2x+3)$. Тогда $x=3$, а вес полученного слитка составит 9 кг.
7.3.16. 36 г; 75%. □ Пусть x г — количество кислоты в растворе. Тогда $(x-18)$ г — количество воды в нем. В новом растворе кислоты будет $\frac{4}{3}x$ г, а вес раствора составит $\left(\frac{7}{3}x-18\right)$ г. Из условия задачи получим уравнение $\frac{4}{3}x=\left(\frac{7}{3}x-18\right)\cdot 0{,}8$. Следовательно, $x=36$ г. Тогда процентное содержание кислоты в первоначальном растворе составит 75%. ■
7.3.17. 46%. □ Пусть p% — процентное содержание кислоты в первом растворе. Тогда $(p+10)$% — процентное содержание кислоты во втором растворе. После переливаний в первом сосуде будет 25 л раствора, из них кислоты — $\left(\frac{p}{100}\cdot 10+\frac{p+1}{100}\cdot 15\right)$ л, а в третьем будет 20 л раствора, содержащего $\left(2+\frac{p+1}{100}\cdot 15\right)$ л кислоты. По условию задачи концентрации полученных растворов одинаковы, следовательно, $\dfrac{\frac{p}{100}\cdot 10+\frac{p+1}{100}\cdot 15}{25}=\dfrac{2+\frac{p+1}{100}\cdot 15}{20}$. Решая это уравнение, получим $p=46\%$. ■
7.3.18. На 100 т. ● Ввести неизвестные x и y — взятые количества тонн стали первого и второго сортов соответственно и получить систему

$$\begin{cases} x+y=200 \\ 0{,}1x+0{,}3y=0{,}25\cdot 200. \end{cases}$$

7.3.19. В 2 раза. □ Пусть x и y — количества первого и второго сплавов, соответственно, взятые для переплавки. В первом сплаве $\frac{2}{3}x$ меди и $\frac{1}{3}x$ цинка; во втором — $\frac{1}{6}y$ меди и $\frac{5}{6}y$ цинка. Тогда в полученном сплаве будет $\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y$ меди и $\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}y$ цинка. По условию получим уравнение

$$\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y\right)\cdot 2=\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}y \iff 6x=3y \iff \frac{y}{x}=2. \blacksquare$$

7.3.20. 9 : 35. **7.3.21.** 9 г. **7.3.22.** 3 кг. ● Обозначив вес серебра в сплаве за x кг, а вес меди — за y кг, получить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{x+y+3}=0{,}9 \\ \dfrac{x+1{,}8}{x+y+2}=0{,}84 \end{cases} \iff x+y=3.$$

7.3.23. 9%.
7.3.24. 4,8 кг. □ Пусть x кг — вес отрезанных кусков. Сплавляя x кг первого сплава с $(8-x)$ кг второго сплава, получим 8 кг нового сплава с содержанием олова в $\left(x\cdot\frac{p}{100}+(8-x)\cdot\frac{q}{100}\right)$ кг. Сплавляя $(12-x)$ кг первого сплава

с x кг второго сплава, получим 12 кг нового сплава, в котором содержится $\left((12-x)\frac{p}{100}+x\cdot\frac{q}{100}\right)$ кг олова. Учитывая, что процентное содержание олова в *полученных сплавах одинаково, получим уравнение*

$$\frac{(12-x)\frac{p}{100}+x\cdot\frac{q}{100}}{12}=\frac{x\cdot\frac{p}{100}+(8-x)\frac{q}{100}}{8}.$$

После преобразований получим $x = 4{,}8$. ■

7.3.25. 1,92 кг, 0,96 кг и 9,12 кг. **7.3.26.** 60% и 30%.

7.3.27. 5 л. □ Пусть во втором сосуде было x л раствора. В нем содержится $0{,}46x$ л кислоты. После переливания 1 л первого раствора во второй во втором сосуде станет $(0{,}46x+0{,}7)$ л кислоты в общем объеме $(x+1)$ л. В первом сосуде останется 6,3 л кислоты в 9 л раствора. После второго переливания количество кислоты в первом сосуде станет равным $\left(6{,}3+\frac{0{,}46x+0{,}7}{x+1}\right)$ л, что должно составить 6,8 л. Получили уравнение $6{,}3+\frac{0{,}46x+0{,}7}{x+1}=6{,}8$, откуда $x=5$. ■

7.3.28. 12 л. □ Пусть x л — отлитое количество кислоты. Тогда в сосуде останется $(20-x)$ л кислоты и ее процентное содержание после долива воды составит $\frac{20-x}{20}\cdot 100\% = 5(20-x)\%$. После второго отлива кислоты останется $(20-x)\frac{5\cdot(20-x)}{100}=\frac{(20-x)^2}{20}$ л. Получаем уравнение $\frac{(20-x)^2}{20}=0{,}16\cdot 20 \iff$ $\iff x_1 = 12$ и $x_2 = 28$. Так как $0 < x < 20$, то x_2 — посторонний корень. ■

7.3.29. 90 л.

7.3.30. 5 г и 20 г. □ Пусть x (г) и y (г) — количества соли, содержащиеся первоначально в 1 кг каждого раствора. Для приготовления 10%-ного раствора нужно взять первого раствора вдвое больше второго. Тогда, взяв 2 кг первого раствора и 1 кг второго, получим 3000 г требуемого 10%-ного раствора. Таким образом, $\frac{2x+y}{3000}\cdot 100 = 10$. После испарения x г соли содержится в 800 граммах первого раствора и y г соли — в 800 граммах второго раствора. Для приготовления смеси той же концентрации теперь требуется первого раствора в 4 раза больше, чем второго. Взяв $4\cdot 800$ г первого раствора и 800 г второго, получим 4000 г раствора требуемой концентрации, то есть $\frac{4x+y}{4000}\cdot 100 = 10$. Получаем систему уравнений $\begin{cases} 2x+y=300 \\ 4x+y=400, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x=50, \\ y=200. \end{cases}$ Следовательно, в 100 г *первоначальных растворов содержалось, соответственно,* 5 г *и* 20 г *соли.* ■

7.3.31. 200 г.

7.3.32. Нет. □ I решение. Азот, фосфор и калий в первом удобрении относятся как 3 : 2 : 1, а во втором — как 5 : 2 : 3. Следовательно, азота в каждом удобрении больше, чем фосфора. То же будет и в смеси. Следовательно, смесь с содержанием азота, фосфора и калия в отношении 2 : 3 : 1 изготовить нельзя.

II решение. Пусть первого удобрения взяли $6x$ кг, а второго $10y$ кг. Тогда азота, фосфора и калия в смеси окажется, соответственно, $3x+5y$, $2x+2y$, $x+3y$. По условию задачи $\begin{cases} \frac{3x+5y}{2x+2y}=\frac{2}{3} \\ \frac{3x+5y}{x+3y}=2. \end{cases}$ Из первого уравнения имеем: $5x = -9y$, что невозможно. Следовательно, надлежащей смеси изготовить нельзя. ■

7.4.1. 150%. **7.4.2.** На 10%.

7.4.3. 10%. □ Если r — радиус первоначального круга, то площадь вырезанного круга равна $0{,}81\pi r^2 = \pi(0{,}9r)^2$. Следовательно, радиус вырезанного круга равен $0{,}9r$, а толщина кольца — $0{,}1r$, что соответствует 10%. ■

7.4.4. 99,75% от плана. **7.4.5.** На 12%. **7.4.6.** На 68%. **7.4.7.** На 10%.

7.4.8. 4 руб. и 2 руб. □ Пусть книги стоят x и y рублей, соответственно. Тогда $x + y = 6$. По условию, если бы первая книга стоила $0{,}75x$, а вторая — $1{,}5y$, то их стоимости были равны, т. е. $0{,}75x = 1{,}5y$. Решив систему из двух составленных уравнений, получим $x = 4$ и $y = 2$. ■

7.4.9. На 78,2%. □ Пусть x — первоначальное содержание кремния. После 1-го этапа кремния станет $1{,}25x$. После 2-го — $1{,}2 \cdot 1{,}25x = 1{,}5x$. После 3-го — $1{,}1 \cdot 1{,}5x = 1{,}65x$. И, наконец, после 4-го — $1{,}08 \cdot 1{,}65x = 1{,}782x$. А это означает, что содержание кремния увеличилось на 78,2%. ■

7.4.10. На 54,1%. **7.4.11.** 40 л.

7.4.12. На $13\frac{1}{3}$%. □ Пусть число голосующих людей равно y, а число непроголосовавших к 18 часам — x. Тогда к 22 часам не проголосовало $0{,}8x$ человек. По условию задачи $0{,}8x = 0{,}32y$, т. е. $x = 0{,}4y$. Таким образом, к 18 часам проголосовало $y - x = 0{,}6y$ человек, а к 22 часам — $0{,}68y$ человек. Следовательно, число проголосовавших увеличилось на $0{,}08y$ человек, что составляет $13\frac{1}{3}$% от числа $0{,}6y$ — проголосовавших к 18 часам человек. ■

7.4.13. 900, 360 и 150 тыс. руб.

7.4.14. 240 человек. □ Т. к. 15% абитуриентов не решили ни одной задачи, а число верно решивших все задачи в $\frac{5}{3}$ раза больше числа абитуриентов, не решивших ни одной задачи, то число людей, верно решивших все задачи, составляет 25% от общего числа абитуриентов. Следовательно, 60% абитуриентов решили задачи с ошибками, т. е. 144 человека составляют 60% от общего числа абитуриентов. Значит, всего абитуриентов было $\frac{144 \cdot 100\%}{60\%} = 240$ человек. ■

7.4.15. 500 книг. **7.4.16.** 20%. **7.4.17.** 12,5%, 4%, 8%. **7.4.18.** На 100%.

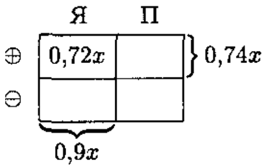
7.4.19. 120%. □ Пусть кредит составил A рублей и p — процент годовых по кредиту. В конце первого года фермер должен банку $A\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ рублей, а после частичной уплаты — $\frac{1}{4}A\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ рублей. К концу второго года фермер должен банку $\frac{1}{4}A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ рублей, что по условию составило $1{,}21A$ рублей. Таким образом, получаем уравнение $\frac{1}{4}A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1{,}21A$, откуда $p = 120\%$. ■

7.4.20. На 25%. **7.4.21.** На 10%.

7.4.22. На 140%. □ Пусть первоначальная зарплата — x рублей, а y — цена условной единицы товара. Количество купленного товара составит $\frac{x}{y}$ условных единиц. После снижения цен условная единица товара стоит $0{,}6y$ рублей, а зарплата после повышения составит $(1{,}2)^2 \cdot x = 1{,}44x$ рублей. Тогда количество товара, которое можно будет купить на эти деньги, составит $\frac{1{,}44x}{0{,}6y} = 2{,}4\frac{x}{y}$ условных единиц, т. е. в 2,4 раза больше, чем раньше (т. е. 240% от первоначального количества), что составляет рост на 140%. ■

7.4.23. 80 и 12 копеек. **7.4.24.** $1\frac{3}{19}\%$. • Решение этой задачи аналогично решению следующей.

7.4.25. 20%. □ Все дни рассматриваемого периода времени можно подразделить на 4 категории (см. рис.): 1) ясные дни, верно предсказанные Гидрометцентром (левый верхний квадрат); 2) ясные дни, когда предсказания Гидрометцентра не сбывались (левый нижний квадрат); 3) пасмурные дни, верно предсказанные Гидрометцентром (правый верхний квадрат); 4) пасмурные дни, на которые выпадало предсказание Гидрометцентром ясной погоды.



Я — ясно

П — пасмурно

$\oplus$ — верные предсказания Гидрометцентра

$\ominus$ — ошибочные предсказания Гидрометцентра

Пусть x дней велись наблюдения. Тогда на $0{,}9x$ дней приходилась ясная погода, причем $0{,}8 \cdot 0{,}9x = 0{,}72x$ дня Гидрометцентр верно ее предсказывал. Всего же Гидрометцентр не ошибся в $0{,}74x$ случаях. Стало быть, верно предсказанная пасмурная погода пришлась на $0{,}74x - 0{,}72x = 0{,}02x$ дней. Всего же пасмурных дне было $x - 0{,}9x = 0{,}1x$. Таким образом, верно предсказанные пасмурные дни среди всех пасмурных дней составят $\frac{0{,}02x}{0{,}1x} \cdot 100\% = 20\%$. ■

7.4.26. 15 автомобилей; 4 млн руб.

7.4.27. 1800 кг и 3000 кг. □ Пусть t — количество привезенных мешков с сахаром, а v (кг) — масса одного мешка с сахаром. Тогда мешков с песком было $1{,}25t$, а вес одного такого мешка составляет $\frac{4}{3}v$. По условию имеем $vt + \frac{4}{3}v \cdot 1{,}25t = 4800 \Longrightarrow v \cdot t = 1800$ кг — *это вес привезенного сахара.* Тогда песка привезли 3000 кг. (Заметим, что в задаче содержится излишнее условие — количество мешков). ■

7.4.28. 90 и 135 рублей.

7.4.29. 4%. □ Пусть a (коп.) — первоначальный вклад, а $p\%$ — выплачиваемый процент годовых. Через год сумма увеличится на $\frac{a \cdot p}{100}$ копеек и составит $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ копеек. После прибавления к ней 7984 копеек еще через год сумма на книжке станет равной $\left(a\left(1 + \frac{p}{100}\right) + 7984\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Обозначив $\frac{p}{100} = t$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} at = 2016 \\ [a(1+t) + 7984] \cdot (1+t) = 62816 \\ a \geqslant 500. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение значение $a = \frac{2016}{t}$, получим уравнение $t^2 - 5{,}08t + 0{,}2016 = 0$, откуда $t_1 = 0{,}04$, $t_2 = 5{,}04$. При t_2 величина $a < 500$, поэтому этот корень — посторонний. При $t = 0{,}04$ условие $a \geqslant 500$ выполнено. Следовательно, $\frac{p}{100} = 0{,}04$, а $p = 4\%$. ■

7.4.30. 210 тыс. рублей.

7.5.1. 47. □ Пусть x и y соответственно число десятков и число единиц двузначного числа. Тогда оно имеет вид $10x+y$. Из первого условия задачи получим уравнение $10x+y = 4\cdot(x+y)+3$. Из второго — уравнение $10x+y-2\cdot(x+y) = 25$. Таким образом, получим (после некоторых преобразований) систему уравнений $\begin{cases} 6x-3y=3 \\ 8x-y=25 \end{cases} \iff \begin{cases} x=4 \\ y=7. \end{cases}$ Следовательно, двузначное число имеет вид 47. ■

7.5.2. 32.

7.5.3. 1791. □ Пусть $\overline{xyz1}$ — десятичная запись числа (x, y, $z \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant x \leqslant 9$, $0 \leqslant y$, $z \leqslant 9$). По условию задачи числа $10x+y$, z, 1 образуют арифметическую прогрессию. Отсюда, используя ограничения на x и z, сразу получаем, что $x=1$. Так как $10+y$, z и 1 — последовательные члены арифметической прогрессии, то выполняется равенство $10+y+1 = 2z \iff 11+y = 2z$. Возможными решениями данного уравнения являются следующие пары (y,z): $(1,6)$, $(3,7)$, $(5,8)$ и $(7,9)$. Величина $z-y$ достигает наименьшего значения в последнем варианте. Следовательно, искомое число — 1791. ■

7.5.4. 77 или 86. ● Заметить, что чисел, удовлетворяющих первому условию задачи, всего пять: 59, 68, 77, 86, 95. Далее перебором найти искомые числа.

7.5.5. 285714. **7.5.6.** 1596. **7.5.7.** 37.

7.5.8. 1232. □ Из условия ясно, что первое из этих чисел — двузначное, а второе — четырехзначное, оканчивающееся цифрой 2. Тогда десятичная запись этих чисел выглядит так: $\overline{xy}$, $\overline{zuv2}$. По условию задачи имеем систему: $\begin{cases} \overline{xy}+\overline{zuv2}=1244 \\ \overline{xy3}=\overline{zuv}. \end{cases}$ Из первого уравнения получаем, что $y=2$. Тогда из второго уравнения имеем: $u=2$, $v=3$. Тогда из первого уравнения получаем, что $x=1$, а, следовательно, и $z=1$. Таким образом, $\overline{zuv2}=1232$. ■

7.5.9. 824. ● Предположив, что десятичные записи этих чисел имеют вид $\overline{zyx}$ и $\overline{xyz}$, получить систему

$$\begin{cases} 100z+10y+x+100x+10y+z=1252, \\ x+y+z=14, \\ x^2+y^2+z^2=84. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений системы получить равенства $x+z=12$ и $y=2$. Тогда исходная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} y=2, \\ x+z=12, \\ x^2+y^2+z^2=84. \end{cases} \quad \text{Тогда} \begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=8 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=8 \\ y=2 \\ z=4. \end{cases}$$

Наибольшим из чисел 824 и 428 является первое. **7.5.10.** 452. ● Записав систему

$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ x^2+y^2+z^2=45 \\ 100x+10y+z-198=100z+10y+x, \end{cases}$$

где x, y, z — соответственно число сотен, десятков и единиц искомого числа, получить из третьего уравнения соотношение $x-z=2$. **7.5.11.** 34. ● Получить систему $\begin{cases} n(n+7)+400=52n+26 \\ n>26,\ n\in\mathbb{N}, \end{cases}$ где n — меньшее из чисел. **7.5.12.** 83.

7.6.1. 176 человек. **7.6.2.** 0,5. ● Необходимо найти значение величины x, при котором функция $y = x - x^2$ принимает наибольшее значение. **7.6.3.** $x = \frac{8\pi}{5}$.

● Показать: 1) что решением неравенства будет множество $x \geqslant 5$; 2) что если x — искомое число, то оно удовлетворяет уравнению $\cos 2x = \cos 0{,}5x$, откуда получаем $x = \frac{4\pi n}{3}$ или $x = \frac{4\pi k}{5}$, n, $k \in \mathbb{Z}$. Далее показать, что наименьшим значением x, удовлетворяющим условию $x \geqslant 5$, является число $\frac{8\pi}{5}$. **7.6.4.** $\frac{5\pi}{6}$.

● Искомое x должно удовлетворять системе $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leqslant 0 \\ 2\sin x = \sin 3x. \end{cases}$ **7.6.5.** 2410.

● Разложив числа в произведение простых сомножителей $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $48 = 2^4 \cdot 3$, $45 = 3^2 \cdot 5$, найти Н.О.Д. $(60, 48, 45) = 3$ и Н.О.К. $(60, 48, 45) = 720$. Тогда 30% искомого числа составят 723, а само число — 2410. **7.6.6.** 1 : 1; в 5 раз. **7.6.7.** 1 : 2; в 10 раз. **7.6.8.** 14 и 7 копеек.

7.6.9. 14. □ Если столов n штук, то девочек по две можно усадить за $n-3$ стола, то есть девочек $2(n-3) = 2n-6$ человек. С другой стороны, девочек можно рассадить так: за двумя столами сидят только девочки (всего 6 человек), а за оставшимися $(n-2)$-мя столами — по одной девочке. Таким образом, число девочек равно $6 + (n-2) = n+4$. Из уравнения $2n - 6 = n + 4$ находим $n = 10$. Тогда девочек будет $n + 4 = 10 + 4 = 14$. ■

7.6.10. 20 остановок. □ Если n — число остановок между A и B, то количество пассажиров, прибывших в пункт B, составит

$$1978 + \big(5 + 8 + 11 + \cdots + (3n+2)\big) - 30n =$$
$$= 1978 + \frac{5 + [5 + 3(n-1)]}{2} \cdot n - 30n = 1978 + \frac{(3n+7) \cdot n}{2} - 30n$$

(здесь мы воспользовались формулой суммы n членов арифметической прогрессии). Т. к. по условию задачи это число пассажиров равно 2048, то получим уравнение $1978 + \frac{(3n+7) \cdot n}{2} - 30n = 2048 \iff n = 20$ или $n = -\frac{7}{3}$. Последний корень — посторонний, т. к. $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, число остановок между пунктами равно 20. ■

Замечание. Вообще говоря, необходимо проверить, не возникнет ли такой ситуации, что к очередной остановке в поезде останется менее 30 человек (в принципе это возможно, т. к. вначале пассажиров выходит больше, чем входит). Однако мы этого не будем делать, т. к. по негласному соглашению считается, что текстовая задача, описывающая реальную ситуацию, должна иметь хотя бы одно решение (оно в данной ситуации единственно!). Все сказанное не относится к таким задачам, где в самой формулировке предполагается отсутствие какого-либо значения искомой величины, например, если задача содержит вопрос типа: «Существует ли такое значение переменной x, что...» или ему подобные.

7.6.11. На 90%. □ Пусть a, b и c — дневной расход горючего при перевозке соответственно только щебня, песка или кирпича, а N — дневная норма горючего. Из условий задачи получим систему:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 0{,}95N, \\ \frac{a}{7} + \frac{4}{7}b + \frac{2}{7}c = \frac{710}{700}N, \\ \frac{a}{4} + \frac{3}{8}b + \frac{3}{8}c = \frac{405}{400}N. \end{cases}$$

Решая эту систему как линейную относительно неизвестных a, b и c, найдем, что $a = 0{,}9N$. Следовательно, расход горючего при перевозке щебня в течение одного дня составляет 90% от дневной нормы. ■

7.6.12. 15 лет. □ Пусть n — число тех лет, в которые увеличивалась добыча нефти (первый и последние 9 лет в это число не входят). Тогда по условию задачи получим, что за все годы разработки месторождения было добыто $400 + \frac{3}{2} \cdot 400 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 400 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 400 + 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 400$ тыс. тонн нефти и это число составило 35650 тыс. т нефти. Пользуясь формулой суммы $n+1$ члена геометрической прогрессии, получим уравнение

$$400 \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} + 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n\right] = 35650 \iff$$

$$\iff 400 \cdot \left[12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2\right] = 35650 \iff \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{243}{32} \iff n = 5.$$

Тогда общее количество лет будет равно 15. ■

7.6.13. 21. ● Обозначив за n число участков, а за k число колхозников, работавших первоначально на каждом участке, получить систему

$$\begin{cases} k - n = 14 \\ k + 15 = (n-1)(k-15) \\ k > 15, \quad k,\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \implies k = 21.$$

7.6.14. 24 и 18 дней. **7.6.15.** 1085 и 30 марок. **7.6.16.** 24 и 21. **7.6.17.** 24 и 20. ● *Обозначив число попаданий у первого и второго стрелков за n и k соответственно,* получить систему:

$$\begin{cases} n + k = 44 \\ \dfrac{n}{30-n} = 2 \cdot \dfrac{k}{30-k} \\ n,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

7.6.18. 5. **7.6.19.** 36 и 4.

7.7.1. 180 км/ч. □ Пусть S (км) — длина трассы, а v (км/ч) — скорость аутсайдера. Тогда $v + 20$ — скорость победителя и $\left(\frac{S}{v} - \frac{S}{v+20}\right)$ — разрыв во времени между победителем и аутсайдером. Время, за которое аутсайдер проезжал 1 км, равно $\frac{1}{v}$ (ч). Тогда $\frac{1}{v} - \frac{1}{3600} = \frac{3600 - v}{3600 \cdot v}$ — предполагаемое время, за которое аутсайдер будет проезжать 1 км, а $\frac{3600 \cdot v}{3600 - v}$ — его новая скорость. Тогда разрыв во времени между победителем и аутсайдером составил бы $\frac{S \cdot (3600 - v)}{3600 \cdot v} - \frac{S}{v+20}$. Это время по условию задачи вдвое меньше фактического отставания участника, пришедшего последним, от победителя гонок. Следовательно, получим уравнение $\frac{S}{v} - \frac{S}{v+20} = 2 \cdot \left[\frac{S(3600 - v)}{3600 \cdot v} - \frac{S}{v+20}\right]$. Разделив обе части уравнения на S и преобразовав его, получим уравнение $v^2 + 20 \cdot v - 36000 = 0$, откуда $v_1 = 180$ км/ч ($v_2 = -200$ — посторонний корень). Следовательно, скорость победителя 180 км/ч. ■

7.7.2. 15 км/ч. □ Пусть x (км/ч) и y (км/ч) — скорости движения велосипедиста и автобуса, соответственно. Так как интервал движения автобусов составляет 12 мин $= \frac{1}{5}$ ч, то расстояние между двумя идущими подряд автобусами составляет $\frac{y}{5}$ км. Следовательно, в момент встречи велосипедиста с автобусом расстояние между велосипедистом и очередным встречным автобусом составляет $\frac{y}{5}$ км. Так как их встреча произойдет через 9 мин $= \frac{3}{20}$ ч, а сближаются они со скоростью $(x+y)$ км/ч, то получаем первое уравнение: $\frac{3}{20}\cdot(x+y) = \frac{y}{5}$. Время, прошедшее между двумя последовательными обгонами автобусами велосипедиста, равно $\frac{4{,}5}{x}$. С другой стороны, оно равно $\frac{1}{5} + \frac{4{,}5}{y}$. Получаем второе уравнение: $\frac{4{,}5}{x} = \frac{1}{5} + \frac{4{,}5}{y}$. Решив систему $\begin{cases} \frac{3}{20}(x+y) = \frac{y}{5} \\ \frac{4{,}5}{x} = \frac{1}{5} + \frac{4{,}5}{y}, \end{cases}$

получаем $x = 15$ км/ч. ■

7.7.3. 24 мин.

7.7.4. 4 г/см^3. □ Пусть x, y, z (г/см^3) — плотности веществ. Так как масса есть произведение плотности вещества на его объем, получаем первое уравнение из первого условия задачи: $2\cdot(x+y+z) = 16$. Из второго условия задачи имеем: $\frac{4}{y} - \frac{4}{z} = \frac{1}{2}$. И, наконец, из последнего условия получаем $2y = 2\cdot 2x$ или $y = 2x$. Решая систему

$$\begin{cases} x+y+z = 8 \\ \frac{4}{y} - \frac{4}{z} = \frac{1}{2} \\ y = 2x, \end{cases}$$

получаем $z = 4$. ■

7.7.5. 63. ● Обозначив за x и y соответственно число десятков и число единиц неизвестного числа, получить систему:

$$\begin{cases} 10x + y = 3xy + 9, \\ 10x + y = x^2 + y^2 + xy, \\ 0 \leqslant y \leqslant 9,\ 1 \leqslant x \leqslant 9, \quad x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получить уравнение $(x-y)^2 = 9 \iff$ $\iff x - y = \pm 3$. Далее исходную систему представить в виде совокупности двух систем.

7.7.6. Первый вариант. □ Пусть в начале года курс рубля к доллару составлял d долларов за 1 рубль. Так как курс рубля ежеквартально падает на $28\frac{4}{7} =$ $= \frac{200}{7}$%, то к концу года за 1 рубль будут давать $d\cdot\left(1 - \frac{200}{700}\right)^4 = \left(\frac{5}{7}\right)^4 \cdot d$ долларов. Пусть в начале года мы имели x долларов. По варианту а) в конце года мы будем иметь $1{,}6x$ долларов, что согласно курсу на тот момент составит $1{,}6\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^4\cdot\frac{x}{d}$ рублей. По варианту б) x долларов, конвертированные в начале года в $\frac{x}{d}$ рублей, преобразуются к концу года в сумму $6{,}1\cdot\frac{x}{d}$ рублей. Так как $1{,}6\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^4 > 6{,}1$, то вариант а) выгоднее. ■

7.7.7. Не изменяется. Не выгодно. ● Заметить, что рост доллара по отношению к рублю на 25% соответствует падению курса рубля (по отношению к доллару) на 20%. **7.7.8.** На 56,25%. **7.7.9.** $(10{,}5-0{,}24a)$ л; $a\in\left[\frac{175}{6};43{,}75\right]$. ● Обозначить за x и y количество щелочи в 1 л каждого раствора. Получить систему

$$\begin{cases}\dfrac{4x+6y}{10}\cdot 100=35\\ \dfrac{3x+3y}{6}\cdot 100=a,\end{cases}\quad \text{откуда}\quad \begin{cases}x=0{,}06a-1{,}75\\ y=1{,}75-0{,}04a.\end{cases}$$

Тогда во втором сосуде будет $6y=10{,}5-0{,}24a$ литров щелочи. Возможные значения величины a вытекают из неравенств $0\leqslant x\leqslant 1$ и $0\leqslant y\leqslant 1$.

7.7.10. $\dfrac{90\cdot(p-15)}{q-p}$ кг. Возможные значения величин p и q показаны штриховкой на рисунке.

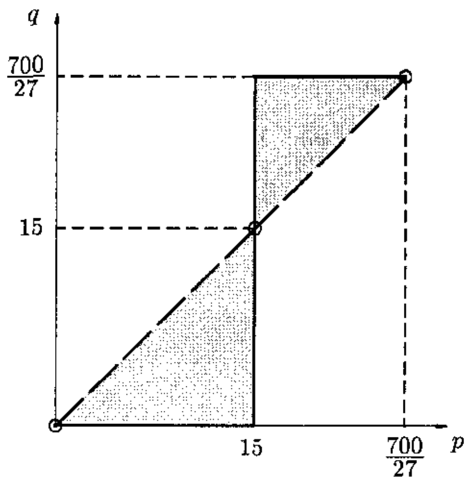


Рис. 1

□ Пусть взято x кг q-процентного раствора соли. Тогда масса соли в нем составит $\frac{x\cdot q}{100}$ кг. В 90 кг 15%-ного соляного раствора содержится 13,5 кг соли. Следовательно, после слияния растворов получится раствор, содержащий $\left(\frac{xq}{100}+13{,}5\right)$ кг соли в $(x+90)$ кг соленой воды. Так как процентная концентрация соли в новом растворе должна составить p%, то получаем уравнение: $\frac{xq}{100}+13{,}5=\frac{(x+90)\cdot p}{100}\iff x=\frac{90(p-15)}{q-p}$ (т. к. по условию $q\neq p$). Из условия 2) следует, что максимально возможная концентрация соли составляет $\frac{35}{135}100\%=\frac{700}{27}\%$. Следовательно, $p,q\leqslant\frac{700}{27}$. Кроме того, $p>0$, а $q\geqslant 0$. Поскольку $x\geqslant 0$, получаем неравенство $\frac{90(p-15)}{q-p}\geqslant 0\iff\frac{p-15}{q-p}\geqslant 0$. Таким образом, одновременно должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases}\dfrac{p-15}{q-p}\geqslant 0\\ 0<p\leqslant\dfrac{700}{27}\\ 0\leqslant q\leqslant\dfrac{700}{27}\end{cases}\iff\begin{cases}p>15\\ q>p\\ p\leqslant\dfrac{700}{27}\\ q\leqslant\dfrac{700}{27}\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}p<15\\ 0\leqslant q<p\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}p=15\\ q\leqslant\dfrac{700}{27}\\ q\neq 15.\end{cases}\ \blacksquare$$

7.7.11. $x = \frac{4}{7}$, $y = \frac{3}{7}$. □ Пусть x и y — первоначальные частоты генов a и b соответственно. Из условия задачи частоты x' и y' генов a и b в следующем поколении равны $\frac{40}{73}$ и $\frac{33}{73}$. Подставляя их и $k = \frac{1}{2}$ в соответствующие равенства, *получим систему:*

$$\begin{cases} \dfrac{40}{73} = \dfrac{x\left(\frac{x}{2}+y\right)}{\frac{1}{4}x^2 + 2xy + \frac{1}{4}y^2}, \\ \dfrac{33}{73} = \dfrac{y\left(x+\frac{y}{2}\right)}{\frac{1}{4}x^2 + 2xy + \frac{1}{4}y^2}. \end{cases}$$

Так как $y \neq 0$, то, поделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x\left(\dfrac{x}{2}+y\right)}{y\left(x+\dfrac{y}{2}\right)} = \frac{40}{33} \iff \frac{x}{y} \cdot \frac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{y}+1}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{2}} = \frac{40}{33}.$$

Положив $\dfrac{x}{y} = t$ и преобразовав уравнение, получим: $33t^2 - 14t - 40 = 0$. Единственным положительным корнем (т. к. $x, y > 0$) уравнения является $t = \frac{4}{3}$. Следовательно, $x = \frac{4}{7}$, а $y = \frac{3}{7}$. ■

7.7.12. На 2 км. □ Наиболее быстрое решение основано на анализе относительных движений мотоциклиста и велосипедиста по отношению к пешеходу. Из условия задачи следует, что когда мотоциклист догнал велосипедиста, он продвинулся относительно пешехода на 9 км, ликвидировав отставание в 6 км и обогнав его на 3 км. За это время велосипедист продвинулся относительно пешехода на 3 км. Следовательно, относительная скорость мотоциклиста по отношению к пешеходу втрое больше относительной скорости велосипедиста по отношению к пешеходу. Таким образом, когда мотоциклист ликвидирует отставание от пешехода в 6 км, велосипедист обгонит пешехода на 2 км. ■

7.7.13. На 10 км. **7.7.14.** В $\frac{9}{8}$ раза. **7.7.15.** 100 тыс. руб. ● *Корень получающегося в процессе решения кубического уравнения найти подбором.* **7.7.16.** 1 млн 600 тыс. руб.

7.8.1. За 10 часов. **7.8.2.** За 3 часа, 4 часа и 2,4 часа.

7.8.3. 5 ч 30 мин. □ Пусть расстояние между городами — S (км), а скорости самолета и вертолета, соответственно, — u и v (км/ч). Самолет пролетел до встречи с вертолетом $6u$ (км), а вертолет к этому моменту пролетел $3v$ (км). Таким образом, первое уравнение имеет вид $6u + 3v = S$. Далее вертолету осталось пролететь $6u$ (км), а самолету — $3v$ (км), причем самолету на это потребовалось времени на 7 часов меньше, чем вертолету. Получим второе уравнение $\dfrac{6u}{v} = \dfrac{3v}{u} + 7$. Получим систему: $\begin{cases} 6u + 3v = S \\ \dfrac{6u}{v} = \dfrac{3v}{u} + 7. \end{cases}$ Чтобы найти время вылета самолета, нужно найти время полета самолета, т. е. величину $\dfrac{S}{u}$. Второе уравнение является квадратным относительно величины $\dfrac{v}{u}$. Решив его, получим $\dfrac{v}{u} = \dfrac{2}{3}$ ($\dfrac{v}{u} = -3$ — посторонний корень). Из первого уравнения имеем

$\frac{S}{u} = 6 + 3 \cdot \frac{v}{u} = 8$. Следовательно, время вылета самолета: 13 ч 30 мин − 8 ч = = 5 ч 30 мин. ■

7.8.4. $\frac{5}{17}$. ● Ввести x и y (усл. ед.) — количества товара в первой и второй партиях соответственно. Получить уравнение $800(x+y) = 0{,}85(800x + 1000y)$, откуда $\frac{y}{x} = \frac{12}{5}$. Далее найти $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+\frac{y}{x}} = \frac{5}{17}$. **7.8.5.** $\frac{19}{37}$. ● Обозначив массы никеля, меди и марганца, соответственно, за x, y и z, получить систему: $\begin{cases} x = 0{,}4(y+z) \\ y = 0{,}6(x+z). \end{cases}$ Решив эту систему относительно x и y, получить, что $x = \frac{16}{19}z$, а $y = \frac{21}{19}z$. Тогда $\frac{z}{x+y} = \frac{19}{37}$.

7.8.6. 8,5; 10; 11,5. □ Пусть x, y, z — числа в порядке возрастания. Из условий задачи имеем систему:

$\begin{cases} y - x = z - y \\ xy = 85 \\ yz = 115. \end{cases}$ Из первого уравнения имеем: $x + z = 2y$. Сложив второе и третье уравнения, получим $y(x+z) = 200$. Тогда $y^2 = 100$, т. е. $y = \pm 10$. Получим два решения

$\begin{cases} x = 8{,}5 \\ y = 10 \\ z = 11{,}5, \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -8{,}5 \\ y = -10 \\ z = -11{,}5. \end{cases}$ Первое решение удовлетворяет системе. Второе решение — постороннее, т. к. $x > y > z$. ■

7.8.7. 20 коров. □ Пусть на лугу в начальный момент времени находится S кг травы, и трава растет со скоростью x кг в день. Пусть также одна корова поедает траву со скоростью y кг в день. Из условий задачи получим систему

$\begin{cases} 70 \cdot 24y = S + 24x \\ 30 \cdot 60y = S + 60x. \end{cases}$ Требуется найти такое число n, что $96 \cdot n \cdot y = S + 96x$.

Подставляя сюда значение S (например, из второго уравнения), получим $96 \cdot n \cdot y = 1800y + 36x$. Вычитая из второго уравнения системы первое, получим, что $x = \frac{10}{3}y$. Подставляя это значение в предыдущее равенство и сокращая его на x, получаем $n = 20$. ■

7.8.8. За 6 часов. □ Обозначив всю работу за A, а скорости работы каменщиков, соответственно, за x, y и z, получим систему: $\begin{cases} 6x + 4y + 7z = A \\ 4x + 2y + 5z = \frac{2}{3}A. \end{cases}$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $2(x+y+z) = \frac{1}{3}A$, откуда $\frac{A}{x+y+z} = 6$. ■

7.8.9. В 13 раз. ● Обозначив всю работу за A, а скорость проверки работ i-ым преподавателем за x_i, получить систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = \frac{A}{20}, \\ x_2 + x_3 + x_5 = \frac{A}{15}, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{A}{10}. \end{cases}$$

Сложив все уравнения, получить выражение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{13 \cdot A}{120}$, а сложив первые два и вычтя из этой суммы третье, получить $x_2 = \frac{A}{120}$.

7.8.10. За 3 часа. **7.8.11.** 30%. **7.8.12.** На $\frac{3}{4}$ (или на 75%). **7.8.13.** 12 млн т.

● Пусть i-ая бригада вырабатывает в месяц v_i млн т продукции. Получить систему:

$$\begin{cases} 4v_1 + v_2 + 2v_3 + 5v_4 = 10, \\ 2v_1 + 3v_2 + 2v_3 + v_4 = 7, \\ 5v_1 + 2v_2 + v_3 + 4v_4 = 14. \end{cases}$$

Сложив удвоенное первое уравнение с утроенным вторым и вычтя третье, получить равенство $9(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 27$. Тогда $4(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 12$.
7.8.14. 28 млн т.
7.8.15. *6400 л и 600 л.* □ *Пусть бочек первого образца — m штук, а второго — n* штук. Пусть емкость одной бочки каждого образца составляет, соответственно, x л и y л. Тогда из условий задачи получим систему

$$\begin{cases} mx + ny = 7000 \\ mx + nx = 8000 \\ my + ny = 3000. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим $n(x - y) = 1000$, а вычитая из первого уравнения третье, получим $m(x-y) = 4000$. Тогда $m = 4n$. Подставляя это значение в третье уравнение, имеем $5ny = 3000$, т. е. $ny = 600$. Тогда $mx = 6400$. ■
7.8.16. 480 км. ● Обозначив скорости движения товарного поезда — за x км/ч, а пассажирского — за y км/ч, и расстояние между городами за S км, получить систему:

$$\begin{cases} \frac{S}{x} - \frac{S}{y} = 4, \\ y \cdot \frac{S}{x} - x \cdot \frac{S}{y} = 280, \\ \frac{S}{x+10} - \frac{S}{y+10} = \frac{12}{5}. \end{cases}$$

Преобразовать ее к виду:

$$\begin{cases} S(y - x) = 4xy, \\ S(y^2 - x^2) = 280xy, \\ 5S(y - x) = 12(xy + 10(x + y) + 100). \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получить, что $x + y = 70$. Выполнить частичную подстановку в третье уравнение значения $x + y$, и, вычитая из него первое уравнение, умноженное на 5, получить соотношение $xy = 1200$. Пользуясь теоремой Виета (учитывая, что $y > x$) получить $x = 30$, а $y = 40$. Тогда $S = 480$ км. **7.8.17.** 62,5 тыс. руб. **7.8.18.** На 25 мин.

7.9.1. За 8 часов. □ Пусть турист поднимался n часов. Тогда он поднялся на высоту

$$h = 800 + (800 - 25) + (800 - 2 \cdot 25) + \dots + (800 - (n-1) \cdot 25) =$$
$$= 800 \cdot n - (25 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 25 + \dots + (n-1) \cdot 25).$$

В скобках стоит сумма $(n-1)$-го члена арифметической прогрессии с разностью $d = 25$. Следовательно, $h = 800 \cdot n - \dfrac{25 \cdot n \cdot (n-1)}{2}$. По условию задачи получим уравнение $800n - \dfrac{25n(n-1)}{2} = 5700$, корнями которого будут $n = 57$ и $n = 8$. Первый корень — посторонний, т. к. количество метров, на которое турист поднялся за n-ый час, равно $800 - 25 \cdot (n-1)$ и оно должно быть положительно. Таким образом, $n = 8$ ч. ■

7.9.2. 11 м/с или $9\frac{2}{3}$ м/с. □ Пусть x м/с — скорость первого тела, а a м/с^2 — ускорение, с которым движется второе тело. Путь, пройденный за время t телом, движущимся с ускорением a и начальной скоростью v, находится по формуле $S = vt + \frac{at^2}{2}$. Из условия движения второго тела нам известно, что путь, пройденный им за 1 секунду, не превышает 14 м, а за 2 секунды — не меньше 24 м. Тогда должны выполняться два неравенства: $16 \cdot 1 + \frac{a}{2} \leqslant 14$ и $16 \cdot 2 + 2a \geqslant 24$, которым удовлетворяет единственное число $a = -4$ (м/с^2). Тогда через 3 секунды первое тело будет находиться на расстоянии $(3x - 1)$ от точки B, а второе — на расстоянии $16 \cdot 3 + \dfrac{(-4) \cdot 3^2}{2} = 30$ м от точки B. Так как к этому моменту расстояние между телами составило 2 м, то получим уравнение: $|30 - (3x-1)| = 2 \Longleftrightarrow 31 - 3x = \pm 2 \Longleftrightarrow x = 11$ или $x = 9\frac{2}{3}$. ■

7.9.3. На 19%. □ Увеличение курса доллара (т. е. его стоимости в рублях) на одно и то же число процентов ежемесячно эквивалентно увеличению стоимости доллара в одно и то же число раз. Пусть это число равно p. По условию задачи $p \leqslant 1{,}5$. Тогда, если сначала доллар стоил x рублей, то в конце первого месяца он будет стоить px рублей, а в конце второго — p^2x рублей. По условию задачи имеем $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = 0{,}09$, откуда $p_1 = 10$, $p_2 = \dfrac{10}{9}$. Первый корень — посторонний, т. к. не удовлетворяет неравенству $p \leqslant 1{,}5$. Следовательно, $p = \dfrac{10}{9}$. Выясним теперь, на сколько процентов уменьшался ежемесячно курс рубля. Если стоимость доллара увеличивалась ежемесячно в $\dfrac{10}{9}$ раза, то стоимость рубля, естественно, уменьшалась в это же число раз ежемесячно. И поэтому, если 1 рубль стоил $\dfrac{1}{x}$ долларов в начале первого месяца, то к концу второго месяца он будет стоить $\dfrac{81}{100} \cdot \dfrac{1}{x}$, что на 19% меньше первоначальной стоимости. ■

7.9.4. На 64%.

7.9.5. $\dfrac{95}{144}AB$. □ Пусть x — собственная скорость моторной лодки, y — скорость течения реки, а S — расстояние между пунктами A и B. Тогда скорости катеров составят величину $2x$. Скорость сближения моторной лодки с катером равна $(x + y) + (2x - y) = 3x$. Тогда время, прошедшее до первой встречи с катером, будет $t_1 = \dfrac{S}{3x}$; к этому времени первый катер преодолеет расстояние $S_1 = \dfrac{S}{3x} \cdot (2x - y)$. По условию задачи это расстояние больше половины расстояния от A до B. Следовательно, $\dfrac{2x - y}{3x} > \dfrac{1}{2}$. Время, прошедшее между встречами лодки с катерами, составляет $t_2 = \dfrac{S(2x-y)}{9x^2}$; за это время второй катер пройдет расстояние $S_2 = \dfrac{S(2x-y)^2}{9x^2}$. По условию задачи имеем: $S_1 - S_2 = \frac{35}{144}S$. Таким образом, получаем следующий комплекс условий:

$$S \cdot \frac{2x-y}{3x} - S \cdot \left(\frac{2x-y}{3x}\right)^2 = \frac{35}{144} \cdot S \quad \text{и} \quad \frac{2x-y}{3x} > \frac{1}{2}.$$

Произведя сокращение первого уравнения на S и сделав замену $\dfrac{2x-y}{3x} = z$, *получим систему*

$$\begin{cases} z^2 - z + \frac{35}{144} = 0 \\ z > \frac{1}{2} \end{cases} \iff z = \frac{7}{12}.$$

Следовательно, $S_1 = \frac{7}{12}S$, а путь, пройденный моторной лодкой до встречи со вторым катером, составит $\frac{5}{12}S + \frac{35}{144}S = \frac{95}{144}S$. ■

7.9.6. Менее 6 часов. ● Обозначив всю работу за A, а производительность труда двух рабочих — за v_1 и v_2, получить систему $\begin{cases} \dfrac{A}{v_1+v_2} < 4 \\ \dfrac{A}{v_1} = \dfrac{A}{v_2} - 6. \end{cases}$ Введя новые переменные $\dfrac{A}{v_1} = x$, $\dfrac{A}{v_2} = y$ и исключив переменную y, получить неравенство $x^2 - 2x - 24 < 0$. Решив его, получить (учитывая, что $x > 0$) возможные значения $x \in (0; 6)$. **7.9.7.** Не менее 6 часов. **7.9.8.** Не более 50 км/ч. ● Обозначив первоначальную скорость за v, получить систему: $\begin{cases} \dfrac{80}{v} - \dfrac{80}{v+10} \geqslant \dfrac{4}{15} \\ v > 0. \end{cases}$

7.9.9. От 1,5 м/с до 42 м/с. □ *Пусть x м/с — первоначальная скорость точки.* Тогда

$$\begin{cases} 1 \leqslant \dfrac{630}{x} - \dfrac{630}{x+3} \leqslant 280 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 3x - 1890 \leqslant 0 \\ 4x^2 + 12x - 27 \geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ x \in [-45; 42] \\ x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [1{,}5; +\infty) \end{cases} \iff x \in [1{,}5; 42]. ■$$

7.9.10. По 9 человек. □ Пусть m — число членов в 1-ой бригаде. Тогда во 2-ой — $(18-m)$ человек, причем $(15-m)$ — юношей. Каждый юноша 2-ой бригады отдежурил $\dfrac{21}{15-m}$ часов, а каждый член 1-ой бригады — $\dfrac{48}{m}$ часов. По условию задачи имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{21}{15-m} + \dfrac{48}{m} < 9 \\ 0 < m < 15, \quad m \in \mathbb{N} \end{cases} \iff \begin{cases} 8 < m < 10 \\ m \in \mathbb{N} \end{cases} \iff m = 9. \quad ■$$

7.9.11. 5 л. ☐ Пусть в первом сосуде было x литров ($x \geqslant 0$) жидкости A. После долива его жидкостью B концентрация жидкости A в нем составила $\frac{x}{15}$. После переливания во второй сосуд в первом осталось $(15-x)$ л жидкости, причем $\frac{x}{15}(15-x)$ из них приходится на жидкость A. Во втором сосуде к $(15-x)$ литрам жидкости A добавилось $x \cdot \frac{x}{15}$ литров жидкости A, что составило $\left(15-x+\frac{x^2}{15}\right)$ литров жидкости A в доверху заполненном сосуде. После отлива 6 л смеси во втором сосуде осталось $\frac{9}{15}\left(15-x+\frac{x^2}{15}\right)$ литров жидкости A, а в первом стало $\left[\frac{x}{15}(15-x)+\frac{6}{15}\left(15-x+\frac{x^2}{15}\right)\right]$ литров жидкости A. Из условия следует, что $\frac{x}{15}(15-x)+\frac{6}{15}\left(15-x+\frac{x^2}{15}\right)=\frac{9}{15}\left(15-x+\frac{x^2}{15}\right)+1$. Т. к. к моменту последнего переливания в первом сосуде было $(15-x)$ л жидкости, а потом стало $(21-x)$ л, то необходимо, чтобы выполнялось неравенство $21-x \leqslant 15$, т. е. $x \geqslant 6$. Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} \frac{x}{15}(15-x)+\frac{6}{15}\left(15-x+\frac{x^2}{15}\right)=\frac{9}{15}\left(15-x+\frac{x^2}{15}\right)+1, \\ x \geqslant 6, \end{cases}$$

единственным решением которой является число $x=10$. Значит, в первом сосуде было 10 л жидкости A, а во втором — 5 л. ■

7.9.12. Через пункт C. ☐ Пусть скорость передвижения по грунтовой дороге равна v км/ч. Тогда время движения по трем маршрутам составит: $t_1 = t_{ACB} = \frac{40}{v}+\frac{60}{v+40}$; $t_2 = t_{ADB} = \frac{30}{v}+\frac{100}{v+40}$; $t_3 = t_{AB} = \frac{80}{v}$. Нужно определить, какое время меньше с учетом того, что $15 < v \leqslant 30$. Найдем $t_3 - t_1 = \frac{80}{v}-\frac{40}{v}-\frac{60}{v+40}=\frac{1600-20v}{v(v+40)}$. Эта величина положительна для $v \in (15;30]$. Следовательно, $t_3 > t_1$. Сравним времена t_2 и t_1: $t_2 - t_1 = \frac{30}{v}+\frac{100}{v+40}-\frac{40}{v}-\frac{60}{v+40}=\frac{30v-400}{v(v+40)} > \frac{30\cdot 15-400}{v(v+40)} > 0$. Следовательно, $t_2 > t_1$. Таким образом, t_1 — наименьшее время, а путь через пункт C — самый короткий по времени. ■

7.9.13. Второй. **7.9.14.** 3.

7.9.15. 159 стульев. ☐ Пусть всего n стульев и k — количество стульев в одном ряду при первоначальной расстановке. Тогда $12 \cdot k < n < 13 \cdot k$ и $n=(k-7)\cdot 27-3=27k-192$. Подставляя значение n в двойное неравенство, получаем $12k < 27k-192 < 13k \iff \begin{cases} 15k > 192 \\ 14k < 192 \end{cases} \iff \begin{cases} k > \frac{192}{15} \\ k < \frac{192}{14}. \end{cases}$

Единственным целым значением k, удовлетворяющим системе, является $k = 13$. Тогда $n = 159$. ■

7.9.16. 12 деталей.

7.10.1. 25 и 24. ☐ Пусть в первой бригаде n человек, а во второй — m человек, и пусть t — время, необходимое одному человеку для рытья котлована. Тогда время, затрачиваемое бригадами на рытье котлованов, равно, соответственно, $\frac{t}{n}$ и $\frac{t}{m}$. Из условий задачи получим систему уравнений: $\begin{cases} \frac{t}{m}-\frac{t}{n}=0{,}5 \\ \frac{t}{n}-\frac{t}{n+5}=2. \end{cases}$

Исключив из нее переменную t, получим $m = \dfrac{4n(n+5)}{4n+25} = n - 1 - \dfrac{n-25}{4n+25}$. Так как m — натуральное число, то $\dfrac{n-25}{4n+25}$ должно быть целым числом. Так как $|n-25| < n+25 < 4n+25$, то дробь будет целым числом только если числитель равен 0, то есть $n = 25$. Тогда $m = 24$. ■

7.10.2. 24 детали. □ Пусть мастер делает n деталей в час и выполняет всю работу за t часов. Из условий задачи легко получается система $\begin{cases} nt = 2(n-2)(t-1) \\ n > 5, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$ Из уравнения системы получаем $n = 4 + \dfrac{4}{t-2}$. Величина $\dfrac{4}{t-2}$ должна быть целым числом, большим 1. Это возможно лишь при $t = 3$ или $t = 4$. В первом случае $n = 8$. Во втором $n = 6$. В обоих случаях *количество деталей, которое составляет заказ, равно* $n \cdot t = 24$. ■

7.10.3. По 2 самолета каждого типа. □ Пусть количества самолетов 1-го, 2-го и 3-го типов равны, соответственно, n, m и k. Из условий задачи получаем систему:

$$\begin{cases} 230n + 110m + 40k = 760, \\ 27n + 12m + 5k = 88, \\ n + m + k \leqslant 8. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, уменьшенное в 10 раз, получим уравнение $4n + m + k = 12$. Т. к. m, n, k — целые неотрицательные числа, то все *возможные значения величины n суть числа 0, 1, 2, 3. При $n = 0$, $m+k = 12$ и* не выполнено неравенство в системе. При $n = 1$, $m+k = 8$ и неравенство снова не выполнено. При $n = 3$, $m + k = 0$, то есть $m = 0$ и $k = 0$. Но тогда не выполнены уравнения системы. Следовательно, $n = 2$. Тогда $m + k = 4$, причем неравенство в системе выполняется. Подставляя значение $n = 2$ в уравнения системы, получаем систему $\begin{cases} 11m + 4k = 30 \\ 12m + 5k = 34, \end{cases}$ откуда $k = m = 2$. ■

7.10.4. 70 копеек. ● Обозначив стоимость одной игрушки за k копеек, количество копеек у первого мальчика за n, а у третьего — за m, получить систему

$$\begin{cases} 2n + m + 9 < k \\ 3n + m + 43 = 2k \\ 2n + 3m + 3 = 2k \\ n, m, k \geqslant 0, \quad n, m, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Выразить k и m через n и получить равенства $k = \dfrac{7n+126}{4}$ и $m = \dfrac{1}{2}n + 20$. Подставив эти значения в неравенство, получить неравенство $n < \dfrac{10}{3}$, откуда возможные значения n — это числа 0, 1, 2 или 3. Показать, что единственным *значением n, при котором величина* $k = \dfrac{7n+126}{4}$ *будет целым числом, является* $n = 2$. Найдите m и затем стоимость двух игрушек. **7.10.5.** 22 игрушки. **7.10.6.** 2 и 3 человека. ● Обозначив число сотрудников за m, а лаборантов — за n, получить систему

$$\begin{cases} 7m + 10n < 45, \\ 14m + 5n > 42, \\ m < n, \quad m, n \geqslant 0, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Получить следствия из первых двух неравенств: $21m > 39$ и $15n < 48$. Используя целочисленность переменных, получить отсюда более сильные неравенства $m \geqslant 2$ и $n \leqslant 3$. Единственной парой значений m и n, удовлетворяющих еще и третьему неравенству, будут числа $m = 2$, $n = 3$. При этом первые два неравенства выполнены. **7.10.7.** 900 и 855. ● Обозначив за k количество машин, выпускаемых первым заводом за сутки, получить неравенство $847 < k < 950$. Заметить, что величина $0{,}23k$ — целое число, и получить отсюда, что $k = 900$. **7.10.8.** 1750 т.

7.10.9. 11 и 17 человек. ☐ Пусть x и y — количество человек в первой и второй бригадах. Условия задачи приводят к системе неравенств:

$$\begin{cases} x + y > 27, \\ x > 2(y - 12), \\ y > 9(x - 10), \end{cases} \quad \text{где } x,\ y \in \mathbb{N}.$$

Можно получить решение и из этой системы, но в процессе решения необходимо будет заняться, хоть и небольшим, но перебором вариантов. Если же воспользоваться на этом этапе условием целочисленности переменных, то каждое неравенство в системе можно усилить, а именно:

$$\begin{cases} x + y \geqslant 28, \\ x \geqslant 2y - 23, \\ y \geqslant 9x - 89 \end{cases} \quad \text{где } x,\ y \in \mathbb{N}.$$

Решим каждое неравенство относительно какой-нибудь одной переменной, например, x:

$$\begin{cases} x \geqslant 28 - y, \\ x \geqslant 2y - 23, \\ x \leqslant \dfrac{y}{9} + \dfrac{89}{9}. \end{cases}$$

Воспользовавшись свойством транзитивности неравенств, получим следствия этой системы:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{9} + \dfrac{89}{9} \geqslant 28 - y \\ \dfrac{y}{9} + \dfrac{89}{9} \geqslant 2y - 23 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 10y \geqslant 163 \\ 17y \leqslant 296 \end{cases} \Longrightarrow 16{,}3 \leqslant y \leqslant 17\frac{7}{17}.$$

Так как $y \in \mathbb{N}$, то $y = 17$. Подставляя $y = 17$ в исходную систему, получим

$$\begin{cases} x \geqslant 11 \\ x \geqslant 11 \\ 9x \leqslant 106 \end{cases} \Longrightarrow x = 11.$$

Значения $x = 11$ и $y = 17$ удовлетворяют всем условиям системы. ■

7.10.10. 24 и 7.

7.10.11. 12 этажей. ☐ Пусть в корпусе n этажей. Тогда на каждом этаже $\frac{96}{n}$ аудиторий, а площадь всех аудиторий на одном этаже составит $\frac{96 \cdot 46}{n}$, а площадь земельного участка — $\frac{96 \cdot 46 \cdot 5}{n}$. Из условий задачи получаем систему

$$\begin{cases} 2760 \cdot n + 96 \cdot 2000 + 14 \cdot \dfrac{96 \cdot 46 \cdot 5}{n} \leqslant 252720 \\ \dfrac{96 \cdot 46 \cdot 5}{n} \leqslant 2250, \quad n,\ \dfrac{96}{n} \in \mathbb{N} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 8 \leqslant n \leqslant 14 \\ n \geqslant 10 \\ n,\ \dfrac{96}{n} \in \mathbb{N} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow n = 12.$ ■

7.11.1. 132. □ Пусть n — число однокомнатных квартир, тогда двухкомнатных — $4n$, а трехкомнатных — np, где $p \in \mathbb{N}$. Из условия задачи получим систему

$$\begin{cases} 5np - 4n = 22, \\ 5n + np \geqslant 100, \\ n,\, p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Переписав первое уравнение в виде $n(5p - 4) = 22$, заметим, что число $5p - 4$ *является делителем числа* 22, *причем такое, что при делении на* 5 *оно* дает в остатке 1. Таких чисел два: 1 и 11. При этом $p = 1$ или $p = 3$. При $p = 3$ из первого уравнения $n = 2$; но тогда не выполнено неравенство. При $p = 1$ $n = 22$. Тогда число квартир в доме равно $22 + 88 + 22 = 132$. ■

7.11.2. 832. □ Если девушек-производственниц, подавших заявления на факультет, — k человек, то девушек-школьниц — $5k$, а юношей-производственников — $k + 20$. Тогда юношей-школьников — $k + (k + 20) + 600 - 5k = 620 - 3k$. По условию задачи имеем систему $\begin{cases} n(k + 20) = 620 - 3k, \\ 6 \leqslant n \leqslant 12, \quad n,\, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Тогда $k = \dfrac{620 - 20n}{n + 3} = -20 + \dfrac{680}{n + 3}$. Поскольку k — целое, то $n + 3$ должно делить число 680 нацело. По условию $9 \leqslant n + 3 \leqslant 15$ и поскольку $680 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17$, то единственно возможным значением $n + 3$ будет число 10. Таким образом $n = 7$. Тогда $k = 48$, а число заявлений — 832. ■

7.11.3. 144 солдата. ● Обозначив первоначальное число рядов за n, получить неравенство $(n - 2)(n + 24) < 24n$. Вывести отсюда, что возможные значения n — это целые числа от 1 до 7. Заметив, что по условию число $24n$ — полный квадрат, вывести отсюда, что $n = 6$. Тогда число солдат равно 144.

7.11.4. 11115 художественных книг и 9405 научно-технических. □ Пусть n и k — число, соответственно, художественных и научно-технических книг в библиотеке. Из условий задачи получим систему

$$\begin{cases} k = \dfrac{11}{13}n, \\ \dfrac{1}{15}k + \dfrac{18}{19}n > 10000, \\ \dfrac{14}{15}k + \dfrac{1}{19}n < 10000. \end{cases}$$

Так как числа $\frac{11}{13}n$, $\frac{18}{19}n$ и $\frac{1}{15}k = \frac{1}{15} \cdot \frac{11}{13} \cdot n$ — целые числа, то это возможно, если n делится на $13 \cdot 15 \cdot 19 = 3705$. Далее, подставив значение $k = \frac{11}{13}n$ в неравенства, получим (учитывая целочисленность n), что $9963 \leqslant n \leqslant 11871$. Единственным числом в этом промежутке, делящимся на 3705, является число $n = 11115$. Тогда $k = 9405$. ■

7.11.5. 1575 и 1995.

7.11.6. На 11. □ Пусть $k = \text{Н.О.Д.}(3m - n, 5n + 2m)$ (по условию $k > 1$). Тогда $3n - m = k \cdot p$, а $5n + 2m = k \cdot s$, где p и s взаимно просты. Из этих равенств получим следующие: $n = \dfrac{k(2p + s)}{11}$ и $m = \dfrac{k(3s - 5p)}{11}$. Так как m и n по условию взаимно просты, то $k = 11$. ■

7.11.7. 432. □ Обозначив число аудиторий в корпусах как n и k, соответственно, для первого и второго корпусов, получим, что число сдававших абитуриентов с одной стороны равно $3 \cdot n^2$, а с другой — $2 \cdot k^3$. Таким образом, получаем уравнение $3n^2 = 2k^3$. Левая часть равенства делится на 3, следовательно, и правая тоже, т. е. $k \vdots 3$. Правая часть делится на 2, следовательно, $3n^2 \vdots 2$. Но тогда n^2 делится на 2, а, значит, и на 4. В этом случае и правая часть делится на 4, а это возможно, если $k \vdots 2$. Таким образом, $k = 6l$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда, подставляя это значение k в уравнение и производя сокращение на 3, получаем $n^2 = (12 \cdot l)^2$. Тогда минимальное значение n принимает при $l = 1$ и оно равно 12. Далее, находим число абитуриентов $3 \cdot 12^2 = 432$. ■

7.11.8. 16875.

7.12.1. 306 млн руб. □ Прибыль при освоении n-го вида продукции ($n \geqslant 1$) составит $75 - 13 - 7(n-1) = 69 - 7n$ млн рублей в год. Прибыль будет положительной, если $69 - 7n > 0$. Следовательно (учитывая, что $n \in \mathbb{N}$), $n = 9$ — максимально возможное число новых видов продукции, выпуск которых будет еще приносить прибыль. Тогда максимальная прибыль (в млн руб.) составит:

$$(69-7)+(69-14)+\dots+(69-63) = 69 \cdot 9 - 7(1+2+\dots+9) = 621 - 315 = 306. \ ■$$

7.12.2. 9 человек. ● Обозначив число трактористов в 1-ой бригаде за n, площадь участка, вспахиваемого 1-ой бригадой, — за S, а скорость работы одного тракториста — за v, получить неравенство $\dfrac{S}{nv} > \dfrac{2S}{(n+10)v}$. Наибольшее значение натурального n, удовлетворяющее неравенству, равно 9.

7.12.3. 0,2 км. ● Заметить, что через t часов первое тело будет находиться от точки A на расстоянии $|2 - 3t|$ км, а второе — на расстоянии $|3 - 4t|$ км. Далее, по теореме Пифагора, показать, что расстояние между телами составит $d = \sqrt{25t^2 - 36t + 13}$ км. Показать, что наименьшим d будет при $t = \dfrac{18}{25}$ и составит 0,2 км.

7.12.4. а) $\dfrac{13}{12} + \dfrac{v^2+36}{12v}$ часов; б) $v = 5$ км/ч. □ Катер догонит баржу за время $t = \dfrac{3}{(9+v)-v} = \dfrac{1}{3}$ (ч.) на расстоянии $3 + \dfrac{v}{3}$ км от пристани. При этом время, прошедшее с момента отрыва баржи до момента буксировки ее обратно, составит $\left(\dfrac{3}{v} + \dfrac{1}{3}\right)$ ч., а время буксировки составит $\left(3 + \dfrac{v}{3}\right) \cdot \dfrac{1}{4}$ ч. Таким образом, баржа будет возвращена на пристань через $\dfrac{3}{v} + \dfrac{1}{3} + \left(3 + \dfrac{v}{3}\right) \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{12} + \dfrac{v^2+36}{12v}$ часов с момента ее отрыва. Чтобы ответить на вопрос, при каком значении v это время будет наименьшим, достаточно выяснить, какое наименьшее значение принимает функция $f(v) = \dfrac{v^2+36}{12v}$, а затем найти величину v, при которой это значение принимается. При этом необходимо иметь в виду, что $v > 0$ (иначе бы баржа не смогла проплыть 3 км по течению) и $v \leqslant 5$ (иначе бы катер, имеющий собственную скорость 9 км/ч, не смог бы буксировать баржу против течения со скоростью 4 км/ч). Т. о., нужно найти наименьшее значение функции $f(v) = \dfrac{v^2+36}{12v}$ на множестве $(0; 5]$. Производная функции $f'(v) = \dfrac{v^2-36}{12v^2}$ отрицательна на множестве $(0; 5]$. Следовательно, функция $f(v)$ — убывающая на этом множестве и принимает наименьшее значение при $v = 5$. ■

7.12.5. 30 дней. □ Пусть v_1, v_2, v_3 — та часть всей работы, которая выполняется каждой бригадой за 1 день. По условию задачи имеем два уравнения:

(1) $v_1 + v_2 = \frac{1}{55}$ и (2) $\frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_2} = 11$. Время, за которое три бригады, работая вместе, выполнят всю работу, равно $t = \frac{1}{v_1+v_2+v_3}$. Согласно уравнению (1): $t = \frac{1}{\frac{1}{55}+v_3}$. Т.к. из уравнения (1) имеем неравенство $v_2 \leqslant \frac{1}{55}$, то (из уравнения (2)) $\frac{1}{v_3} = 11 + \frac{1}{v_2} \geqslant 11 + 55 = 66$ и $v_3 \leqslant \frac{1}{66}$. Но тогда $t = \frac{1}{\frac{1}{55}+v_3} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{55}+\frac{1}{66}} = 30$. Таким образом, наименьшее время исполнения работы тремя бригадами равно 30 дням. ■

7.12.6. 20 часов. **7.12.7.** 100%. **7.12.8.** 28800 км. **7.12.9.** 15 км/ч. ● Так как катер проплывает 1 км за $\frac{1}{v}$ часов, то стоимость его эксплуатации на 1 км пути составит $y = (90 + 4v^2) \cdot \frac{1}{v}$. Далее найти наименьшее значение функции y, если $v > 0$. **7.12.10.** 16 км. ● Показать, что расстояние между автомобилем и мотоциклом через t часов составит $S = |16t^2 - 40t + 9|$ и найти наибольшее значение функции S на отрезке $[0; 2]$.

7.13.1. 60 и 45 км/ч. □ Пусть пункт B расположен между A и C, а x и y — скорости поездов, выходящих соответственно из A и B. Тогда $x > y$. Пусть первоначальное время в пути до встречи в пункте C равно t. Возможны два варианта. Первый состоит в том, что скорость поезда, выходящего из A, уменьшилась на 9 км/ч. Второй — в том, что скорость поезда, выходящего из A, уменьшилась на 12 км/ч. Рассмотрев первый вариант, получим систему:

$$\begin{cases} 120 = (x-y)\cdot t \\ (x-9)(t+2) = x\cdot t \\ (y-12)(t+2) = y\cdot t. \end{cases}$$

Вычитая из 3-го уравнения 2-ое, получим уравнение $(x-y)t = (x-y+3)(t+2)$, что, очевидно, невозможно, т.к. $x - y < x - y + 3$ и $t < t + 2$. Следовательно, имеет место второй вариант. Система в этом случае примет вид:

$$\begin{cases} 120 = (x-y)t \\ (x-12)(t+2) = xt \\ (y-12)(t+2) = yt \end{cases} \Longrightarrow x = 60\text{ км/ч.} \quad \text{и} \quad y = 45\text{ км/ч.}$$ ■

7.13.2. 6 км/ч, 9 км/ч, 12 км/ч, 42 км. ● Разберите 2 варианта: встреча велосипедиста и верхового произошла ближе к пункту A, чем к B, и наоборот. **7.13.3.** 20 и 15 рабочих. **7.13.4.** Апельсины — 3,5 руб., мандарины — 4,25 руб., грейпфруты — 4,5 руб. ● Заметить, что мандарины — средний по цене за 1 кг продукт. Обозначив стоимость 1 кг апельсинов, мандаринов и грейпфрутов за x, y, z соответственно, получить систему:

$$\begin{cases} x + 3z = 4y \\ x + 2z + 2y = 6x \\ |x - z| = 1. \end{cases}$$

7.13.5. 40 и 60 минут. □ Пусть t_1 и t_2 (мин) — время, затраченное соответственно первым и вторым пешеходами на путь из A в B, и пусть второй пешеход вышел позже первого на a минут. Рассмотрим две возможности: 1) $t_1 < t_2$

и 2) $t_1 > t_2$. В случае $t_1 < t_2$ имеем равенство $t_2 = 1{,}5t_1$ и систему

$$\begin{cases} 1{,}5t_1 - t_1 \leqslant 20 \\ a + 1{,}5t_1 - t_1 \geqslant 60 \\ 0 < a \leqslant 40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0{,}5t_1 \leqslant 20 \\ a + 0{,}5t_1 \geqslant 60 \\ 0 < a \leqslant 40. \end{cases}$$

Из 1-го и 3-го неравенств получим $a + 0{,}5t_1 \leqslant 60$. Учитывая 2-ое условие, получим, что $a + 0{,}5t_1 = 60$, а это в свою очередь дает равенства $0{,}5t_1 = 20$ и $a = 40$. Таким образом, $t_1 = 40$, $a = 40$, $t_2 = 60$ (проверкой убеждаемся, что все неравенства системы при этом выполнены). В случае $t_1 > t_2$ имеем $t_1 = 1{,}5t_2$ и систему

$$\begin{cases} 1{,}5t_2 - t_2 \leqslant 20 \\ |a + t_2 - 1{,}5t_2| \geqslant 60 \\ 0 < a \leqslant 40 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0{,}5t_2 \leqslant 20 \\ 0 < a \leqslant 40 \\ |a - 0{,}5t_2| \geqslant 60. \end{cases}$$

Но, т. к. $|a - 0{,}5t_2| < a + 0{,}5t_2 \leqslant 60$, то система несовместна, и, следовательно, случай 2 не может иметь места. ■

7.13.6. 40 минут и 1 ч 20 мин.

7.13.7. $\frac{26}{9}$ минуты. □ Пусть 1-ый и 2-ой бегуны пробегают круг за t_1 и t_2 минут соответственно. Из условия задачи, связанного с гипотетическим увеличением скорости бегунов, получим уравнение $2{,}5t_1 + 22 \cdot \frac{t_2}{2} = 10t_2 + 15 \cdot \frac{t_2}{3}$, откуда $9t_1 = 10t_2$. Таким образом, через 5 кругов второй бегун впервые догонит первого (а также он будет догонять его после того, как пробежит 15 кругов и 25 кругов). Следовательно, второй бегун первым закончит бег. Но тогда, по условию, первый бегун пробегает за минуту менее круга, т. е. $t_1 > 1$. Т. к. между двумя последовательными встречами двух бегунов первый бегун пробегает 9 кругов, то из условия со зрителем получим равенство $9n \cdot t_1 = 13$, где n — натуральное число. Поскольку $t_1 > 1$, то $n = 1$. Поэтому $t_1 = \frac{13}{9}$, а $t_2 = \frac{13}{10}$. Тогда разница во времени на финише составит $24{,}5 \cdot \frac{13}{9} - 25 \cdot \frac{13}{10} = \frac{26}{9}$ мин. ■

7.14.1. 27 лет. **7.14.2.** Не сможет. ● Разобрать две возможности: 1) встреча мотоциклиста и велосипедиста произошла на шоссе; 2) встреча произошла на грунтовой дороге. Показать, что первый вариант невозможен.

7.14.3. $\frac{56}{3} \cdot \frac{S}{v}$. □ «Рено» тратит на прохождение круга время, равное $\frac{S}{2v} + \frac{3S}{9v} \cdot 4 = \frac{11}{6} \cdot \frac{S}{v}$, а «Крайслер» — $\frac{S}{v} + \frac{3S}{3v} = \frac{2S}{v} > \frac{11}{6}\frac{S}{v}$. Поскольку к тому же рассматриваемый момент начала движения приходится на городской участок дороги, где скорость «Рено» больше, то обгон совершит «Рено», причем на городском участке. Пусть обгон произойдет на $(k+1)$-ом круге (для «Рено»), причем через x (единиц длины) после въезда в город $(0 < x < S)$. Тогда время движения машин до этого момента одинаково, и мы получим уравнение $\frac{11}{6} \cdot \frac{S}{v} \cdot k + \frac{x}{2v} = \frac{2S}{v} \cdot (k-1) + \frac{x}{v} \Longleftrightarrow 3x = (12-k)S$. Из последнего равенства, учитывая условие $0 < x < S$, получим неравенство $0 < (12-k)S < 3S \Longleftrightarrow 9 < k < 12$. Следовательно, учитывая тот факт, что $k \in \mathbb{N}$, имеем $k = 10$ и $k = 11$. Следовательно, первый обгон автомобилем «Рено» произойдет на $k + 1 = 11$-ом круге (для «Рено»), при этом $x = \frac{2S}{3}$, а время, прошедшее до момента обгона, составит $\frac{110}{6}\frac{S}{v} + \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{v} = \frac{56}{3} \cdot \frac{S}{v}$. Заметим, что наличие второго решения (при $k = 11$) объясняется тем фактом, что на 11-ом для «Рено» круге после обгона им автомобиля «Крайслер» на городском участке, последний смог догнать и обогнать «Рено» на загородном участке. Поэтому следующий обгон произошел на 12-ом круге. ■

7.14.4. 100 и 60 деталей в час. ● Обозначив число прессов в каждом цехе за n, а производительности нового и старого прессов за x и y соответственно, получить систему:

$$\begin{cases} 2n \geqslant 5, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{400}{x} + 3 = \dfrac{420}{y}, \\ 2n\Big(\dfrac{200}{x} + \dfrac{300}{y}\Big) = \dfrac{17640}{3x + 2y}. \end{cases}$$

Переписав последнее уравнение системы в виде $\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot 45n + \frac{x}{y}(60n - 441) + 20n = 0$, исследовать, при каких условиях на n ($D > 0$) оно имеет решение, и в совокупности с неравенством системы показать, что $n = 3$. При этом n решить последнее уравнение ($\frac{x}{y} = \frac{4}{15}$ или $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$). Используя второе уравнение системы, найти значения x и y.

7.14.5. 12 часов дня.

7.14.6. 82. □ Пусть n — число детей, а число белых, красных и синих флажков в наборе равно b, k и s соответственно. Из условий задачи получим системы уравнений и неравенств, которые должны выполняться одновременно:

$$\begin{cases} b + k + 4s = n + 2 \\ 4b + s = n - 55 \\ 4k + s = n - 39 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3b + 3k + 3s < n \\ b \geqslant 1,\ k \geqslant 1,\ s \geqslant 1 \\ b,\ k,\ s,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Из системы уравнений найдем $b = \frac{3n - 218}{14}$, $k = \frac{3n - 162}{14}$, $s = \frac{2n + 102}{14}$. Т. к. $b \geqslant 1$, то $n \geqslant 78$. Подставляя найденные значения b, k и s в неравенство $3b + 3k + 3s < n$ и решая его, получим, что $n \leqslant 83$. Перебором убеждаемся, что только при $n = 82$ числа b, k, s будут целыми. Следовательно, число детей равно 82. ■

7.14.7. 30 км/ч. ● Условия задачи приводят к системе

$$\begin{cases} \dfrac{5}{v} + \left|\dfrac{5}{v} - \dfrac{1}{6}\right| + \left|\dfrac{10}{v} - 1\right| - \left|\dfrac{6}{v} - \dfrac{17}{30}\right| \leqslant \dfrac{7}{15}, \\ v > 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $v = 30$. **7.14.8.** 50 км/ч. **7.14.9.** Пункт A. ● Рассмотреть 2 случая: 1) пункт D находится выше по течению; 2) пункт A находится выше по течению. В первом случае получить систему:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{11}{v - 5} - \dfrac{1}{3}\right| + \left|\dfrac{13}{v - 5} - \dfrac{2}{3}\right| + \left|\dfrac{15}{v - 5} - 1\right| \leqslant \dfrac{5}{v} - \dfrac{1}{2}, \\ v > 5 \end{cases}$$

и показать, что она не имеет решений. Тогда выполняется второй случай.

7.14.10. Пункт A.

7.14.11. 40% и $43\frac{1}{3}$%. □ Пусть 1-го, 2-го и 3-го сплавов взято соответственно x, y и z кг. Новый сплав весом $x + y + z$ содержит $(0{,}9y + 0{,}6z)$ кг марганца. По условию задачи $0{,}9y+0{,}6z=0{,}4(x+y+z) \iff x=\dfrac{5y+2z}{4}$. Процентное содержание меди в новом сплаве составит величину $F=\dfrac{0{,}7x+0{,}1y+0{,}25z}{x+y+z}\cdot 100$. Подставив сюда значение $x=\dfrac{5y+2z}{4}$ и сделав алгебраические преобразования, получим $F=40+\dfrac{10y}{3y+2z}$. Требуется найти наибольшее и наименьшее значения этой функции при условии $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, причем одновременно в 0 они не обращаются, т. к. в противном случае приготовленный сплав не мог бы содержать марганца. Очевидно наименьшее значение $F=40$ при $y=0$. Если $y \neq 0$, то $F=40+\dfrac{10}{3+\dfrac{z}{y}}$ и наибольшее значение функция F принимает, когда знаменатель дроби наименьший, т. е. при $z=0$. При этом $F=43\frac{1}{3}$. ■

7.14.12. От 25% до 40%. **7.14.13.** 75% и 55%. **7.14.14.** В 9 км от A. ● Положив $AD=x$, где D — место схода с шоссе, вычислить время, которое необходимо туристу на прохождение пути ADB: $t=\dfrac{x}{5}+\dfrac{\sqrt{64+(15-x)^2}}{3}$. Найти наименьшее значение $\left(t=\dfrac{77}{15}\right)$ этой функции на множестве $x \in [0;15]$. Оно достигается при $x=9$. **7.14.15.** 4000 или 8000. **7.14.16.** 300 или 600.

7.14.17. 4800 рублей. □ При скорости v км/ч топлива тратится $k\cdot v^3$. При $v = 15$ км/ч тратится $kv^3=1500$ кг, откуда $k=\dfrac{4}{9}$. Тогда при скорости v за 1 час будет израсходовано $\dfrac{4}{9}v^3$ кг топлива, и, при цене 18 рублей за 1 тонну, стоимость одного часа движения парохода составит $\dfrac{4}{9}v^3\cdot 0{,}018+16=0{,}008v^3+16$ рублей (с учетом прочих расходов). Тогда 2000 км пути обойдутся хозяевам парохода в $F=\dfrac{2000}{v}\cdot(0{,}008v^3+16)$ рублей. Эта функция принимает наименьшее значение на множестве $v>0$, равное 4800, при $v=10$ (это легко показать, *используя производную функции* F). ■

7.14.18. 11 12-квартирных домов и один 16-квартирный. ● Заметить, что из деталей, идущих на строительство 21-квартирного дома, можно построить два 12-квартирных. Поэтому строить нужно лишь 12- и 16-квартирные дома. Обозначив количество таких домов соответственно за n и m, получить систему $\begin{cases} 7n+11m \leqslant 90 \\ 2n+3m \leqslant 26, \end{cases}$ в которой n, m — целые неотрицательные числа. Из первого неравенства получить оценку $m \leqslant 8$ и далее простым перебором (по всем возможным значениям m) найти то решение, которое максимизирует выражение $12n+16m$. **7.14.19.** 3480 кг. ● Получить из условия задачи соотношение $\dfrac{1000+t_1}{1000}=k$ и $\dfrac{1960+t_2}{1960}=n$, где t_1 и t_2 — количества доливаемой воды в емкости. Выразив из этих равенств t_1 и t_2, сложить их и, используя соотношение $k\cdot n=9-k$, получить равенство $y=t_1+t_2=-4920+\left[1000k+\dfrac{9\cdot 1960}{k}\right]$. Далее найти наименьшее значение этой функции на множестве $k \geqslant 1$. Оно достигается при $k=\dfrac{21}{5}$ и равно 3480. **7.14.20.** 11 красных и 16 синих карандашей.

7.14.21. 32. □ Число студентов, не сдавших экзамен, колеблется в пределах от 2,4% до 3,2% от общего числа студентов. Если N — число студентов в группе,

то последнее означает, что найдется натуральное число (не сдавших экзамен студентов) x, такое, что $0{,}024N < x < 0{,}032N \iff 31\frac{1}{4} \cdot x < N < 41\frac{2}{3} \cdot x$. Наименьшее возможное число N достигается при $x = 1$ и равно 32. ■
7.14.22. 14. **7.14.23.** 33.
7.14.24. Нельзя. □ Пусть число операций вида а), б), в) и г) равно соответственно n, m, k и l. Если бы можно было добиться требуемого результата, то выполнялась бы система:

$$\begin{cases} 13 + 2n + m - 2k - l = 37 \\ 17 - n + 2m + k - 2l = 43 \end{cases} \quad (m,\ n,\ k,\ l \text{ — целые неотрицательные})$$

Обозначив $n - k = p$ и $m - l = q$ ($p, q \in \mathbb{Z}$), перепишем систему в виде $\begin{cases} 2p + q = 24 \\ 2q - p = 26. \end{cases}$ Из уравнений системы получим, что $5q = 64$, что не удовлетворяет условию $q \in \mathbb{Z}$. Следовательно, требуемого цветового состава шаров достичь нельзя. ■
7.14.25. 153, 226, 379. ● Обозначив число сотен, десятков и единиц числа соответственно за x, y и z, получить систему:

$$\begin{cases} 3x = z \\ 200x + 11(y + z) = 8n \\ 1 \leqslant x \leqslant 9, \quad 0 \leqslant y, z \leqslant 9 \end{cases} \quad (x,\ y,\ z,\ n \text{ — целые неотрицательные})$$

Из второго уравнения вывести условие, что $y + z$ кратно 8, после чего разобрать три возможных варианта: 1) $y + z = 0$, 2) $y + z = 8$, 3) $y + z = 16$. **7.14.26.** 233, 390, 466, 699. **7.14.27.** 26. **7.14.28.** 25 и 24 человек. **7.14.29.** $(6; 1; 0)$, $(6; -1; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; -1; 0)$. ● Заметить, что все слагаемые в левой части неотрицательны, и вывести отсюда неравенство $v^2 \leqslant \frac{33}{6}$. Пользуясь целочисленностью величины v, рассмотреть 3 возможных варианта: $v^2 = 0$, $v^2 = 1$ или $v^2 = 4$. Разбирая каждый вариант отдельно, выведите аналогичные оценки для величины w^2 или $(u - 3)^2$. **7.14.30.** 23.
7.14.31. 45 конфет первого сорта и 20 конфет второго сорта. □ Пусть в вазе лежат n конфет первого сорта и m — второго. Предположим, что сначала брали конфеты второго сорта. Тогда из условия задачи получаем два противоречивых уравнения: $45 = \frac{1}{5}(2n + 3m)$ и $40 = \frac{4}{5}(2n + 3m) - 40$. Следовательно, в первый раз брали конфеты первого сорта. Тогда получаем единственное уравнение $2n + 3m = 150$ (из условия о взятии 15 конфет). Второе уравнение (из условия о взятии 20 конфет) совпадает с уже приведенным. По условию задачи имеем также набор неравенств: $n \geqslant 15$, $m \geqslant 20$, $n - m > 20$, причем последнее, учитывая, что n и m — целые, можно записать в более сильном виде: $n - m \geqslant 21$. Таким образом, получим систему:

$$\begin{cases} 2n + 3m = 150, \\ n \geqslant 15, \quad m \geqslant 20, \\ n - m \geqslant 21, \quad n, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Выразив переменную n из уравнения и подставив это выражение в последнее неравенство, получим, что $m \leqslant \frac{108}{5}$. Следовательно, $m \leqslant 21$. Учитывая неравенство $m \geqslant 20$, получаем, что система может быть выполнена лишь при

$m = 20$ и $m = 21$. Из уравнения следует также, что m — четное число. Таким образом, $m = 20$. Тогда $n = 45$, причем все условия системы оказываются выполненными. ■

7.14.32. 8 автобусов. □ Пусть t — время движения пешехода от A до B. Тогда время движения пешехода от A до C и от A до D будут соответственно $2t$ и $4t$. Пусть a — время между двумя последовательными обгонами автобусами идущего пешехода. Условие задачи относительно движения первого пешехода означает, что внутри отрезка длины t (его время движения) могут быть размещены три точки (обозначающие время обгона автобусами первого пешехода) на расстоянии a одна от другой. Тогда получаем двойное неравенство: $2a < t \leqslant 4a$. Нестрогое неравенство справа написано, поскольку в момент выхода из A и прихода в B первого пешехода через эти пункты могли проезжать автобусы. Из условий движения второго пешехода аналогично получаем неравенство $3a < 2t < 5a$. Предположим, что третьего пешехода обогнало k автобусов. Тогда, учитывая, что в момент выхода из A и прихода в D третьего пешехода через эти пункты проезжали автобусы, получим уравнение $4t = (k+1)a$. Т. о., имеем систему:

$$\begin{cases} 2a < t \leqslant 4a \\ 3a < 2t < 5a \qquad (k \in \mathbb{N}). \\ 4t = (k+1)a \end{cases}$$

Из неравенств системы получим следствие $8a < 4t < 10a$. Тогда $8a < (k+1)a < 10a \iff 8 < k+1 < 10$. Т. к. k — натуральное число, то $k+1 = 9$, а $k = 8$. ■

7.14.33. 2 рубля. □ Пусть n — число овец, стоимость ножа — a, остаток при дележе денег — t и k — число взятий десятирублевок при дележе денег. Тогда получим систему:

$$\begin{cases} n^2 = k \cdot 10 + t \\ 10 - a = a + t \qquad (k,\ a,\ n,\ t \in \mathbb{N},\ \ k \text{ — нечетно}). \\ 0 < t < 10 \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $a = \dfrac{10-t}{2}$. Следовательно, t — четное число. Тогда из первого уравнения получаем, что и n — четное число. Обозначив число десятков числа n за m, рассмотрим 5 вариантов:

1) $n = 10 \cdot m$. Тогда $n^2 = 100m^2$. В этом случае сумма была бы разделена поровну.

2) $n = 10m + 2$. Тогда $n^2 = 100m^2 + 40m + 4 = (10m^2 + 4m) \cdot 10 + 4$. В этом случае число $k = 10m^2 + 4m$ оказалось бы четным.

3) $n = 10m + 4$. Тогда $n^2 = 100m^2 + 80m + 16 = (10m^2 + 8m + 1) \cdot 10 + 6$. В этом случае противоречия не возникает и остаток $t = 6$.

4) $n = 10m + 6$. Тогда $n^2 = 100m^2 + 120m + 36 = (10m^2 + 12m + 3) \cdot 10 + 6$. И здесь $t = 6$.

5) $n = 10m + 8$. Тогда $n^2 = 100m^2 + 160m + 64 = (10m^2 + 16m + 6) \cdot 10 + 4$. Этот случай невозможен по тем же причинам, что и случай 2). Т. о., остаток t всегда будет равен 6 рублям. Тогда из второго уравнения системы получим $a = 2$. ■

7.14.34. 5. **7.14.35.** 18 автобусов. **7.14.36.** 137 и 77 человек. **7.14.37.** 21 и 28 человек соответственно в 1-ой и 2-ой бригадах. **7.14.38.** 15 вагонов.

8. Прогрессии

8.1.1. 21. □ Т. к. $\begin{cases} a_1 + d = 6, \\ a_1 + 3d = 16, \end{cases}$ то, вычитая из 2-ого уравнения 1-е, получим $2d = 10$, $d = 5 \implies a_1 = 1$ и $a_5 = a_1 + 4d = 1 + 4 \cdot 5 = 21$. ■

8.1.2. 312. **8.1.3.** -9. ● Решить систему $\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = 16, \\ a_7 + a_{10} = a_1 + 6d + a_1 + 9d = 5. \end{cases}$

8.1.4. $a_1 = 2$, $d = 3$. □

$$\begin{cases} a_5 + a_9 = 40, \\ a_7 + a_{13} = 58, \end{cases} \text{т. е.} \begin{cases} a_1 + 4d + a_1 + 8d = 40, \\ a_1 + 6d + a_1 + 12d = 58, \end{cases} \text{или} \begin{cases} 2a_1 + 12d = 40, \\ 2a_1 + 18 = 58. \end{cases}$$

Вычитая из 2-го уравнения 1-е, получим $6d = 18$, $d = 3$, откуда $2a_1 + 12 \cdot 3 = 40$, $2a_1 = 4$, $a_1 = 2$. ■

8.1.5. 63. □ По условию, $a_4 + a_6 = 14$, т. е. $a_1 + 3d + a_1 + 5d = 2a_1 + 8d = 14$. Найдем $S_9 = \frac{2a_1 + d \cdot (9-1)}{2} \cdot 9 = \frac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = \frac{14}{2} \cdot 9 = 63$. ■

8.1.6. 50. ● Воспользоваться тем, что $a_3 + a_7 + a_{14} + a_{18} = (a_1 + 2d) + (a_1 + 6d) + (a_1 + 13d) + (a_1 + 17d) = 4a_1 + 38d = 2(2a_1 + 19d)$, а $S_{20} = \frac{a_1 + 19d}{2} \cdot 20$.

8.1.7. 18. **8.1.8.** 99. **8.1.9.** 55. ● Условие задачи равносильно системе:

$$\begin{cases} a_9 = 3a_3, \\ a_7 = 2a_3 + 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_1 + 8d = 3(a_1 + 2d), \\ a_1 + 6d = 2(a_1 + 2d) + 1. \end{cases}$$

8.1.10. 165150. ● Надо найти сумму первых n членов арифметической прогрессии S_n при $a_1 = 102$, $a_n = 999$, $d = 3$. **8.1.11.** 45387. ● В арифметической прогрессии $a_1 = 108 = 11 \cdot 9 + 9$, $a_n = 999 = 11 \cdot 90 + 9$, $d = 11$. **8.1.12.** 30 сек. ● В арифметической прогрессии $a_1 = 4{,}9$ м, $d = 9{,}8$ м, $S_n = 4410$ м. Найти n из уравнения

$$4410 = S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n = \frac{2 \cdot 4{,}9 + 9{,}8(n-1)}{2} n.$$

8.1.13. 22. Запишем условие $\begin{cases} a_1 + a_3 + \ldots + a_{19} = 220, \\ a_2 + a_4 + \ldots + a_{20} = 250. \end{cases}$ Вычитая из 2-го уравнения 1-е, получим $(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_{20} - a_{19}) = \underbrace{d + \ldots + d}_{10 \text{ раз}} = 10d = 30$, т. е. $d = 3$. Сложив 1-е и 2-е уравнения, получим $\frac{2a_1 + 3 \cdot (20-1)}{2} \cdot 20 = 470$, откуда $a_1 = -5$, и $a_{10} = -5 + 9 \cdot 3 = 22$. ■

8.1.14. ± 2.

8.2.1. 3. ● При $n = 1$ получим $S_1 = b_1$ и $\frac{b_1}{2} + 1 = 3^1$, откуда $b_1 = 4$; $S_2 = b_1 + b_1 q = 4 + 4q$, откуда $\frac{4 + 4q}{2} + 1 = 3^2$. **8.2.2.** $\frac{1}{2}$. ● По условию $b_4 + b_5 = \frac{3}{2}$, $b_5 = 4b_3$, т. е.

$$\begin{cases} b_1 q^3 + b_1 q^4 = \frac{3}{2}, \\ b_1 q^4 = 4 b_1 q^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b_1 q^2 (1 + q^2) = \frac{3}{2}, \\ q^2 = 4. \end{cases}$$

8.2.3. ± 6. **8.2.4.** 3; 6; 12. ● Составим систему:

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 21, \\ \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_1 q} + \dfrac{1}{b_1 q^2} = \dfrac{7}{12}, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 21, \\ \dfrac{1+q+q^2}{b_1 q^2} = \dfrac{7}{12}. \end{cases}$$

Разделив 1-е уравнение на 2-е, получим уравнение $b_1^2 q^2 = 36$, далее $b_1 = \dfrac{6}{q}$ подставить в 1-е уравнение. **8.2.5.** $\{1;\ 2;\ 4; \ldots\}$, $\{4;\ 2;\ 1; \ldots\}$. ● Решить систему

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 7, \\ b_1 b_2 b_3 = 8, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 7, \\ b_1^3 d^3 = 8 \iff b_1 q = 2 \iff b_1 = \dfrac{2}{q}. \end{cases}$$

8.2.6. 16. ● Запишем условие в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{b_1(1-q^3)}{1-q} = 12, \\ \dfrac{b_1(1-q^6)}{1-q} = -84. \end{cases}$$

Разделив 2-е уравнение на 1-е, получим $\dfrac{1-q^6}{1-q^3} = 1 + q^3 = -\dfrac{84}{12} = -7$, откуда $q = -2$. **8.2.7.** $\frac{1}{2}$. **8.2.8.** 2. **8.2.9.** 1023. ● См. номер 8.2.6. **8.2.10.** $\pm\sqrt[4]{8}$.
8.2.11. 10. □ Условие равносильно системе

$$\begin{cases} b_1 + b_5 = 51, \\ b_2 + b_6 = 102, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} b_1 + b_1 q^4 = 51, \\ b_1 q + b_1 q^5 = 102, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b_1(1+q^4) = 51, \\ b_1 q(1+q^4) = 102. \end{cases}$$

Разделив 2-е уравнение на 1-е, получим $q = 2$. Подставив это значение в 1-е уравнение, получим $b_1 = 3$. Так как $S_n = \dfrac{3 \cdot (1-2^n)}{1-2} = 3069$, то $2^n = 1024$, и $n = 10$. ■
8.2.12. $\{q = \frac{\sqrt{3}}{3};\ b_1 = \sqrt{3} - 1\}$, $\{q = -\frac{\sqrt{3}}{3};\ b_1 = -\sqrt{3} - 1\}$. **8.2.13.** 14; 28.
● Так как $b_1 = 7$ и $b_1 q^3 = 56$, то $q^3 = 56 : 7 = 8$ и $q = 2$.
8.2.14. 1,9. □ $b_1 q^{17} \cdot b_1 q^{22} = b_1^2 q^{39} = 1{,}9 = b_1^2 q^{39} = b_1 q^{11} \cdot b_1 q^{28}$. ■
8.2.15. -9.

8.3.1. $\frac{1}{3}$. ● По условию $y = xq$, $z = xq^2$, и $2y - x = 3z - 2y$, т. е. $2xq - x = 3xq^2 - 2xq$. **8.3.2.** 54. ● Записать условие задачи в виде системы

$$\begin{cases} a + (a+2d) + (a+8d) = 78, \\ a(a+8d) = (a+2d)^2. \end{cases}$$

8.3.3. $\{3;\ 6;\ 12\}$, $\{27;\ 18;\ 12\}$. **8.3.4.** $\left\{\frac{-5 \pm 2\sqrt{7}}{2};\ \frac{-5 \pm 2\sqrt{7}}{2};\ \frac{-5 \pm 2\sqrt{7}}{2}\right\}$, $\left\{-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{8};\ \frac{1}{4}\right\}$, $\left\{\frac{3}{2};\ \frac{3}{8};\ -\frac{3}{4}\right\}$. ● Условие равносильно системе

$$\begin{cases} a(a+d) = (a+2d)^2, \\ a^2 + 2(a+d) + 3(a+2d) = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Выразить из 1-го уравнения d и подставить во 2-е уравнение. **8.3.5.** $a_1 = 30$, $d = 0$; $a_1 = 3$, $d = 6$. **8.3.6.** 5; 15; 45. **8.3.7.** $\frac{1}{3}$. ● Условие равносильно уравнению $a_1(a_1 + 4d) = (a_1 + 3d)^2$.

8.4.1. 15. ☐ Записав уравнение в виде

$$\frac{(x-1)+(x-2)+(x-3)+\ldots+1}{x^2} = \frac{7}{15},$$

видим, что числитель дроби в левой части уравнения представляет собой сумму $(x-1)$ членов арифметической прогрессии с $a_1 = (x-1)$, $a_n = 1$, $d = -1$, $n = (x-1)$, т. е. равен $\frac{x-1+1}{2}(x-1) = \frac{x(x-1)}{2}$. Отсюда получаем уравнение $\frac{x(x-1)}{2x^2} = \frac{7}{15}$, или $15x(x-1) = 7\cdot 2x^2$, т. е. $x^2 - 15x = 0$, откуда $x = 0$ или $x = 15$. Так как значение $x = 0$ не подходит (знаменатель дроби), то $x = 15$. ■

8.4.2. $(-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. ☐ По условию $2\cos\frac{\pi}{6} + 6\sin(\pi - \alpha) = 2\cdot 4\sin\alpha$, т. е. $2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\sin\alpha = 8\sin\alpha$, откуда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. ■

8.4.3. $\frac{\pi k}{2},\ k \in z$. ● Условие равносильно уравнению $\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x$.

8.4.4. -1; 2; 5 или 5; 2; -1. ☐ По условию

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 3x + a = \big(x - (x_2 - d)\big)(x - x_2)\big(x - (x_2 + d)\big) = \\ = x^3 + x^2\big(-(x_2+d) - x_2 - (x_2 - d)\big) + \\ + x\big(x_2(x_2+d) + (x_2+d)(x_2-d) + x_2(x_2-d)\big) - (x_2-d)x_2(x_2+d), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{cases} -(x_2+d) - x_2 - (x_2-d) = -6, \\ x_2(x_2+d) + (x_2+d)(x_2-d) + x_2(x_2-d) = 3, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} -3x_2 = -6 \Longleftrightarrow x_2 = 2, \\ 3x_2^2 - d^2 = 3, \end{cases}$$

т. е. $3\cdot 2^2 - d^2 = 3,\ d^2 = 9,\ d = 3$ или $d = -3$.

При $d = 3$ получим корни $x_2 - d = 2 - 3 = -1,\ x_2 + d = 2 + 3 = 5$. При $d = -3$ получим корни $x_2 - d = 2 - (-3) = 5,\ x_2 + d = 2 + (-3) = -1$.

8.4.5. 43725. ● Совпадающими членами обеих прогрессий являются числа 17; 52; 87; …, образующие арифметическую прогрессию с $a_1 = 17,\ d = 35,\ n = 50$.

8.5.1. 10.

8.5.2. -1. ☐ Так как $\sin(\arcsin x) = x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то получим геометрическую прогрессию $-1, x+2, x$, значит, $(-1)\cdot x = (x+2)^2$, откуда $x^2+4x+4+x = 0$, или $x^2 + 5x + 4 = 0$, следовательно $x = -1$ или $x = -4$ — не удовлетворяет условию $-1 \leqslant x \leqslant 1$. ■

8.5.3. $\frac{5}{2}$. ● Учитывая, что $S_{12} = \frac{b_1(1-q^{12})}{1-q}$, $S_{(13-24)} = \frac{b_{13}(1-q^{12})}{1-q}$, разделить S_{12} на $S_{(13-24)}$.

8.5.4. $\{2; 10; 50\}$, $\{50; 10; 2\}$. ☐ По условию $b_1 + b_1q + b_1q^2 = 62$, $b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 = 2604$, или $\begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 62, \\ b_1^2(1+q^2+q^4) = 2604. \end{cases}$ Разделив 2-е уравнение системы на 1-е, получим $\frac{b_1^2(1+q^2+q^4)}{b_1(1+q+q^2)} = \frac{2604}{62}$, или $b_1(1-q+q^2) = 42$. Получим систему

$\begin{cases} b_1(1+q+q^2)=62, \\ b_1(1-q+q^2)=42. \end{cases}$ Разделив 1-е уравнение на 2-е, получим $\dfrac{1+q+q^2}{1-q+q^2)} =$ $= \dfrac{62}{42} = \dfrac{31}{21}$, откуда $21(1+q+q^2) = 31(1-q+q^2)$, или $10q^2 - 52q + 10 = 0$, т.е. $5q^2 - 26q + 5 = 0$, следовательно, $q = 5$ $\left(b_1 = \dfrac{62}{1+5+5^2} = 2,\ b_2 = 10,\ b_3 = 50\right)$ или $q = \frac{1}{5}$ $\left(b_1 = \dfrac{62}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}} = 50,\ b_2 = 10,\ b_3 = 2\right)$. ■

8.5.5. 8. ● См. номер 8.5.4. **8.5.6.** $\frac{1}{2}$. ● Привести все логарифмы к основанию 3 и воспользоваться тем, что $ac = b^2$.

8.6.1. $\{7; 7; 7\}$, $\{7(1-\sqrt{2});\ 7;\ 7(1+\sqrt{2})\}$. □ Запишем числа a_1, a_2, a_3 в виде $a-d$, a, $a+d$, тогда $21 = (a-d)+a+(a+d) = 3a$, откуда $a = 7$. Так как числа $(7-d)^2$, 7^2, $(7+d)^2$ образуют геометрическую прогрессию, то $(7-d)^2(7+d)^2 = (7^2)^2$, откуда $(7-d)(7+d) = \pm 49$, или $49 - d^2 = \pm 49$. Значит, $d = 0$ (и тогда $a_1 = a_2 = a_3 = 7$) или $d = 7\sqrt{2}$ (тогда $a_1 = 7 - 7\sqrt{2},\ a_2 = 7,\ a_3 = 7 + 7\sqrt{2}$. ■

8.6.2. 2; 4; 6; 9. □ Запишем первые три числа в виде $a_2 - d$, a_2, $a_2 + d$, тогда $(a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) = 12$, т.е. $3a_2 = 12$, и $a_2 = 4$, откуда первые три числа имеют вид $4-d$, 4, $4+d$. Запишем последние три числа: 4, $4+d$, a_4. Из условия $4a_4 = (4+d)^2$ и $4+(4+d)+a_4 = 19$. Из второго уравнения $a_4 = 11-d$. Подставив это выражение в 1-е уравнение, получим $4\cdot(11-d) = (4+d)^2$, откуда $d^2 + 8d + 16 + 4d - 44 = 0$, или $d^2 + 12d - 28 = 0$, т.е. $d = 2$ или $d = -14$. При $d = 2$ получаем 4 числа: $4-2 = 2$, 4, $4+2 = 6$, $11-2 = 9$; при $d = -14$ получим $4 + d = 4 - 14 = -10 < 0$ — не удовлетворяет условию. ■

8.6.3. 50. ● Запишем все условия в виде системы:

$$\begin{cases} a_1 = 2b_1, \\ a_1 = 5b_2, \\ a_4 = \frac{1}{2}a_2, \\ a_2 = b_3 + 36, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} b_1 = \frac{a_1}{2}, \\ a_1 = 5\cdot b_1 q = 5\cdot\frac{a_1}{2}q \Longrightarrow q = \frac{2}{5}, \\ a_1 + 3d = \frac{1}{2}(a_1+d) \Longrightarrow \frac{1}{2}a_1 = -\frac{5}{2}d \Longrightarrow d = -\frac{1}{5}a_1, \\ a_1 + d = b_1q^2 + 36 = \frac{a_1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 36 \Longrightarrow \frac{4}{5}a_1 = \frac{4a_1}{50} + 36. \end{cases}$$

8.7.1. 3. □ Обозначим длины сторон AB, BC, AC через a, $a+d$, $a+2d$ соответственно, длину упомянутой высоты через h, радиус вписанной окружности через r, площадь треугольника ABC через S. Тогда $S = \frac{1}{2}h\cdot(a+d) = \frac{1}{2}r\cdot(a+a+d+a+2d)$, откуда $h(a+d) = r\cdot(3a+3d)$. Сокращая обе части на $(a+d)$, получим $h = 3r$. ■

8.7.2. -2; -1; 1. □ Сумма 1-го и 3-го членов арифметической прогрессии равна удвоенному 2-му члену, т.е. $\sqrt{y^2+2y+1} + (y-1) = 2\dfrac{y^2+3y-1}{3}$, или $3\left(\sqrt{(y+1)^2} + (y-1)\right) = 2(y^2+3y-1)$, откуда $3\left(|y+1| + y - 1\right) = 2y^2 + 6y - 2$, следовательно $2y^2 + 3y - 3|y+1| + 1 = 0$. Это уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y+1 \geqslant 0, \\ 2y^2 + 3y - 3(y+1) + 1 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y+1 < 0, \\ 2y^2 + 3y + 3(y+1) + 1 = 0, \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y \geqslant -1, \\ 2y^2 - 2 = 0, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l} y < -1, \\ 2y^2 + 6y + 4 = 0, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} y \geqslant -1, \\ y^2 - 1 = 0 \iff \end{array}\right. \qquad \text{или} \qquad \left\{\begin{array}{l} y < -1, \\ y^2 + 3y + 2 = 0 \iff \end{array}\right.$$

$$\iff y = 1 \quad \text{или} \quad y = -1, \qquad\qquad \iff y = -1 \quad \text{или} \quad y = -2.$$

Итак, $y \in \{-1;\ 1;\ -2\}$. ■

8.7.3. $\{a;\ a;\ a;\ \ldots\}$; $\{a;\ 3a;\ 5a;\ 7a;\ \ldots\}$, $a \neq 0$. □ Запишем отношение сумм:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_x}{a_{x+1} + \ldots + a_{x+kx}} = \frac{2a_1 + (x-1)d}{2a_1 + 2xd + (kx-1)d} \cdot \frac{1}{k}.$$

Это выражение не зависит от x тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\dfrac{2a_1 + (x-1)d}{2a_1 + 2xd + (kx-1)d} = C$, где C — постоянная, откуда $2a_1 + (x-1)d = C(2a_1 + 2xd + kxd - d)$, *или* $(1 - 2C - kC)dx = (2a_1 - d)(C-1)$. Это равенство верно при всех x тогда и только тогда, когда коэффициент при x и свободный член равны нулю: $\left\{\begin{array}{l} d(1 - 2C - kC) = 0, \\ (2a_1 - d)(C-1) = 0. \end{array}\right.$ Из первого уравнения $d = 0$ или $C = \dfrac{1}{2+k}$. *Если* $d = 0$, *то* $2a_1(C-1) = 0$. *Если* $a_1 = 0$, *то получаем прогрессию* $\{0; 0; 0; \ldots\}$ с $a_{x+1} + \ldots + a_{x+kx} = 0$, что невозможно по условию. Значит, $a_1 \neq 0$, *и* $C = 1$, *откуда получаем прогрессию* $\{a;\ a;\ a;\ \ldots\}$, $a \neq 0$.

Если $C = \dfrac{1}{2+k}$, то во 2-м уравнении получим $(2a_1 - d) \cdot \left(\dfrac{1}{2+k} - 1\right) = 0$, или $(2a_1 - d) \cdot \dfrac{-1-k}{2+k} = 0$. Так как $k > 0$, то $-1 - k \neq 0$, значит, $2a_1 - d = 0$, $d = 2a_1 (\neq 0)$. Получаем прогрессию $\{a;\ 3a;\ 5a;\ 7a;\ \ldots\}$, $a \neq 0$. ■

8.7.4. -7; $\frac{109}{7}$. □ Запишем исходное уравнение в виде $t^2 + (a-3)t + (a+10)^2 = 0$ *и найдем дискриминант* $D = (a-3)^2 - 4(a+10)^2 = (a-3)^2 - \big(2(a+10)\big)^2 = \big(a - 3 - 2(a+10)\big)\big(a - 3 + 2(a+10)\big) = (-a-23)(3a+17) > 0$ при $a \in \left(-23; -\frac{17}{3}\right)$.

При $D > 0$ получим корни $t_{1,2} = \dfrac{3 - a \pm \sqrt{D}}{2}$, а корни исходного уравнения таковы: $x_{1,4} = \mp\sqrt{\dfrac{3 - a + \sqrt{D}}{2}}$, $x_{2,3} = \mp\sqrt{\dfrac{3 - a - \sqrt{D}}{2}}$. Расположенные в порядке возрастания числа x_1, x_2, x_3, x_4 образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$, то есть если

$$\sqrt{\frac{3 - a - \sqrt{D}}{2}} - \left(-\sqrt{\frac{3 - a - \sqrt{D}}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{3 - a - \sqrt{D}}{2}} - \left(-\sqrt{\frac{3 - a + \sqrt{D}}{2}}\right)$$

откуда $\sqrt{\dfrac{3 - a + \sqrt{D}}{2}} = 3\sqrt{\dfrac{3 - a - \sqrt{D}}{2}}$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим уравнение $\dfrac{3 - a + \sqrt{D}}{2} = 9 \cdot \dfrac{3 - a - \sqrt{D}}{2}$, или $10\sqrt{D} = 8(3-a)$, т. е. $5\sqrt{-(a+23)(3a+17)} = 4(3-a)$. Возведем обе части в квадрат, и решим полученное уравнение: $25 \cdot (-1)(a+23)(3a+17) = 16(3-a)^2$, т. е.

$$16(a^2 - 6a + 9) + 25(3a^2 + 86a + 391) = 0, \quad \text{или} \quad 91a^2 + 2054a + 9919 = 0.$$

Разделив обе части уравнения на 13, получим уравнение $7a^2 + 158a + 763 = 0$ с $\frac{D}{4} = 900$ и корнями $a_1 = -7$, $a_2 = -\frac{109}{7}$. ■

8.7.5. $\frac{1}{30}$; $\frac{2}{19}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{11}{2}$. □ Решим уравнение $\cos\big((8a-3)x\big) - \cos\big((14a+5)x\big) = 0$,

$$\text{т. е.}\quad 2\sin\frac{(8a-3)x + (14a+5)x}{2}\cdot\sin\frac{(14a+5)x-(8a-3)x}{2} = 0,\quad \text{или}$$

$\sin(11a+1)x \cdot \sin(3a+4)x = 0$. Отсюда

$$\sin(11a+1)x = 0 \quad (\text{тогда } (11a+1)x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \text{ и } x = \frac{\pi}{11a+1}k,\ k \in \mathbb{Z}) \text{ или}$$

$$\sin(3a+4)x = 0 \quad (\text{тогда } (3a+4)x = \pi n,\ x = \frac{\pi}{3a+4}n,\ n \in \mathbb{Z}).$$

Обозначим $C_1 = \frac{\pi}{11a+1}$, $C_2 = \frac{\pi}{3a+4}$, тогда множество неотрицательных решений исходного уравнения запишется в виде $\{C_1k, C_2n,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Это множество образует арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда выполняется одно из равенств: $C_1 = C_2$, $C_1 = nC_2$, $C_2 = kC_1$, $n = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, 1, 2, \ldots$ Рассмотрим все возможные варианты таких равенств.

1) $C_1 = C_2$, т. е. $\frac{\pi}{11a+1} = \frac{\pi}{3a+4}$, или $11a + 1 = 3a + 4$, откуда $8a = 3$, $a = \frac{3}{8}$.

2) $C_1 = 2C_2$, т. е. $\frac{\pi}{11a+1} = \frac{2\pi}{3a+4}$, или $2(11a+1) = 3a+4$, откуда $19a = 2$, $a = \frac{2}{19}$.

3) $C_1 = 3C_2$, т. е. $\frac{\pi}{11a+1} = \frac{3\pi}{3a+4}$, или $3(11a+1) = 3a+4$, откуда $30a = 1$, $a = \frac{1}{30}$.

4) Если $C_1 = 4C_2$, то $\frac{\pi}{11a+1} = \frac{4\pi}{3a+4}$, или $4(11a+1) = 3a+4$, откуда $41a = 0$, $a = 0$ — не является положительным числом. Аналогично, при $C_1 \in \{5C_2, 6C_2, \ldots\}$ получим отрицательные значения a, не удовлетворяющие условию.

5) $C_2 = 2C_1$, т. е. $\frac{\pi}{3a+4} = \frac{2\pi}{11a+1}$, или $2(3a+4) = 11a+1$, откуда $7 = 5a$, $a = \frac{7}{5}$.

6) $C_2 = 3C_1$, т. е. $\frac{\pi}{3a+4} = \frac{3\pi}{11a+1}$, или $3(3a+4) = 11a+1$, откуда $11 = 2a$, $a = \frac{11}{2}$.

7) Если $C_2 = 4C_1$, то $\frac{\pi}{3a+4} = \frac{4\pi}{11a+1}$, или $4(3a+4) = 11a+1$, откуда $a = -15$ — не удовлетворяет условию. Аналогично, не удовлетворяют условию отрицательные значения a, получающиеся при решении уравнений $C_2 = kC_1$, $k = 5, 6, \ldots$ ■

8.7.6. 2744; 371; −112; −1189; 119; −364; −2737; −19204. ● Так как $2744 = 2^3{\cdot}7^3$, то из условия задачи получаем уравнение $\frac{2a_1 + 7(n-1)}{2}n = 2^3{\cdot}7^3$ или $\big(2a_1 + 7(n-1)\big)\cdot n = 2^4\cdot 7^3$. Если n — четное, то $2a + 7(n-1)$ — нечетное, и поэтому n делится на 2^4, точнее, $n = 2^4 \cdot k$, где k — делитель числа 7^3. Перебирая все возможные значения k, найдем подходящие значения a. Аналогично *рассматривается случай нечетных* n.

8.8.1. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z};\ k = 17.$ □ Из условия следует, что $(1-\cos 2x)\cdot\frac{1}{2}\sin^{-2}x = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2$, т. е. $\frac{1-\cos 2x}{2\sin^2 x} = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2$, или $\frac{2\sin^2 x}{2\sin^2 x} = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2$, откуда $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$, значит, $\cos x - \frac{1}{2} = 1$ (не имеет решений) или $\cos x - \frac{1}{2} = -1$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. При этом

$$\frac{1}{2}\sin^{-2}x = \frac{1}{\sin^2\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m\right)} = \frac{1}{2\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{3},$$

и $1-\cos 2x = 1-\cos 2\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi m\right) = 1-\cos\left(\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi m\right) = 1-\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$. Итак, числа $\frac{3}{2}$, -1, $\frac{2}{3}$ являются k-м, $(k+1)$-м и $(k+2)$-м членами геометрической прогрессии соответственно. Отсюда $q = -1 : \frac{3}{2} = -\frac{2}{3}$, значит $b_{15} = \frac{27}{8} = b_1 q^{14}$, и $b_k = \frac{3}{2} = b_1 q^{k-1}$, т. е.

$$\frac{b_k}{b_{15}} = \frac{b_1 q^{k-1}}{b_1 q^{14}} = q^{k-15} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{k-15} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{27}{8}} = \frac{4}{9} = \left(-\frac{2}{3}\right)^2,$$

следовательно, $k - 15 = 2$, $k = 17$. ■

8.8.2. $-4,\ 2,\ -1.$ □ По условию $x^3+3x^2-6x+a = \left(x-\frac{x_2}{q}\right)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_2q) =$
$= x^3 + x^2\left(-x_2q - x_2 - \frac{x_2}{q}\right) + x\left(x_2\cdot x_2q + \frac{x_2}{q}\cdot x_2q + \frac{x_2}{q}\cdot x_2\right) - \frac{x_2}{q}\cdot x_2\cdot x_2q$, откуда

$$\begin{cases} -x_2q - x_2 - \frac{x_2}{q} = 3, \\ x_2^2q + x_2^2 + \frac{x_2^2}{q} = -6, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} -x_2\left(q+1+\frac{1}{q}\right) = 3, \\ x_2^2\left(q+1+\frac{1}{q}\right) = -6. \end{cases}$$

Разделив 2-е уравнение на 1-е, получим $-x_2 = -2$, т. е. $x_2 = 2$. Подставляя это значение в 1-е уравнение *получим* $-2\left(q+1+\frac{1}{q}\right) = 3$, *или* $-2(q^2+q+1) = 3q$, откуда $2q^2 + 5q + 2 = 0$, значит, $q = -2$ или $q = -\frac{1}{2}$. При $q = -2$ получим корни исходного уравнения $\frac{x_2}{q} = \frac{2}{-2} = -1$ и $x_2q = 2\cdot(-2) = -4$. При $q = -\frac{1}{2}$ получим корни исходного уравнения $\frac{x_2}{q} = \frac{2}{-1/2} = -4$ и $x_2q = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$. *Итак, в любом случае исходное уравнение имеет 3 корня:* $-4,\ 2,\ -1$. ■

8.8.3. 194. □ Обозначим знаменатели прогрессий через q и $-4-q$. Тогда $1\cdot q^5 + 1\cdot(-4-q)^5 = -724$. Положим $t = q+2$, тогда $(t-2)^5 - (t+2)^5 = -724$, или $(t^5 - 5t^4\cdot 2 + 10t^3\cdot 2^2 - 10t^2\cdot 2^3 + 5t\cdot 2^4 - 2^5) - (t^5 + 5t^4\cdot 2 + 10t^3\cdot 2^2 + 10t^2\cdot 2^3 + 5t\cdot 2^4 + 2^5) =$
$= -20t^4 - 160t^2 - 64 = -724$, откуда $(t^2)^2 + 8t^2 - 33 = 0$, т. е. $t^2 = 3$ или $t^2 = -11$

(не подходит). Аналогично, найдем $1 \cdot q^4 + 1 \cdot (-4-q)^4 = (t-2)^4 + (t+2)^4 = (t^4 - 4t^3 \cdot 2 + 6t^2 \cdot 2^2 - 4t \cdot 2^3 + 2^4) + (t^4 + 4t^3 \cdot 2 + 6t^2 \cdot 2^2 + 4t \cdot 2^3 + 2^4) = 2t^4 + 48t^2 + 32 = (\text{т. к. } t^2 = 3) = 2 \cdot 3^2 + 48 \cdot 3 + 32 = 194$. ■

8.8.4. 8; 56; 392. □ По условию $b = aq$, $c = aq^2$, где $q > 1$ — натуральное число. Так как $4312 = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11$, $2240 = 2^6 \cdot 5 \cdot 7$ и $\dfrac{4312}{a \cdot q^2} = \dfrac{2^3 \cdot 7^2 \cdot 11}{a \cdot q^2}$ — целое, $\dfrac{2240}{aq} = \dfrac{2^6 \cdot 5 \cdot 7}{aq}$ — целое, то $q \in \{2;\ 7;\ 14\}$. Рассмотрим три случая:

1) $q = 2$, тогда максимальное возможное значение a равно $2 \cdot 7 = 14$. Отсюда $aq = 28$, $aq^2 = 56$, $\max\{a + aq + aq^2\} = 14 + 28 + 56 = 98$.

2) $q = 7$, тогда максимальное значение a равно $2^3 = 8$. Отсюда $aq = 56$, $aq^2 = 392$, и $\max\{a + aq + aq^2\} = 8 + 56 + 392 = 456$.

3) $q = 14$, тогда максимальное значение a равно 2. Отсюда $aq = 28$, $aq^2 = 392$, и $\max\{a + aq + aq^2\} = 2 + 28 + 392 = 422$.

Итак, максимальное значение сумма $a + b + c$ принимает при $a = 8$, $b = 56$, $c = 392$. ■

9. Производная

9.1.1. $x(2\ln x + 1)$. □ $(x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$. ■

9.1.2. $1 + \dfrac{2}{\cos^2 2x}$. **9.1.3.** $2ax + b$. **9.1.4.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$. **9.1.5.** $\dfrac{1}{5\sqrt[4]{x^3}} - 10x^2 - \dfrac{2}{5x^3}$. **9.1.6.** $x^2 \cdot e^x$. **9.1.7.** $\dfrac{5[\cos 5x(x^5+5) - x^4 \sin 5x]}{(x^5+5)^2}$. **9.1.8.** $1 - 7x^{\frac{1}{6}} + 16x^{\frac{1}{3}} - 12x^{\frac{1}{2}}$. **9.1.9.** $12x^2 - 3$. ● Предварительно упростить исходное выражение, воспользовавшись формулой разности квадратов.

9.2.1. $-\frac{1}{4}$. □ $f'(x) = \left(\dfrac{1-x}{x^2+3}\right)' = \dfrac{(1-x)'(x^2+3) - (x^2+3)'(1-x)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{(-1)(x^2+3) - 2x(1-x)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x^2+3)^2}$. Отсюда $f'(x) = -\dfrac{4}{16} = -\dfrac{1}{4}$. ■

9.2.2. $\frac{2}{3}$. **9.2.3.** -3. **9.2.4.** -2. **9.2.5.** (1). **9.2.6.** 0,75. ● Учесть, что $\dfrac{\lg x}{\lg e} = \ln x$.

9.2.7. 1. **9.2.8.** 1. **9.2.9.** $-0{,}5$. ● $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **9.2.10.** 4.

9.2.11. 0,5. **9.2.12.** 1. **9.2.13.** $-1{,}5$. **9.2.14.** 0,8. ● По формуле производной сложной функции имеем $f'(x) = \dfrac{2(3-x)}{6x - x^2}$.

9.2.15. 2. ● $f'(x) = e^{2\sin x + x^3}(2\cos x + 3x^2)$.
9.2.16. 0. ● $f'(x) = 2\sin 3x \cos 3x \cdot 3 = 3\sin 6x$.
9.2.17. 5. ● $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt[4]{(3-2x^2)^3}} + 2 \cdot 3^x$.

9.3.1. Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -3)$ и $(1; +\infty)$ и убывает на интервале $(-3; 1)$. □ Функция $f(x)$ определена и имеет производную на всей числовой прямой. Найдем ее производную

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 9x + 2)' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x+3)(x-1).$$

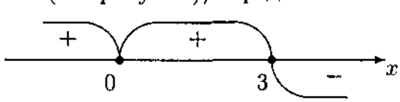
Далее, $f'(x) > 0 \iff (x+3)(x-1) > 0 \iff x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$, поэтому $(-\infty; -3)$ и $(1; +\infty)$ — интервалы возрастания. Аналогично $f'(x) < 0 \iff$ $\iff (x+3)(x-1) < 0 \iff x \in (-3; 1)$, т. е. $(-3; 1)$ — интервал убывания. ■
9.3.2. $(-\infty; 0)$, $(1; \infty)$ — интервалы возрастания, $(0; 1)$ — интервал убывания. **9.3.3.** $(-\infty; 3)$, $(5; \infty)$ — интервалы возрастания, $(3; 5)$ — интервал убывания. ● $f'(x) = x^2 - 8x + 15 = (x-5)(x-3)$. **9.3.4.** $(-\infty; -2)$, $(1; +\infty)$ — интервалы возрастания, $(-2; 1)$ — интервал убывания. ● $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$. **9.3.5.** $(-1; 1)$ — интервал возрастания, $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$ — интервалы убывания. ● $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$. **9.3.6.** $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$ — интервалы убывания, при $x = 2$ функция не определена. ● $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2} = \dfrac{2(x-2)+3}{x-2} =$ $= 2 + \dfrac{3}{x-2}$, поэтому $f'(x) = \left(2 + \dfrac{3}{x-2}\right)' = -\dfrac{3}{(x-2)^2} < 0$ при всех $x \neq 2$.
9.3.7. $(2; +\infty)$ — интервал возрастания; $(-\infty; -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; 2)$ — интервалы убывания. ● Найти

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2}}\right)' = \frac{(x-1)'\sqrt{x^2-2} - (\sqrt{x^2-2})'(x-1)}{x^2-2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-2} - \dfrac{2x(x-1)}{2\sqrt{x^2-2}}}{x^2-2} = \frac{x-2}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}$$

и учесть, что функция $f(x)$ и ее производная не определены на интервале $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. **9.3.8.** $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ — интервал возрастания. **9.3.9.** $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$ — интервал возрастания, $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$ — интервал убывания. ● Преобразовав функцию $f(x)$ к виду $f(x) = 2^x + 2^{-2x}$, получить $f'(x) = (2^x - 2 \cdot 2^{-2x}) \ln 2$. Решая уравнение $f'(x) = 0$, найти критическую точку $x = \dfrac{1}{3}$. Далее определить знак $f'(x)$ на интервалах $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. **9.3.10.** $\left(\dfrac{1}{3}\log_3 2; +\infty\right)$ — интервал возрастания, $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\log_3 2\right)$ — интервал убывания. **9.3.11.** $(3; +\infty)$ — интервал возрастания, $(2; 3)$ — интервал убывания. ● Функция $f(x)$ и ее производная определены при $x \in (2; +\infty)$. На этом множестве $f'(x) = 2x - 4 - \dfrac{2}{x-2}$.
9.3.12. 0,5. ● Функция $f(x)$ и ее производная определены при $x \in (0; +\infty)$. На этом множестве $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$. **9.3.13.** 1. **9.3.14.** $(-\infty; -2)$, $(-1; +\infty)$.

9.4.1. 13,5. □ Функция $f(x)$ и ее производная определены на всей числовой прямой, при этом $f'(x) = -2x^3 + 6x^2 = 2x^2(3-x)$. Приравнивая $f'(x)$ нулю, найдем критические точки функции $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. Отмечая эти точки на числовой оси (см. рисунок), определяем знак производной в их окрестностях.

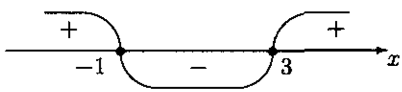


Отсюда видно, что $x = 3$ — точка максимума. Теперь находим максимум функции: $f(3) = -0{,}5 \cdot (3)^4 + 2 \cdot 3^3 = 3^3(2 - 0{,}5 \cdot 3) = 27 \cdot 0{,}5 = 13{,}5$. ■
9.4.2. 4. ● $f'(x) = 3(x-4)(x-2)$, $x = 2$ — точка максимума. **9.4.3.** 15. ● $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$, $x = -1$ — точка максимума.

9.4.4. $-0{,}5$. ● $f'(x)=\dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$, $x=-1$ — точка минимума.

9.4.5. 0. ● $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x=0$ — точка минимума. Заметим, что задачу можно легко решить и не используя производную, если учесть, что $f(x)\geqslant 0$ для всех $x\in\mathbb{R}$ и $f(0)=0$. **9.4.6.** 1. ● $f'(x)=6(1-e^{-6x})$, $x=0$ — точка минимума. **9.4.7.** 0,25. ● Функция $f(x)$ и ее производная определены на всей числовой прямой, при этом $f'(x)=\dfrac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}$.

9.4.8. $f_{\max}=f(-1)=\frac{5}{3}$, $f_{\min}=f(3)=-9$. □ Функция $f(x)$ и ее производная определены на всей числовой прямой. $f'(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$, отсюда критические точки функции $f(x)$ $x_1=-1$, $x_2=3$. Определяя знак производной в окрестностях этих точек (см. рис.), находим, что $x=-1$ — точка максимума и $f_{\max}=f(-1)=\dfrac{(-1)^3}{3}-(-1)^2-3(-1)=\dfrac{5}{3}$, а $x=3$ — точка минимума и $f_{\min}=f(3)=\dfrac{3^3}{3}-3^2-3\cdot 3=-9$. ■



9.4.9. $f_{\max}=f(2)=\frac{14}{3}$, $f_{\min}=f(3)=4{,}5$. **9.4.10.** $f_{\min}=f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

9.4.11. $f_{\max}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3e}$. ● $f'(x)=(1-3x)e^{-3x}$. **9.4.12.** $f_{\max}=f(1)=$ $=-1$. ● Функция $f(x)$ определена и дифференцируема при $x>0$, при этом $f'(x)=\dfrac{2(1-x)(1+x)}{x}$, $x=1$ — точка максимума. **9.4.13.** $f_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. ● Функция $f(x)=\left(2-\frac{1}{x}\right)^2=4-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ определена и имеет производную при $x\neq 0$, при этом $f'(x)=\dfrac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x^3}$. **9.4.14.** 0; 4. ● $f'(x)=5x^3(x-4)$, 0 — точка максимума, а 4 — точка минимума.

9.5.1. $f_{\max}=f(2)=22$, $f_{\min}=f(-1)=-5$. □ Функция $f(x)$ и ее производная определены на всей числовой прямой. $f'(x)=9+6x-3x^2=-3(x-3)(x+1)$, критические точки — $x_1=-1$, $x_2=3$. Точка $x_2=3$ не принадлежит заданному отрезку, поэтому осталось сравнить значения функции на концах отрезка и в точке $x_1=-1$: $f(-2)=2$, $f(2)=22$, $f(-1)=-5$. Отсюда наибольшее значение функции на отрезке $[-2;2]$ — $f(2)=22$, наименьшее — $f(-1)=-5$. ■

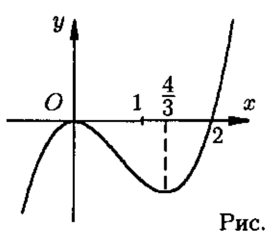


Рис. 1

9.5.2. $f_{\max}=f(1)=8$, $f_{\min}=f(-2)=-73$. **9.5.3.** $f_{\max}=f(0)=f(3)=5$,

$f_{\min} = f(2) = 1$. **9.5.4.** $f_{\max} = f(4) = 11$, $f_{\min} = f(2) = -9$. **9.5.5.** $f_{\max} = f(2) = 0$, $f_{\min} = f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{32}{27}$. График функции изображен на рис. 1. **9.5.6.** $f_{\max} = f(0) = 1$, $f_{\min} = f(-1) = -\frac{5}{6}$. **9.5.7.** $f_{\max} = f(3) = 0$, $f_{\min} = f(2) = -4$. **9.5.8.** $f_{\max} = f(2) = 51$, $f_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -5{,}25$. **9.5.9.** $f_{\max} = f(2) = \frac{11}{2}$, $f_{\min} = f(1) = 0$. **9.5.10.** $f_{\max} = f(-3) = f(3) = 45$, $f_{\min} = f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -4$. **9.5.11.** $f_{\max} = f(-2) = 37$, $f_{\min} = f(2) = -27$. **9.5.12.** $f_{\max} = f(1) = 3$, $f_{\min} = f(-1) = 1$. • $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$. Сделав замену $y = x^2$, показать, что $f'(x) > 0$ при $x \in \mathbb{R}$. **9.5.13.** $f_{\max} = f(-3) = -2$, $f_{\min} = f(-1) = -3\frac{1}{3}$. **9.5.14.** $f_{\min} = f(1) = 0$, $f_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}$. **9.5.15.** $f_{\max} = f(-1) = \frac{1}{3}$, $f_{\min} = f(1) = -1$. • $x - x^2 - 1 < 0$ на всей числовой прямой, поэтому производная $f'(x) = \left(\frac{x}{x - x^2 - 1}\right)' = \frac{x^2 - 1}{(x - x^2 - 1)^2}$ определена для всех $x \in \mathbb{R}$. **9.5.16.** $f_{\max} = f(4) = \frac{128}{7}$, $f_{\min} = f(3\sqrt{3}) = 9\sqrt{3}$. **9.5.17.** $f_{\max} = f(0) = 0$, $f_{\min} = f(1) = -3$. • $f'(x) = \frac{2x(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})}{(x - 2)^2}$, $x = 0$ — критическая точка на отрезке $[-1; 1]$. **9.5.18.** $f_{\max} = f\left(\frac{5}{e}\right) = \frac{5}{2}$, $f_{\min} = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5\ln 2}{2}$. • $f'(x) = \ln 5 - \ln x - 1 = \ln\frac{5}{e} - \ln x$, поэтому $f'(x) = 0$, если $x = \frac{5}{e}$. Поскольку $\frac{5}{e} > \frac{5}{3}$, сравнить далее $f\left(\frac{5}{3}\right)$, $f\left(\frac{5}{e}\right)$, $f\left(\frac{5}{2}\right)$. **9.5.19.** $f_{\max} = f(1) = \ln 2$, $f_{\min} = f(2) = 2(\ln 2 - 1)$. • Функция $f(x)$ и ее производная определены при $x > 0$, и $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = -\frac{(2x + 1)(x - 1)}{x}$. На отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ лежит критическая точка $x = 1$. Далее сравнить $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ и $f(2)$. **9.5.20.** $f_{\max} = f(1) = \ln 2 + 5$, $f_{\min} = f(2) = 2(\ln 2 - 1)$. **9.5.21.** $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$, $f_{\min} = f(0) = 0$. • $f'(x) = 2 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}$. Критические точки функции определяются из уравнений $\cos x = 0$ и $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ лежит лишь критическая точка $x = \frac{\pi}{4}$. Далее сравнить $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ и $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. **9.5.22.** $f_{\max} = f(-5) = 29$, $f_{\min} = f(3) = 1$. • Обозначив $t = x - 3$, найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = t^2 + 1 - 9t^{\frac{4}{3}} + 27t^{\frac{2}{3}}$ на отрезке $[-8; 1]$. **9.5.23.** $f_{\min} = f(1) = -6$. **9.5.24.** $f_{\min} = f(8) = 1$. **9.5.25.** $f_{\min} = f(2) = 11$. **9.5.26.** $f_{\min} = f(1) = -1{,}5$. **9.5.27.** $f_{\min} = f(1) = -1$. **9.5.28.** $f_{\min} = f(-1) = -3$. **9.5.29.** $f_{\min} = f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$. • $f'(x) = 4 - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$, на отрезке $\left[\frac{1}{9}; 9\right]$ есть критическая точка $x = \frac{1}{4}$. **9.5.30.** $f_{\min} = f(4) = 4$. **9.5.31.** $f_{\min} = f(8) = 27$. • Обозначив $t = \log_2 x$ и учитывая, что при $x \in [4; 16]$ функция t меняется от 2 до 4, найти наименьшее значение функции $y = 2t^3 - 15t^2 + 36t$ на отрезке $[2; 4]$. **9.5.32.** $f_{\max} = f(2) = 4$.

9.5.33. $f_{\max} = f(1) = 3$. ● $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$. Обозначив $t = x^2$, показать, что $f'(x) > 0$ на всей числовой прямой, откуда $f_{\max} = f(1)$. **9.5.34.** $f_{\max} = f(9) = 63$. ● $f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - 20$, критическая точка — $x = 4$. **9.5.35.** $f_{\max} = f(6) = 4$. **9.5.36.** $f_{\max} = f(-1) = 1$. ● Учесть, что наибольшее значение функции $f(x)$ совпадает с не равным нулю наименьшим значением функции $g(x) = \frac{1}{f(x)} = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 8$. **9.5.37.** $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. ● Преобразовать функцию $f(x)$ к виду $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$. Обозначив далее $t = \sin x$, найти наибольшее значение функции $y = 2t^2 + 2t - 1$ на отрезке $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$. **9.5.38.** $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + 1$. ● $f'(x) = \frac{1}{2} + \sin 2x$. Решая уравнение $f'(x) = 0$, найти критические точки, лежащие на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ — $x_1 = -\frac{\pi}{12}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{12}$. Далее сравнить $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, учитывая, что $\sin x \leqslant 1$.

9.6.1. $y = 3x - 1$. □ Уравнение касательной, проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$, имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. В нашем случае $x_0 = 2$, $f(x_0) = f(2) = 5$, $f'(x_0) = f'(2) = (x+1)\big|_{x=2} = 3$, откуда $y = 5 + 3(x-2)$, т. е. в итоге $y = 3x - 1$. ■

9.6.2. $y = -3x + 6$. **9.6.3.** $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$. **9.6.4.** $y = -3x + 7$. **9.6.5.** $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{16}$. **9.6.6.** $y = \frac{1}{4}x + 2$. **9.6.7.** $y = x + 3$. **9.6.8.** $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.6.9.** $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.6.10.** $y = \frac{3x}{8} + \frac{5 - 3\ln 2}{4}$. **9.6.11.** $y = -x + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$. **9.6.12.** $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. **9.6.13.** $y = -2x$, $y = 2x - 4$. **9.6.14.** $y = 6x - 3$. **9.6.15.** $y = 2x + 5$. **9.6.16.** $y = -2x + 4$.

9.6.17. $30°$. □ Обозначим искомый угол наклона касательной через α. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = y'(x_0) = y'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Так как $y'(x) = x$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда (с учетом ограничения $0 \leqslant \alpha < 180°$) имеем $\alpha = 30°$. ■

9.6.18. $60°$. **9.6.19.** $\operatorname{arctg}\frac{9}{4}$.

9.6.20. 0,5. □ Угловой коэффициент заданной прямой $y = -2x + 5$ равен -2, поэтому угловой коэффициент касательной, равный $f'(x_0)$, также должен быть равен -2. Отсюда $f'(x_0) = -2$ или $2x_0 - 3 = -2$, т. е. $x_0 = 0{,}5$. ■

9.6.21. 2. **9.6.22.** 0. **9.6.23.** $-\frac{5\pi}{6}$. ● Преобразовывая уравнение $f'(x) = 1$ или $8\cos x + \frac{\sqrt{27}}{\cos^2 x} + 1 = 1$, получить простейшее уравнение $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.6.24.** $(0; -1)$, $(4; 3)$. **9.6.25.** $(0; -2)$, $(0{,}5; 0)$, $(0; 14)$, $(-3{,}5; 0)$. **9.6.26.** 13. **9.6.27.** 25. ● Касательная $y = \frac{3}{4}x + 15$ пересекает оси координат в точках $A(0; 15)$ и $B(-20; 0)$. Далее воспользоваться формулой расстояния между двумя точками. **9.6.28.** 1. Касательная $y = 2x - 2$ пересекает оси координат в точках $A(0; -2)$ и $B(1; 0)$. Далее найти площадь прямоугольного $\triangle AOB$, где $O(0, 0)$. **9.6.29.** $\frac{9}{2}$. ● Уравнение касательной имеет вид $y = x + 3$. **9.6.30.** 2. **9.6.31.** 0,6. ● Уравнение касательной $y = -\frac{4}{3}x + 1$; перпендикулярная ей прямая, проходящая через начало координат O, имеет уравнение $y = \frac{3}{4}x$. Далее найти точку A пересечения этих прямых и длину отрезка AO.

9.7.1. 4. ● Обозначив перпендикулярную к гипотенузе AB сторону прямоугольника через x (см. рис. 2), получим $AE = x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$, $BF = x \operatorname{tg} 60^\circ$, откуда $EF = AB - AE - BF = 8 - x\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 8 - \frac{4x}{\sqrt{3}}$.

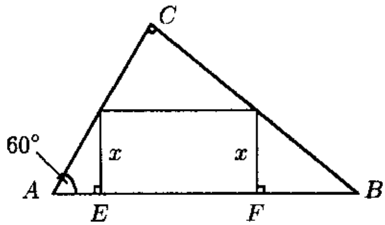


Рис. 2

Далее найти точку максимума площади $S(x)$ прямоугольника, учитывая, что $S(x) = x \cdot EF = 8x - \frac{4x^2}{\sqrt{3}}$.

9.7.2. 10. **9.7.3.** 2. **9.7.4.** Оба угла при заданном основании равны $\frac{\pi - \alpha}{2}$, т. е. искомый треугольник равнобедренный. ● Обозначив один из углов при основании через x и выражая остальные две стороны треугольника по теореме синусов через a, x и α, получить выражение для функции $P(x)$ — периметра треугольника: $P(x) = a + \frac{a \sin x}{\sin \alpha} + \frac{a \sin(x + \alpha)}{\sin \alpha}$. Далее найти точку максимума этой функции на интервале $(0; \pi)$. **9.7.5.** $2\sqrt{2S}$. ● Обозначив одну из сторон прямоугольника через x, исследовать на максимум функцию $f(x) = x + \frac{2S}{x}$. **9.7.6.** $2\sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}}$. **9.7.7.** $\frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}$. **9.7.8.** $\frac{10}{3} + \frac{50}{3}$. ● Обозначив одно из слагаемых через x, исследовать на минимум функцию $f(x) = x^3 + (20 - x)^2$. **9.7.9.** 10; $10\sqrt{2}$. **9.7.10.** $a = 1$; минимум. **9.7.11.** 2. **9.7.12.** 0,5; 63,5.

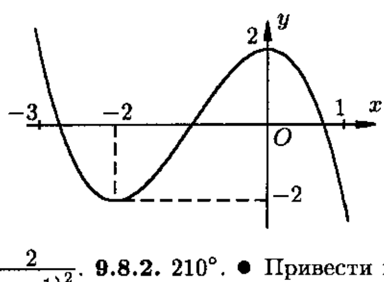


Рис. 3

9.8.1. 4. ● $g'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$. **9.8.2.** 210°. ● Привести исходное уравнение к виду $\cos^2 x + 2\sin x = -\sin^2 x$, т. е. $\sin x = -\frac{1}{2}$. **9.8.3.** −0,15. **9.8.4.** 6. ● Привести исходное уравнение к виду $\frac{x}{2-x} + 2 = \frac{2}{(2-x)^2}$ или $x^2 - 6x + 6 = 0$, далее воспользоваться теоремой Виета. **9.8.5.** −3. **9.8.6.** $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{4}{9}; +\infty\right)$. **9.8.7.**

График функции изображен на рис. 3. ● ОДЗ — множество $(-\infty; +\infty)$, функция $f(x)$ — ни четная, ни нечетная; возрастает на интервале $(-2; 0)$, убывает на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(0; +\infty)$; $x = -2$ — точка минимума, $f(-2) = -2$, $x = 0$ — точка максимума, $f(0) = 2$. **9.8.8.** Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и не является ни четной, ни нечетной; пересекает ось Ox в точках $(1; 0)$ и $(-3; 0)$, ось Oy — в точке $(0; 3)$; возрастает на интервалах $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right)$ и $(1; +\infty)$, убывает на интервале $\left(-\frac{5}{3}; 1\right)$; $x = 1$ — точка минимума, $f(1) = 0$; $x = -\frac{5}{3}$ — точка максимума, $f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{256}{27}$. **9.8.9.** Функция определена на всей числовой прямой и не является ни четной, ни нечетной; пересекает ось Ox в точках $(0; 0)$ и $(3; 0)$, и ось Oy — в точке $(0; 0)$; возрастает на интервалах $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$, убывает на интервале $(1; 3)$; $x = 1$ — точка максимума, $f(1) = \frac{4}{3}$, $x = 3$ — точка минимума, $f(3) = 0$. **9.8.10.** Функция определена на всей числовой прямой, четная; пересекает ось Ox в точках $(-2; 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(2; 0)$, ось Oy — в точке $(0; 4)$; возрастает на интервалах $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty\right)$, убывает на интервалах $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ и $\left(0; \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$; $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ — точки минимума, $f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{9}{4}$; $x = 0$ — точка максимума, $f(0) = 4$. **9.8.11.** $x = \pm\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{16} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **9.8.12.** $(-4; -3)$. ● Учесть, что произвольная точка на прямой имеет координаты $\left(x, -\frac{4}{3}x - \frac{25}{3}\right)$.

9.9.1. $f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{4}$, $x > 0$. ● На области допустимых значений, определяемой неравенством $x > 0$, функция $f(x)$ приводится к виду $f(x) = \frac{x^3 + x}{4}$. **9.9.2.** $f'(x) = 2x^3$, $x > 0$, $x \neq 1$. ● Воспользоваться равенствами $\sqrt{10 - \sqrt{96}} = \sqrt{(2 - \sqrt{6})^2} = |2 - \sqrt{6}| = \sqrt{6} - 2$. **9.9.3.** $f(x) = (x - 1)^2$, $f'(x) = 2(x - 1)$, $x > 3$. **9.9.4.** $f(x) = 1$, $f'(x) = 0$, $|x| > 1$. **9.9.5.** $-1{,}5$. ● Так как нас интересует поведение функции в окрестности точки $x_0 = 2{,}5$, то можно считать, например, что $x > 2$; поэтому $\sqrt{4x^2 + 12x + 9} = \sqrt{(2x + 3)^2} = |2x + 3| = 2x + 3$, $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \sqrt{(2x - 3)^2} = |2x - 3| = 2x - 3$. **9.9.6.** $2{,}25$. ● Воспользоваться равенствами $f(x) = \frac{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)}{(1 - x\sqrt{x})(x + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)}{(1 - \sqrt{x})(x + \sqrt{x} + 1)\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} = \frac{1}{1 - x}$. **9.9.7.** -3. ● Учесть, что

$$\left(1 + \frac{4}{x - 2}\right)\left(x - 4 + \frac{4}{x}\right) - 3 = \frac{x + 2}{x - 2} \cdot \frac{(x^2 - 4x + 4)}{x} - 3 = \frac{(x + 2)(x - 2)^2}{x(x - 2)} - 3 =$$

$$= \frac{(x + 2)(x - 2)}{x} - 3 = \frac{x^2 - 4 - 3x}{x} = \frac{(x - 4)(x + 1)}{x}.$$

9.10.1. Точка $(6; 3)$. ☐ Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка на данной кривой, а $d(x) = AM = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2}$ — расстояние между точками A и M.

Учитывая, что $y = \dfrac{9}{x-3}$, получим $d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + \dfrac{81}{(x-3)^2}}$. Таким образом, нам необходимо найти точку минимума функции $d^2(x) = (x-3)^2 + \dfrac{81}{(x-3)^2}$ на отрезке $[4; 7]$, или точку минимума функции $f(t) = t + \dfrac{81}{t}$ (после замены $t = (x-3)^2$) на отрезке $[1; 16]$. Так как $f'(x) = 1 - \dfrac{81}{t^2} = \dfrac{t^2 - 81}{t^2}$, то $t = 9$ — критическая точка на отрезке $[1; 16]$. Сравнивая $f(1) = 82$, $f(9) = 18$ и $f(16) = 21\frac{1}{16}$ находим точку минимума $t = 9$, откуда $x = 6$, $y = \dfrac{9}{6-3} = 3$.

Итак, $M(6; 3)$ — искомая точка. ■

9.10.2. 1,6. ● Найти минимум функции $f(x) = (MN)^2 = x^2 + (x^2 - 2{,}81)^2$, где $N(x, x^2)$ — произвольная точка на графике функции $y = x^2$. **9.10.3.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

9.10.4. 1. ● Найти минимум функции $f(x) = x^2 + x + e^{-x}$. Решая уравнение $f'(x) = 0$, т. е. $2x + 1 = e^{-x}$, доказать, что $x = 0$ — единственный корень, учитывая монотонность функций $2x + 1$ и e^{-x}.

9.10.5. $\dfrac{2\sqrt{267}}{9}$. ● Учитывая, что $|x|^2 = x^2$, найти минимум функции $f(x) = (MN)^2 = (x+4)^2 + x^2(4-x)$, где $N(x, |x|\sqrt{4-x})$ — произвольная точка на данной кривой. **9.10.6.** 2. ● Учитывая, что ОДЗ данной функции — отрезок $[-2; 2{,}5]$, найти на этом отрезке минимум функции $f(x) = (MN)^2 = x^2 + (10 + x - 2x^2)$, где $N(x, \sqrt{10 + x - 2x^2})$ — произвольная точка на кривой.

9.11.1. 7. □ Найдем критические точки функции $y(x)$. $y' = 3(x-a)^2 - 3$, откуда $y' = 0 \iff 3(x-a)^2 - 3 = 0 \iff (x-a)^2 = 1 \iff x - a = \pm 1 \iff x = a \pm 1$. При переходе через точки $x_1 = a + 1$ и $x_2 = a - 1$ производная $y'(x)$ меняет знак, т. е. x_1 и x_2 — точки экстремума. Учитывая, что по условию $x = 6$ — точка экстремума, найдем $x_1 = 6$ или $x_2 = 6$, т. е. $a = 5$ или $a = 7$. Наибольшее значение a равно 7. ■

9.11.2. −1. **9.11.3.** $-\frac{1}{2}$. **9.11.4.** 0,4. ● Пусть $M(x_0, f(x_0))$, где $f(x) = -\dfrac{10}{x}$ — искомая точка касания. Тогда уравнение касательной, проходящей через эту точку, имеет вид $y = \dfrac{10}{x_0} + \dfrac{10}{x_0^2}(x - x_0)$ или $y = \dfrac{10}{x_0}x - \dfrac{20}{x_0}$. Поскольку полученное уравнение должно совпасть с уравнением прямой $y = ax + 4$, то $\dfrac{10}{x_0^2} = a$ и $-\dfrac{20}{x_0} = 4$, откуда $x_0 = -5$ и, следовательно, $a = \dfrac{2}{5}$. **9.11.5.** −23,25.

9.11.6. 1,92. ● $y' = 3x^2 - 4{,}8x + c$. Корень x_0 уравнения $y' = 0$ в данном случае не будет точкой экстремума функции y, если функция y' в этой точке не меняет знак, т. е. если дискриминант уравнения $3x^2 - 4{,}8x + c = 0$ будет равен нулю. **9.11.7.** −23. ● См. указание к задаче 9.11.4. **9.11.8.** $m \in (0; 28)$. ● Задача сводится к нахождению таких значений m, при которых неравенство $f'(x) > 0$, т. е. $x^2 - (m+2)x + 8m + 1 > 0$, будет справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$.

9.11.9. $a = 2$, $S = 8$. ● Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Тогда, учитывая условие существования различных корней (т. е. $\frac{1}{4}D = a^2 - (2a^2 - 6a + 8) = -a^2 + 6a - 8 > 0$) и теорему Виета, найти минимум функции $S(a) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2a)^2 - 2 \cdot (2a^2 - 6a + 8)$ на множестве допустимых значений a.

9.12.1. $-0{,}6$. □ Поскольку $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, то $f'(\alpha) = -\cos\alpha$. Выражая теперь $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, получим

$$f'(\alpha) = -\frac{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = -\frac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1 - \dfrac{1}{4}}{1 + \dfrac{1}{4}} = -\frac{3}{5}. \blacksquare$$

9.12.2. 12,25. ● Точка максимума $x_0 = 4$, $f(x_0) = f(4) = 6$, поэтому уравнение касательной в точке максимума имеет вид $y = 6$. Уравнение другой касательной $y = 2x - 1$. Далее найти площадь искомого треугольника, учитывая, что он прямоугольный. **9.12.3.** $f'(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ при } x > 1, \\ x - 1 \text{ при } x < 1, \\ \text{не определена при } x = 1. \end{cases}$

● Отдельно рассмотреть случаи $x > 1$, т. е. $f(x) = x - 1 + \frac{x^2}{2}$ и $x < 1$, т. е. $f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$. **9.12.4.** 0. ● Заметить, что $y(x) = x\left(x^2 + \frac{4}{3}\right) < 0$ при $x < 0$; $y(x) = x\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) < 0$ при $0 < x \leqslant 1{,}1$ (так как $1{,}1 < \frac{2}{\sqrt{3}}$) и $y(0) = 0$.
9.12.5. $f_{\max} = \frac{1}{4}$; $f_{\min} = -12$. ● Отдельно рассмотреть случаи $-4 \leqslant x < 0$ (при этом $f(x) = -x^2 - 7x - 12$) и $0 \leqslant x \leqslant 3$ (при этом $f(x) = -x^2 + 7x - 12$).
9.12.6. $(-\infty; \infty)$. ● Рассматривая отдельно случаи $x > 1$ и $x < 1$, показать что $f'(x) > 0$ для всех $x \neq 1$. **9.12.7.** 78. ● Учесть, что $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \geqslant 0$ при $x \in [3; 4]$ и $x^2 - x - 6 \leqslant 0$ при $x \in [-4; 3]$. **9.12.8.** $(2+\sqrt{3})\sqrt[3]{4V^2}$. ● Обозначив через x — длину стороны основания призмы, а через h — ее высоту, и учитывая, что объем призмы $V = S \cdot h = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}h = V$, получим $h = \frac{2V}{3\sqrt{3}x^2}$. Отсюда сумма длин всех ребер призмы равна $f(x) = 12x + 6h = 12x + \frac{4V}{\sqrt{3}x^2}$. Далее исследовать функцию $f(x)$ на минимум. **9.12.9.** Множество критических точек — отрезок $[-1; 1]$, при этом на концах этого отрезка y' не существует.

$$y = \begin{cases} 2x \text{ при } x \geqslant 1, \\ 2 \text{ при } -1 \leqslant x < 1, \\ -2x \text{ при } x < -1. \end{cases}$$ ● Воспользоваться равенствами

$$y = \sqrt{1 + 2x + x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = |x+1| + |x-1|.$$

Далее рассмотреть случаи $x \geqslant 1$, $-1 \leqslant x < 1$ и $x < -1$.
9.12.10. 18. ● Исходная система равносильна следующей

$$\begin{cases} \dfrac{6 - x}{x + 3} \geqslant 0, \\ -3 \leqslant x - 4 \leqslant 3, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} -3 < x \leqslant 6, \\ 1 \leqslant x \leqslant 7, \end{cases}$$

или $1 \leqslant x \leqslant 6$. Далее найти наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[1; 6]$.
9.12.11. $\frac{1}{4}$. ● Обозначив $t = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, найти наибольшее значение функции

$f(t) = \dfrac{t}{4t^2+1}$ на отрезке $[-1; 1]$. Учитывая, что $f(t) \leqslant 0$ при $t \leqslant 0$, достаточно найти наибольшее значение этой функции на $(0; 1]$. **9.12.12.** ОДЗ — множество $(-\infty; \infty)$; функция $f(x)$ — ни четная, ни нечетная; возрастает на интервалах $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$, убывает на интервале $(1; 3)$; $x = 3$ — точка минимума, $f(3) = -28$, $x = 1$ — точка максимума, $f(1) = 0$; $(0; -1)$ — точка пересечения с осью Oy, $(1; 0)$ и $(x_0, 0)$, где $3 < x_0 < 4$, — точки пересечения с осью Ox. График функции изображен на рис. 4.

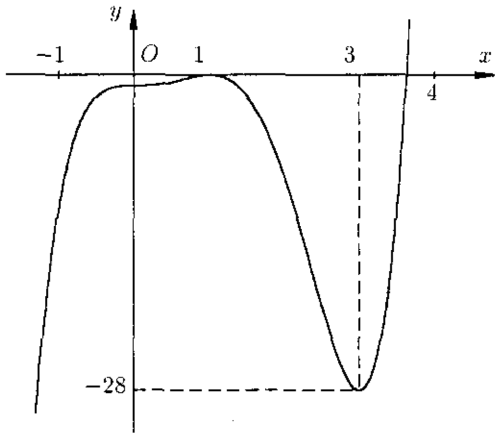


Рис. 4

9.13.1. $\frac{4}{3}$ при $0 < a \leqslant 2$ и $\dfrac{-a^3+3a^2}{3}$ при $a > 2$. □ $y' = (x-a)^2 + 2(x-a)$, поэтому $y' = 0 \iff x_1 = a$ или $x_2 = a-2$. Если $a > 2$, то $x_1 > 2$ и $x_2 > 0$, следовательно, обе критические точки x_1 и x_2 не принадлежат данному отрезку $[-2; 0]$, и максимум y достигается на одном из концов отрезка, в точке 0. Таким образом, в случае $a > 2$ получаем $y_{\max} = y(0) = \dfrac{-a^3+3a^2}{3}$. Если же $0 < a \leqslant 2$ (по условию $a > 0$), то только $x_2 = a-2 \in [-2; 0]$. Поскольку при $x < x_2$ выполнено $x - a < -2$ и, значит $y' = (x-a)^2 + 2(x-a) > 0$, то слева от точки x_2 функция y возрастает. При $x_1 > x > x_2$ имеем $y' < 0$, т. е. в случае $0 < a \leqslant 2$ получаем $y_{\max} = y(x_2) = y(a-2) = \frac{4}{3}$. ■

9.13.2. $\left(\frac{e}{6}\right)^6$. ● *При $a \leqslant 0$ решений нет, т. к. обе части исходного уравнения* имеют разные знаки. Пусть далее $a > 0$ и $x > 0$. При $x > 0$ исходное уравнение равносильно уравнению $\ln ax^6 = x$, т. е. $6\ln x = x - \ln a$. Последнее уравнение имеет единственное решение, если прямая $y = x - \ln a$ касается графика функции $y = 6\ln x$ при $x > 0$, т. е. если $6\ln x = x - \ln a$ и $(6\ln x)' = (x - \ln a)'$ в точке касания $x = x_0$, $x_0 > 0$. Отсюда $x_0 = 6$, $a = \left(\frac{e}{6}\right)^6$.

9.13.3. $\frac{7}{4}$. ● Пусть $A(0; b)$ — искомая точка на оси Oy. Две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через точку A, имеют уравнения $y = kx + b$ и $y = -\frac{1}{k}x + b$. Поскольку каждая из этих прямых по условию должна иметь единственную точку пересечения с параболой $y = x^2 - 2x + 3$, то каждое из уравнений $kx + b = x^2 - 2x + 3$ и $-\frac{1}{k}x + b = x^2 - 2x + 3$ имеет единственный корень. Осталось приравнять к нулю дискриминанты полученных квадратных уравнений, найти b, а затем проверить, что найденные прямые — действительно касательные. **9.13.4.** $\left(\frac{3}{2}; -1\right)$. ● Пусть $M(x_0; y_0)$ — искомая точка. Так как точка M лежит на прямой $2x - 3y = 6$, или $y = \frac{2}{3}x - 2$, то $y_0 = \frac{2}{3}x_0 - 2$, т. е. $M\left(x_0, \frac{2}{3}x_0 - 2\right)$. Две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через точку M, имеют уравнения $y - \left(\frac{2}{3}x_0 - 2\right) = k(x - x_0)$ и $y - \left(\frac{2}{3}x_0 - 2\right) = -\frac{1}{k}(x - x_0)$. Далее, см. указание к задаче 9.13.3. **9.13.5.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

● Провести касательную ($y = -x+2$) к параболе $y = x^2 - 5x + 6$, параллельную данной прямой $y = -x + 1$ (см. рис. 5). Далее доказать, что отрезок AB, где A — точка касания, а B — основание перпендикуляра, опущенного из т. A на данную прямую, не больше любого отрезка MN, где N — точка на параболе, а M — точка на прямой $y = -x + 1$.

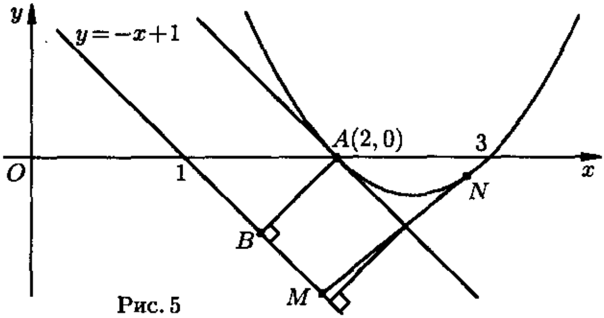


Рис. 5

9.13.6. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. ● Преобразовать уравнение второй линии к виду $(x-9)^2 + (y-6)^2 = 20$, это уравнение окружности радиуса $2\sqrt{5}$ с центром в точке $O(9; 6)$. Далее доказать, что отрезок AB наименьшей длины лежит на прямой OB. Осталось найти такую точку A на параболе $y = \frac{x^2 - 12x}{8}$, чтобы расстояние OA было наименьшим. **9.13.7.** $\frac{4\sqrt{3}}{27}$. ● Обозначив угол наклона бокового ребра пирамиды через x, выразить объем пирамиды $V(x) = \frac{2}{3}\sin x \cos^2 x$. Далее найти максимум $V(x)$ на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Планиметрия

10.1.1. $4\sqrt{11}$ см^2. □ Пусть медианы AD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 1), $AB = 6$ см, $BC = 8$ см. Обозначим $OE = x$, $OD = y$. Тогда по свойству медиан треугольника $AO = 2y$, $BO = 2x$ и из прямоугольных треугольников AOE и BOD: $x^2 + 4y^2 = 9$, $y^2 + 4x^2 = 16$. Решив полученную систему уравнений, найдем $x = \sqrt{\frac{11}{3}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ и $S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2y = 2xy = 2\sqrt{\frac{11}{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{11}$ см^2. Поскольку треугольники ABC и AOC имеют общее основание AC, а высота треугольника ABC, проведенная к стороне AC, в 3 раза больше соответствующей высоты треугольника AOC, то $S_{ABC} = 3S_{AOC} = 3 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{11} = 4\sqrt{11}$ см^2. ■

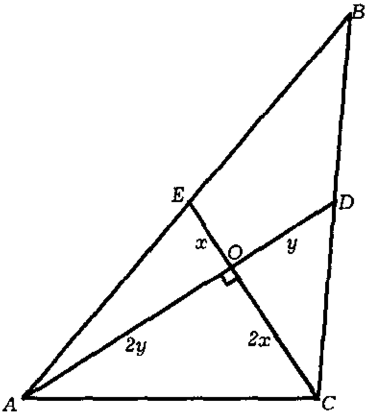


Рис. 1

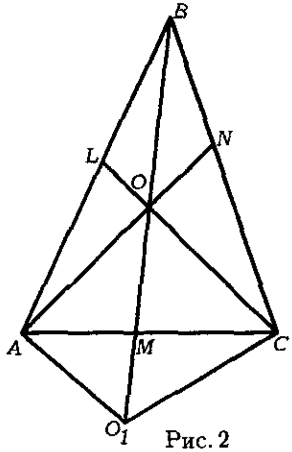


Рис. 2

10.1.2. 720 см^2. ● Найти площадь треугольника AOB, предварительно определив его стороны. Учесть, что $S_{ABC} = 3S_{AOB}$.

10.1.3. 8 см^2. □ Обозначим через O точку пересечения медиан треугольника ABC, а через N, M, L — середины сторон BC, CA, AB соответственно (рис. 2). Отложим на прямой BM от точки M отрезок MO_1, равный MO. Тогда $AO = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$, $AO_1 = CO = \frac{2}{3}CL = 2$, $OO_1 = BO = \frac{2}{3}BM = \frac{10}{3}$ и площадь треугольника AOO_1 можно найти по формуле Герона:

$$S_{AOO_1} = \sqrt{4 \cdot 2\left(4 - \frac{10}{3}\right)\left(4 - \frac{8}{3}\right)} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\text{ см}^2,$$

Но $S_{AOO_1} = S_{AOC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, поэтому $S_{ABC} = 3S_{AOO_1} = 8$ см^2. ■

10.1.4. $4\sqrt{7}$, $2\sqrt{91}$. ● Применить метод, использованный в решении предыдущей задачи. **10.1.5.** Нет. ● Применить теорему косинусов. **10.1.6.** $\sqrt{b(b+c)}$. ● Использовать свойство биссектрисы треугольника и теоремы косинусов для треугольника ABC. **10.1.7.** 235,2 см^2. ● Выразить длину биссектрисы через длины сторон, образующих угол, который данная биссектриса делит пополам, и величину этого угла. **10.1.8.** Точка D должна совпадать с основанием высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. **10.1.9.** $\arcsin\frac{3}{5}$, $\arcsin\frac{4}{5}$, $90°$. ● Пусть $BD = x$. Тогда $BC = 4x$, $AC = 5x$ и $AB^2 + BC^2 = AC^2$, откуда $\angle ABC = 90°$. **10.1.10.** 200 *см*^{2}. **10.1.11.** 13 *см*, 15 *см*. **10.1.12.** $\frac{72}{13}$ *см*, $\frac{84}{13}$ *см*. **10.1.13.** 3 см или 6 см. **10.1.14.** $\frac{5}{\sqrt{7}}R$. **10.1.15.** 8. ● См. решение задачи 10.1.1.

10.1.16. 6 см. **10.1.17.** $\frac{1}{2}|\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C|$. **10.1.18.** $2(\sqrt{7}+4)$. **10.1.19.** $\sqrt{6}$ см, $3\sqrt{2}$ см. **10.1.20.** $\sqrt{3}$. **10.1.21.** $\sqrt{5}$. ● См. решение задачи 10.1.1.

10.1.22. $a\frac{\sqrt{2}}{2}$. □ Пусть отрезок KL, параллельный основанию BC треугольника ABC, делит его площадь пополам (рис. 3). Проведем $AP \perp KL$, $KE \perp BC$ и обозначим $KE = h_1$, $AP = h_2$, $KL = x$. Поскольку площадь треугольника AKL равна площади трапеции $BKLC$, то $\frac{1}{2}(a+x)h_1 = \frac{1}{2}xh_2$, $ah_1 + xh_1 = xh_2$, $x(h_2 - h_1) = ah_1$, $x = \frac{ah_1}{h_2 - h_1}$. С другой стороны, из подобия треугольников AKL и ABC выводим $\frac{h_2}{h_1 + h_2} = \frac{x}{a}$, откуда

$$x = \frac{ah_2}{h_1 + h_2} = \frac{ah_1}{h_2 - h_1}, \quad h_2^2 - h_1h_2 = h_1^2 + h_1h_2.$$

Положим $\frac{h_1}{h_2} = y$. Тогда, разделив обе части последнего уравнения на h_1^2, получим $y^2 - 2y - 1 = 0$, откуда $y = 1 + \sqrt{2}$ и

$$x = \frac{ah_1}{h_2 - h_1} = \frac{a}{(h_2/h_1) - 1} = \frac{a}{1 + \sqrt{2} - 1} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad ■$$

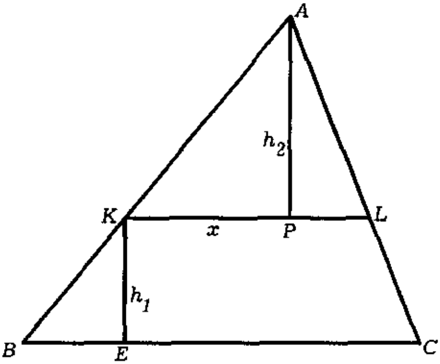


Рис. 3

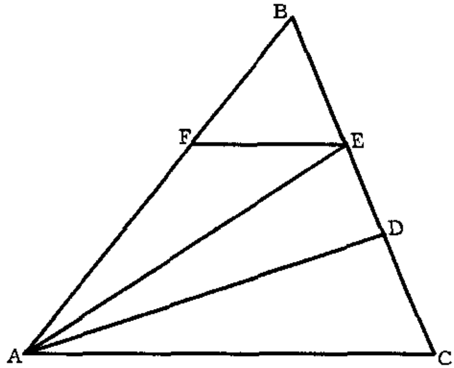


Рис. 4

10.1.23. 3 : 2. ● Провести через точку A прямую, параллельную MN. **10.1.24.** 16,9. ● Применить теоремы синусов и косинусов. **10.1.25.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$ см^2. **10.1.26.** 2,25. **10.1.27.** 13, 14, 15.

10.1.28. $4(1-\alpha)$. □ Обозначим площадь треугольника ABC через S (рис. 4). Так как $CD : BC = \alpha$, то $S_{ADC} = \alpha A_{ABC} = \alpha S$, $EC = 2CD = 2\alpha BC$, $BE = BC - EC = (1-2\alpha)BC$ и $S_{FBE} = (1-2\alpha)^2 S$, откуда $S_{ACEF} = S_{ABC} - S_{FBE} = S - (1-2\alpha)^2 S = 4\alpha(1-\alpha)S$. Окончательно получаем

$$\frac{S_{ACEF}}{S_{ADC}} = \frac{4\alpha(1-\alpha)S}{\alpha S} = 4(1-\alpha). \quad ■$$

10.1.29. $\sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{5}}$. **10.1.30.** $\frac{a^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **10.1.31.** 1020, 40. **10.1.32.** 20.

10.1.33. $13 + \sqrt{41}$. **10.1.34.** $\frac{1}{9}S$. **10.1.35.** $\dfrac{a^2(\sqrt{3}-1)}{4}$. **10.1.36.** 7,5 см.

10.1.37. 6. ● Применить теорему синусов к треугольнику BCD и теорему косинусов к треугольнику ABD.

10.1.38. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. □ Пусть M — середина стороны BC (рис. 5), $\angle AMC = \angle ADC = 90^\circ$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр AC, но тогда AM — медиана и высота треугольника ABC, откуда $AB = AC = 1$, $AD = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}$. Из прямоугольного треугольника ADC имеем $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot CD = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. ■

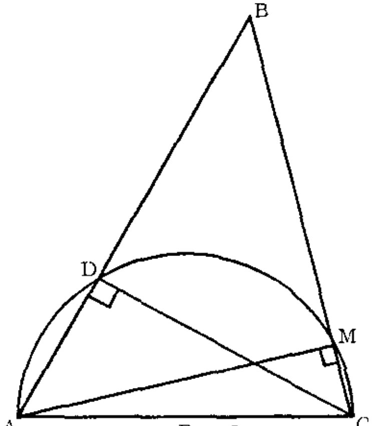


Рис. 5

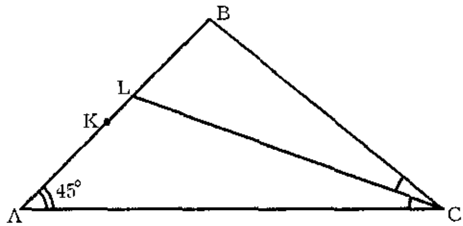


Рис. 6

10.1.39. $2\sqrt{\frac{19}{3}}$. **10.1.40.** 2,4. **10.1.41.** $\frac{5\sqrt{6}}{2}$. ● Найти по теореме косинусов косинус угла BAC, затем определить синус того же угла и воспользоваться свойством биссектрисы треугольника. **10.1.42.** 4 : 5. ● Через точку K провести прямую, параллельную AN. **10.1.43.** 28. **10.1.44.** 5 : 6. **10.1.45.** 2,5.

10.1.46. $\dfrac{4-\sqrt{2}}{6}$. □ Поскольку точка L равноудалена от прямых AC и BC, а точка K — от вершин A и B (рис. 6), то CL — биссектриса угла ACB, а K — середина стороны AB. Отсюда находим $AL = AK + KL = 7 + 1 = 8$, $BL = BK - KL = 7 - 1 = 6$. По теореме синусов $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sin B}{\sin 45^\circ}$, а по свойству биссектрисы треугольника $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AL}{LB} = \dfrac{8}{6}$, т. е. $\dfrac{\sin B}{\sin 45^\circ} = \dfrac{4}{3}$ и $\sin B > \sin 45^\circ$, откуда $\angle B > 45^\circ$ и $\angle B + \angle A > 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$. Из последнего неравенства следует, что $\angle C = 180^\circ - \angle B - \angle A < 90^\circ$.

Так как $\sin B = \frac{4}{3}\sin 45^\circ = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ и угол B — тупой, то $\cos B = -\sqrt{1 - \frac{8}{9}} = -\frac{1}{3}$. Осталось найти синус угла ACB:

$$\sin C = \sin(180^\circ - 45^\circ - B) = \sin(45^\circ + B) = \sin 45^\circ\cos B + \sin B\cos 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}(-1 + 2\sqrt{2}) = \frac{4-\sqrt{2}}{6}. \quad ■$$

10.1.47. $\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{5}}$. **10.1.48.** 25. • Использовать подобие прямоугольных треугольников ABE и BCD. **10.1.49.** 6. **10.1.50.** $\frac{25\sqrt{15}}{64}$. **10.1.51.** $\frac{3\sqrt{10}}{4}$.

10.1.52. $\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2\alpha$. □ По теореме синусов $AC = 2R\sin B = 1$, отсюда радиус R описанной окружности треугольника ABC равен $\dfrac{1}{2\sin B} = \dfrac{1}{2\sin(90^\circ-\alpha)} = \dfrac{1}{2\cos\alpha}$. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 7). Так как $\angle BA_1H = \angle BC_1H = 90^\circ$, то точки B, A_1, H, C_1 лежат на одной окружности с диаметром BH. Но из прямоугольного треугольника BA_1H имеем $BH = \dfrac{BA_1}{\cos\angle HBA_1} = \dfrac{AB\cos B}{\cos(90^\circ-C)} = \dfrac{2R\sin C\cos B}{\sin C} = 2R\cos B = 2R\cos(90^\circ-\alpha) = 2R\sin\alpha$ и радиус R_1 описанной окружности треугольника A_1BC_1 равен $\frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha = R\sin\alpha$, откуда $S = \pi R_1^2 = \pi R^2\sin^2\alpha = \frac{\pi}{4}\cdot\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2\alpha$. ■

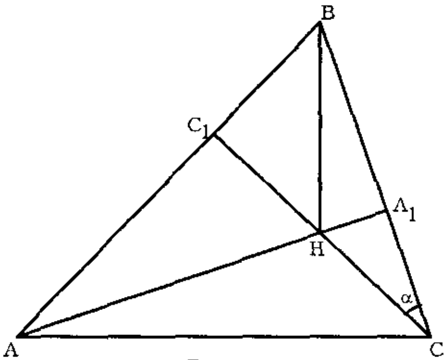


Рис. 7

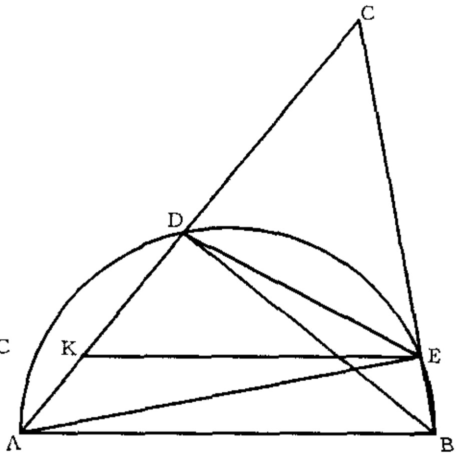


Рис. 8

10.1.53. 30°.

10.1.54. 45°, 60°, 75°. □ Так как четырехугольник $ABED$ вписанный (рис. 8), то $\angle DEB + \angle CAB = 180^\circ$, но $\angle DEB + \angle CED = 180^\circ$, откуда $\angle CED = \angle CAB$. Итак, в треугольниках DEC и ABC угол DCE общий и $\angle CED = \angle CAB$, поэтому эти треугольники подобны с коэффициентом подобия $k = \dfrac{CD}{BC} = \cos C = \sqrt{\dfrac{S_{DEC}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $\angle C = 45^\circ$. Проведем $KE \parallel AB$. Тогда $\angle DEK = 15^\circ = \angle CEK - \angle CED = \angle CBA - \angle CAB = \angle B - \angle A$ и $\angle B = \angle A + 15^\circ$, поэтому

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle A + 15^\circ + 45^\circ = 180^\circ, \quad 2\angle A = 120^\circ,$$
$$\angle A = 60^\circ, \quad \angle B = \angle A + 15^\circ = 75^\circ. \quad ■$$

10.1.55. 40°, 60°, 80°. **10.1.56.** $\dfrac{c^2\sin(\alpha+\gamma)\sin\alpha}{2\sin\gamma}$. **10.1.57.** $\dfrac{R^2}{a}$.

10.1.58. $\dfrac{\sqrt{4s^2-2b^2s\sin 2\alpha+b^4\sin^2\alpha}}{b\sin\alpha}$. **10.1.59.** $\sqrt{pq}$. **10.1.60.** 60. **10.1.61.** $\sqrt{14}$.

10.1.62. $\dfrac{nc}{m}$. **10.1.63.** $\sqrt{a(a+b)}$. **10.1.64.** 3. **10.1.65.** 9. **10.1.66.** $\dfrac{7}{8}$. **10.1.67.** 10. **10.1.68.** 170. **10.1.69.** 5,3. **10.1.70.** $\sqrt{137}$. **10.1.71.** $\dfrac{17}{15}$. **10.1.72.** 1.

10.2.1. $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}}$ см, $\dfrac{6}{\sqrt[4]{5}}$ см, $\dfrac{6}{\sqrt[4]{5}}$ см. □ Так как $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\dfrac{\frac{1}{2}BD\cdot AD}{\frac{1}{2}CD\cdot AD}=\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{4}{2}=2$, то $BD=2\cdot CD=2x$ и $AB=BC=3x$ (рис. 9).

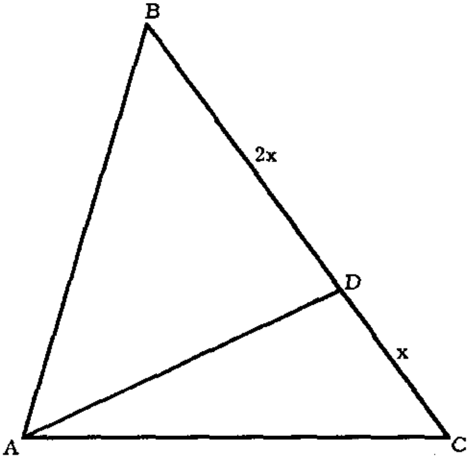


Рис. 9

Тогда из прямоугольного треугольника ABD находим $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=$ $=\sqrt{9x^2-4x^2}=\sqrt{5}x$ и $S_{ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD=\frac{1}{2}\sqrt{5}x\cdot 2x=\sqrt{5}x^2=4$, откуда $x=\sqrt{\dfrac{4}{\sqrt{5}}}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}$, $AB=BC=3x=\dfrac{6}{\sqrt[4]{5}}$ см, $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{5x^2+x^2}=$ $=\sqrt{6}x=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}}$ см. ■

10.2.2. $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt[4]{15}}$, $\dfrac{4\sqrt{6}}{\sqrt[4]{15}}$, $\dfrac{4\sqrt{6}}{\sqrt[4]{15}}$. ● Использовать свойство биссектрисы треугольника.

10.2.3. $\dfrac{ah}{(a+\sqrt{a^2+h^2})}$, $\dfrac{2a(\sqrt{a^2+h^2}-a)^2}{h^2}$. **10.2.4.** $2\sqrt[4]{\dfrac{S_2^2(S_1+S_2)^2}{(4S_1^2-S_2^2)}}$. ● Использовать свойство биссектрисы треугольника. **10.2.5.** $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}\right)$. ● Применить теорему синусов к треугольнику ABD. **10.2.6.** $\dfrac{ab}{a+b}\sqrt{\dfrac{a+2b}{b}}$. **10.2.7.** $\dfrac{m}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **10.2.8.** $\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi-\varphi}{4}$. **10.2.9.** $\dfrac{2a^3}{(a^2-4r^2)}$. **10.2.10.** $\dfrac{\sqrt{7}a}{3}$. **10.2.11.** 24 см.

10.2.12. 14. **10.2.13.** $\dfrac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{(2a+\sqrt{4b^2-a^2})}$ $(0 < \frac{a}{2} < b)$.

10.2.14. $\arcsin\left(\dfrac{\cos(\alpha/2)}{\sqrt{5-4\cos\alpha}}\right)$. **10.2.15.** 6. **10.2.16.** 3. **10.2.17.** 15,5. **10.2.18.** 48.

10.2.19. $\dfrac{a^2}{(kn+mn+mk)}$. □ Обозначим основания перпендикуляров, опущенных на стороны BC, CA, AB треугольника ABC через A_1, B_1, C_1 соответственно (рис. 10).

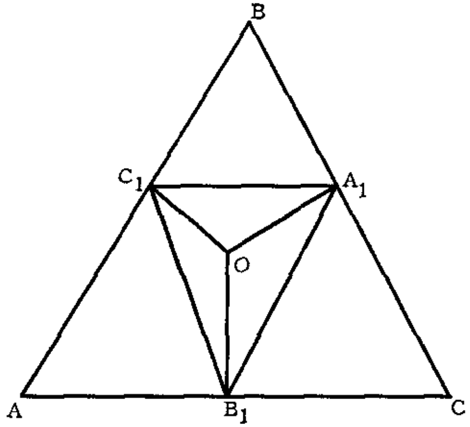


Рис. 10

Тогда $OA_1 = n$, $OB_1 = k$, $OC_1 = m$ и $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}(kn+mn+mk)\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(kn+mn+mk)$, откуда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}(kn+mn+mk)}{4}} = \frac{a^2}{kn+mn+mk}. \blacksquare$$

10.2.20. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, $\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **10.2.21.** 6.

10.2.22. $\arccos\frac{1}{8}$, $\arccos\frac{1}{8}$, $\pi - 2\arccos\frac{1}{8}$. **10.2.23.** $15R^2\frac{\sqrt{15}}{64}$.

10.2.24. $\frac{a}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}$. **10.2.25.** $3\sqrt{3}r^2$. **10.2.26.** 6,25.

10.2.27. $-\frac{5}{8}$. □ Пусть AE — биссектриса, а BD — высота равнобедренного треугольника ABC (рис. 11), пересекающиеся в точке K, $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle AKB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ как внешний угол треугольника AKD и $\cos\angle AKB =$

$$= -\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-p^2}}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\dfrac{7}{32}}{2}} = -\sqrt{\frac{25}{64}} = -\frac{5}{8}. \blacksquare$$

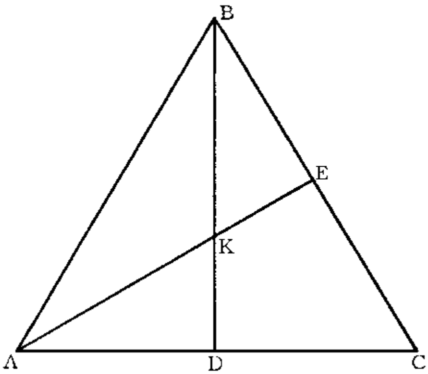


Рис. 11

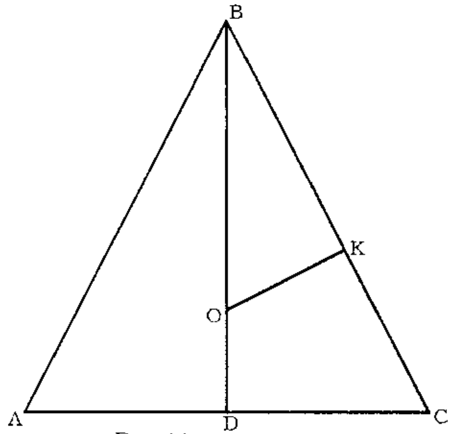


Рис. 12

10.2.28. $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$. **10.2.29.** $\frac{3\sqrt{41}}{2}$.

10.2.30. 48. □ Пусть BD — высота, O — центр вписанной окружности треугольника ABC, K — точка касания со стороной BC (рис. 12). Обозначим $BK = x$. Тогда $BO = \sqrt{OK^2 + BK^2} = \sqrt{9 + x^2}$. $CK = CD = \frac{1}{2}AC = 6$ ($CK = CD$ как отрезки касательных, проведенных к вписанной окружности из точки C) и из прямоугольного треугольника BCD находим $BD^2 + CD^2 = BC^2$ или $(\sqrt{9+x^2}+3)^2+6^2 = (6+x)^2$, откуда $x = 4$ и $BD = BO+OD = \sqrt{9+x^2}+3 = \sqrt{9+16}+3 = 8$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = CD \cdot BD = 6 \cdot 8 = 48$. ■

10.2.31. 10. **10.2.32.** 0,28. **10.2.33.** 25. **10.2.34.** $\frac{(2\sqrt{3}-3)a}{2}$. • Радиус вписанной окружности треугольника равен его площади, деленной на полупериметр.
10.2.35. 18,75. **10.2.36.** 75. **10.2.37.** $\arccos\left(-\frac{\sqrt{21}}{9}\right)$. **10.2.38.** $\frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$, $\frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$, $\frac{2mn}{\sqrt{4m^2-n^2}}$.

10.2.39. $\sqrt{\frac{(2k-3)}{(k-1)}}$. □ Обозначим $AC = b$, $AB = c$, E — середина AC. Тогда $\frac{BD+DC}{DC} = \frac{BD}{DC} + 1 = k$, $\frac{BD}{DC} = k - 1$, $\frac{c}{b} = \frac{BD}{DC} = k - 1$, но по теореме синусов из треугольника ADC имеем $DC = 2R\sin\frac{A}{2}$, где R — радиус описанной окружности треугольника ADC. Из последнего равенства $\frac{DC}{R} = 2\sin\frac{A}{2}$.

Найдем $\sin\frac{A}{2}$. Так как $\cos A = \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AC}{AB} = \frac{b}{2c} = \frac{1}{2(k-1)}$, то

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2(k-1)}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2k-3}{k-1}}$$

$$\text{и} \quad \frac{DC}{R} = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2k-3}{k-1}} = \sqrt{\frac{2k-3}{k-1}}. \quad \blacksquare$$

10.2.40. $\frac{12}{5}$. **10.2.41.** $\sqrt{\frac{7}{3}}$. **10.2.42.** $\sqrt{7}$. **10.2.43.** 11,2. **10.2.44.** 18. **10.2.45.** 24. **10.2.46.** 75. **10.2.47.** $\sqrt{93{,}6}$. **10.2.48.** $\sqrt{S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$, $\sqrt{2S\sin\alpha}$. **10.2.49.** $\frac{2r}{5}$. **10.2.50.** $\frac{24}{5}$. **10.2.51.** $4\sqrt{2}$. **10.2.52.** $\frac{3}{2}$. **10.2.53.** $\frac{39}{2}$, $\frac{39}{2}$, 15. **10.2.54.** 7. **10.2.55.** $\frac{5}{2}$. **10.2.56.** 10. **10.2.57.** 4. **10.2.58.** 6.

10.3.1. $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 2$, $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2$. **10.3.2.** 25π. **10.3.3.** $m+n$, $\frac{2mn}{(n-m)}$, $\frac{(m^2+n^2)}{(n-m)}$ $(n > m)$. **10.3.4.** 1 см. **10.3.5.** $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. **10.3.6.** 5 см. **10.3.7.** 25π см^2. **10.3.8.** 4π см^2. **10.3.9.** $\frac{R}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$. **10.3.10.** $\frac{a^2}{2}\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **10.3.11.** $\frac{3\sqrt{3}+4}{11}$. **10.3.12.** $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **10.3.13.** 5,2. **10.3.14.** $4\sqrt{3}$ см^2. **10.3.15.** $\frac{\pi\cos\alpha}{8\sin^3\alpha}$.

10.3.16. $\frac{b+\sqrt{b^2+a^2}}{2b}$.

$$\square\ \frac{S_{ADB}}{S_{AEB}} = \frac{BD}{BE} = \frac{a\sin 2\alpha}{b\sin\alpha} = \frac{2a\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{b\sin\alpha} = \frac{2a\cos\alpha}{b} \quad \text{(рис. 13).}$$

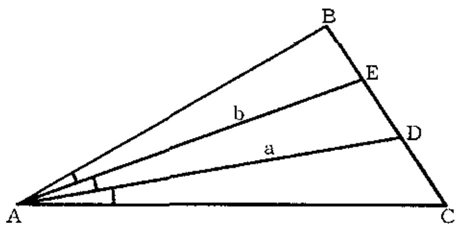


Рис. 13

Но $AB = b\cos\alpha = a\cos 2\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)a$, откуда $2a\cos^2\alpha - b\cos\alpha - a = 0$. Решив полученное квадратное уравнение относительно $\cos\alpha$, найдем $\cos\alpha = \frac{b+\sqrt{b^2+8a^2}}{4a}$, поэтому $\frac{S_{ADB}}{S_{AEB}} = \frac{2a}{b}\cdot\frac{b+\sqrt{b^2+8a^2}}{4a} = \frac{b+\sqrt{b^2+8a^2}}{2b}$. $\blacksquare$

10.3.17. 8. ● Использовать то, что два треугольника, на которые разбивает прямоугольный треугольник высота, опущенная на гипотенузу, подобны. **10.3.18.** $\sqrt{2p_1p_2} - p_1$, $\sqrt{2p_1p_2} - p_2$, $p_1 + p_2 - \sqrt{2p_1p_2}$. **10.3.19.** 2,4. **10.3.20.** 13. **10.3.21.** 29π. **10.3.22.** 19,2; 345,6. **10.3.23.** $AC = 8$, $BC = 2\sqrt{2}$, $AB = 6\sqrt{2}$. **10.3.24.** $\frac{4ab}{a+b}$. **10.3.25.** $\frac{\sqrt{5}a}{5}$, $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$. **10.3.26.** $3-\sqrt{3}$. **10.3.27.** 2. ● Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен его площади, деленной на полупериметр. **10.3.28.** 5 см, 12 см, 30 см. **10.3.29.** $\frac{120\sqrt{2}}{7}$. **10.3.30.** $\frac{3\sqrt{5}-5}{2}$; 2,5. **10.3.31.** $\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **10.3.32.** $\frac{3}{5}$. **10.3.33.** 0,8. **10.3.34.** 5. **10.3.35.** 4. **10.3.36.** 14. **10.3.37.** 12, $12\sqrt{3}$. **10.3.38.** $(\sqrt{2}-1)c$. **10.3.39.** $12\sqrt{5}$.

10.3.40. 5. **10.3.41.** 1. **10.3.42.** 9,12. **10.3.43.** $\frac{4\sqrt{17}}{17}$. **10.3.44.** $\arcsin\frac{7\sqrt{2}}{10}-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

10.3.45. 30°. □ Пусть O — центр данной окружности (рис. 14).

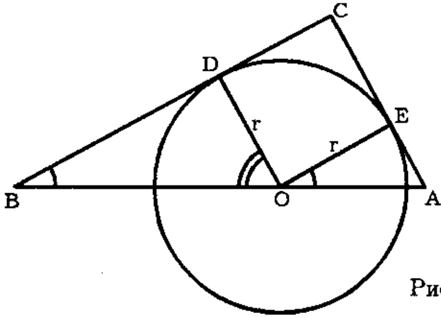


Рис. 14

Тогда $OE \perp AC$, $OD \perp BC$ и $OE = OD = CD = CE = x$. Ввиду того, что $OE \parallel BC$ и $OD \parallel AC$ треугольники AEO и ODB подобны, откуда $\frac{OE}{AE}=\frac{BD}{OD}$ или $\frac{x}{1}=\frac{3}{x}$, $x^2=3$, $x=\sqrt{3}$. Из треугольника ODB: $\operatorname{tg}\angle OBD=\frac{OD}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, т. е. $\angle ABC=\angle OBD=30^\circ$. ■

10.3.46. 10. **10.3.47.** 15. **10.3.48.** 1,5. **10.3.49.** 11,76. **10.3.50.** 1176. **10.3.51.** 168. **10.3.52.** 27. **10.3.53.** 28,8. **10.3.54.** 28. **10.3.55.** 64π см^2.

10.4.1. $\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. □ <u>I способ.</u> Обозначим через M и N середины оснований AD и BC равнобочной трапеции $ABCD$ (рис. 15), а через O — точку пересечения ее диагоналей. Пусть h — длина высоты трапеции, $h_1 = OM$, $h_2 = ON$, $AD = a$, $BC = b$. Тогда $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$, но $h=h_1+h_2=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)+\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)=$ $=\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (h_1 и h_2 нашли из прямоугольных треугольников AOM и BON), поэтому $\frac{a+b}{2}=\frac{h}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ и $S=\frac{h}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\cdot h=\frac{h^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, откуда $h=\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

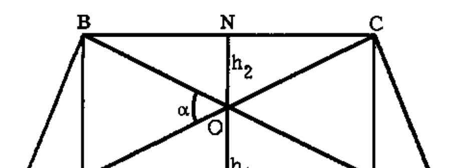


Рис. 15

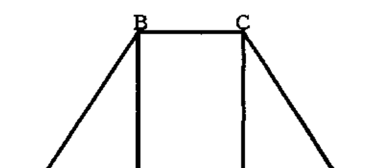


Рис. 16

<u>II способ.</u> В прямоугольном треугольнике AEC: $\angle CAE=\frac{\alpha}{2}$, поэтому $AE=$ $=CE\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=h\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, но

$$AE=AK+KE=\frac{1}{2}(2AK+2KE)=\frac{1}{2}(AK+KE+ED+BC)=\frac{1}{2}(a+b)=\frac{S}{h},$$

следовательно, $h \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{S}{h}$, откуда $h = \sqrt{S \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. ■

10.4.2. $5r^2$. □ Так как высота трапеции равна диаметру вписанной окружности, то $BC = r$ (рис. 16). Ввиду того, что трапеция равнобочная и описана около окружности, то $AB = CD$, $AE = FD = x$, $AB + CD = BC + AD$, $2AB = BC + AE + EF + FD$, $2AB = r + x + r + x = 2r + 2x$, откуда $AB = r + x$ и из прямоугольного треугольника ABE находим $AE^2 + BE^2 = AB^2$ или $x^2 + (2r)^2 = (r+x)^2$, $x^2 + 4r^2 = r^2 + 2rx + x^2$, $3r^2 = 2rx$, $x = \frac{3}{2}r$ и $AD = r + 2x = 4r$.

Окончательно, $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BE = \frac{4r + r}{2} \cdot 2r = 5r^2$. ■

10.4.3. 2. ● Продолжить боковые стороны AB и CD трапеции до пересечения в точке E.

10.4.4. $\frac{2ab}{a+b}$. □ Из подобия треугольников AMO и ABC выводим $\frac{MO}{BC} = \frac{AO}{AC}$ (рис. 17). С другой стороны, из подобия треугольников AOD и BOC получаем

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{a}{b}. \text{ Итак, } \frac{AO}{AC} = \frac{AO}{AO + OC} = \frac{\frac{AO}{OC}}{\frac{AO}{OC} + 1} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{a}{a+b} \text{ и}$$

$MO = \frac{AO}{AC} \cdot BC = \frac{a}{a+b} \cdot b = \frac{ab}{a+b}$. Точно так же найдем $ON = MO = \frac{ab}{a+b}$, поэтому $MN = MO + ON = \frac{2ab}{a+b}$. ■

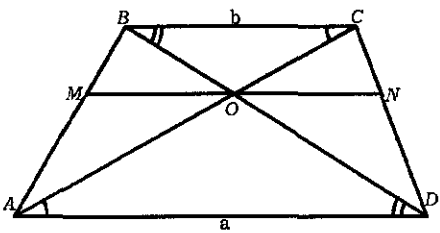


Рис. 17

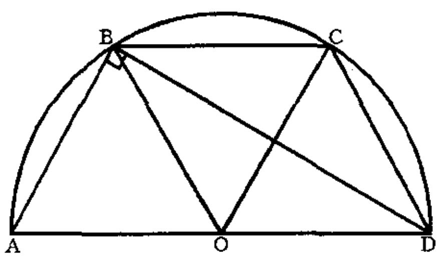


Рис. 18

10.4.5. $\frac{2(\sin\alpha + \sin\beta)}{\pi \sin\alpha \sin\beta}$. **10.4.6.** $\arcsin\frac{2}{\pi}$. **10.4.7.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. ● Использовать то, что треугольники DFC и BFA, а также DFA и LFC подобны. **10.4.8.** $\pi\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$. **10.4.9.** $3{,}6\,\text{см}^2$. ● Использовать то, что треугольник AOB прямоугольный (O — центр вписанной окружности). **10.4.10.** $20{,}4\,\text{см}^2$. **10.4.11.** $\frac{2R^2(\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$. **10.4.12.** $2h\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 1\right)$. **10.4.13.** $\frac{(a+b)^2}{4}$.

10.4.14. $\frac{h(p\sin\alpha - 2h)}{2\sin\alpha}$. **10.4.15.** $-\frac{\pi}{4\sin^3\alpha\cos\alpha}$.

10.4.16. $3\sqrt{3}\,\text{см}^2$. □ Поскольку $BD \perp AB$ и трапеция $ABCD$ равнобочная, то и $AC \perp CD$ (рис. 18). Таким образом, точки A, B, C, D лежат на окружности с диаметром AD. Так как $AB = BC = CD$, то $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$ и треугольники AOB, BOC, COD — правильные. Итак,

$S_{ABCD} = 3S_{AOB} = 3 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}\,\text{см}^2$. ■

10.4.17. $10\frac{5}{8}$. **10.4.18.** 40. **10.4.19.** 8 см. **10.4.20.** $12\sqrt{5}$. • Найти по теореме косинусов угол между диагоналями трапеции, после чего определить площадь трапеции по формуле: площадь четырехугольника равна полупроизведению длин его диагоналей на синус угла между ними. **10.4.21.** 204. • См. указание к предыдущей задаче. **10.4.22.** $2R\sqrt{2k-1}$. **10.4.23.** $\sqrt{\frac{5}{3}(l^2-c^2)}$, $\sqrt{\frac{3}{5}(l^2-c^2)}$. **10.4.24.** 75°. **10.4.25.** 80 см^2. **10.4.26.** 20. **10.4.27.** 5,15. **10.4.28.** $\frac{a^2-b^2}{2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)}$. **10.4.29.** 2 см, 8 см, 5 см, 5 см. **10.4.30.** $\frac{18\sqrt{5}}{5}$. **10.4.31.** 4 см, 16 см, 10 см, 10 см. **10.4.32.** 4π см. **10.4.33.** d^2. **10.4.34.** 120°. **10.4.35.** $\frac{1}{8}$. **10.4.36.** 12. **10.4.37.** 100. **10.4.38.** $\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}$. **10.4.39.** 2, 8, 5, 5. **10.4.40.** 6. **10.4.41.** 246,24. **10.4.42.** 3, $3\sqrt{15}$, 24, 24. **10.4.43.** 3 см или 4 см. **10.4.44.** 18 см. **10.4.45.** 48 см^2. **10.4.46.** $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

10.4.47. 9 см^2. □ Обозначим $BC = a$, $AD = 5a$, h — длина высоты трапеции (рис. 19). Тогда $S_{ABCD} = MN \cdot h = 3ah = 32$. Высоты подобных треугольников MEN и BEC относятся как 3 : 1, поэтому высота h_1 треугольника MEN равна $\frac{3}{4}\cdot\frac{h}{2} = \frac{3}{8}h$ и $S_{MEN} = \frac{1}{2}MN \cdot h_1 = \frac{1}{2}\cdot 3a \cdot \frac{3}{8}h = \frac{3}{16}\cdot 3ah = \frac{3\cdot 32}{16} = 6$ см^2. Аналогично, $S_{MKN} = 3$ см^2 и $S_{MENK} = S_{MEN} + S_{MKN} = 9$ см^2. ■

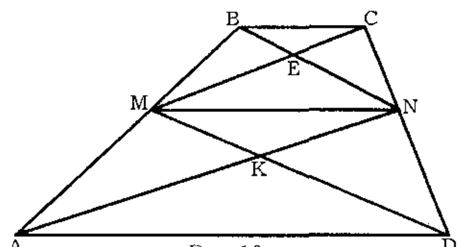


Рис. 19

10.4.48. 2 см, 14 см. **10.4.49.** 4 см. **10.4.50.** 12 см. **10.4.51.** 8 см. **10.4.52.** 5. **10.4.53.** 7. **10.4.54.** 600, 144π. **10.4.55.** 4. **10.4.56.** 168 см^2. **10.4.57.** $\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$. **10.4.58.** $8\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$. **10.4.59.** 9 см, 25 см. **10.4.60.** 60. **10.4.61.** 12,5 см. **10.4.62.** $\frac{18\sqrt{5}}{5}$. **10.4.63.** 6. **10.4.64.** $32\sqrt{2}$ см^2. **10.4.65.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **10.4.66.** 1,4 см. **10.4.67.** 1,2.

10.4.68. Нет. □ Если AC — биссектриса угла BAD и трапеция $ABCD$ равнобокая (рис. 20 а)), то $CD = AB = BC = 3$, но тогда $AB + BC = 6 = AC$, что невозможно. Если AC — биссектриса угла BCD и трапеция $ABCD$ равнобокая (рис. 20 б)), то $CD = AD = 4$, $AD^2 + CD^2 = 32 < 36 = AC^2$ и из теоремы косинусов для треугольника ACD следует, что угол ADC тупой, что невозможно, так как $AD > BC$. ■

10.4.69. Нет. **10.4.70.** 10, 30. **10.4.71.** 1,25; 5. • См. решение задачи 10.4.4. **10.4.72.** 1. • См. решение задачи 10.4.4. **10.4.73.** 48 см. **10.4.74.** $\frac{48}{5}$. **10.4.75.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$. **10.4.76.** 72. **10.4.77.** 7 см. **10.4.78.** 5. **10.4.79.** $\frac{50}{3}$. **10.4.80.** $\arccos\frac{k-1}{k}$,

$\pi - \arccos\frac{k-1}{k}$, $k > 1$. **10.4.81.** 4,5. **10.4.82.** 85,5. **10.4.83.** 2,8. **10.4.84.** 16 см. **10.4.85.** 96 см. **10.4.86.** 7. **10.4.87.** 246,24 см^2. **10.4.88.** $a^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)$. **10.4.89.** $\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}$. **10.4.90.** 128 см^2.

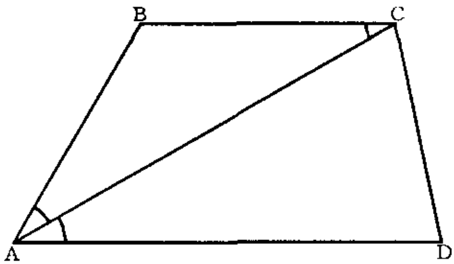


Рис. 20 а)

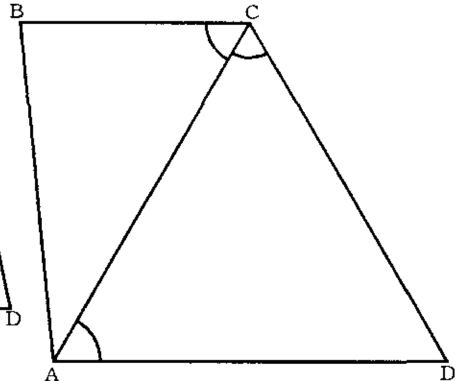


Рис. 20 б)

10.5.1. $9{,}6^2\pi$. **10.5.2.** $\frac{14}{3}$. **10.5.3.** $AE = a - \sqrt{a^2-b^2}$ $(a \geqslant b)$. **10.5.4.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$. **10.5.5.** πab. **10.5.6.** $\frac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}$. **10.5.7.** $\arcsin\frac{2}{\pi}$, $\pi - \arcsin\frac{2}{\pi}$. **10.5.8.** $\frac{5}{96}a^2$. **10.5.9.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **10.5.10.** $\pi - 2\arcsin\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$. **10.5.11.** 25 : 4. **10.5.12.** $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **10.5.13.** $4\sqrt{3}$ см^2. **10.5.14.** $\frac{\pi}{4}\sin\alpha$. **10.5.15.** $2\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})$, $\pi - 2\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})$. **10.5.16.** 7. **10.5.17.** 66. **10.5.18.** 2. **10.5.19.** 4. **10.5.20.** $\frac{a}{2}$. **10.5.21.** $\frac{9\sqrt{3}}{11}$. **10.5.22.** 8 см^2. **10.5.23.** 9. **10.5.24.** $\frac{8}{5}\sqrt{\frac{7}{19}}$. **10.5.25.** 24. **10.5.26.** $\arcsin\frac{4S}{\pi Q}$. **10.5.27.** 72 см^2. **10.5.28.** 15 см, 30 см. **10.5.29.** 24. **10.5.30.** 30°.

10.6.1. $\frac{85}{8}$ см. ● Применить теоремы синусов и косинусов. **10.6.2.** 6,25 см.

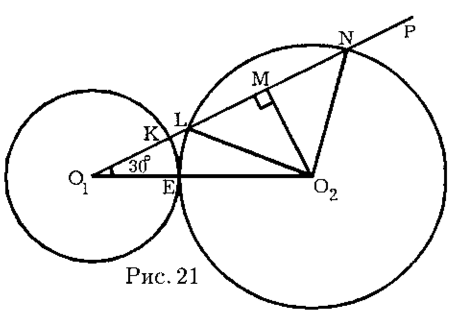


Рис. 21

10.6.3. $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$. □ Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов $\frac{R}{2}$ и R соответственно (рис. 21), K, L, N — точки пересечения данного отрезка O_1P

с окружностями, M — середина LN. Так как $\angle MO_1O_2 = 30^\circ$, а треугольник O_1O_2M прямоугольный, то $O_2M = \frac{1}{2}O_1O_2 = \frac{1}{2}(O_1E + EO_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{2} + R\right) = \frac{3}{4}R$ и из прямоугольного треугольника LMO_2 имеем $LM = \sqrt{LO_2^2 - MO_2^2} = \sqrt{R^2 - \frac{9}{16}R^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}R$, откуда $LN = 2MN = \frac{\sqrt{7}}{2}R$. Тогда

$$\frac{KL+NP}{O_1P} = \frac{O_1P - O_1K - LN}{O_1P} = \frac{2R - \frac{R}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}R}{2R} = \frac{3-\sqrt{7}}{4}. \blacksquare$$

10.6.4. $\sqrt{R^2 + b^2 - 2bR\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. ● Применить теорему косинусов к треугольнику OMC. **10.6.5.** $\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}-1)r$, $\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}+1)r$. **10.6.6.** $2(2-\sqrt{3})\pi$. **10.6.7.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)R^2$. **10.6.8.** $2\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$. **10.6.9.** $\frac{(24\sqrt{3} - 11\pi)}{6}r^2$. **10.6.10.** 2. **10.6.11.** 14. **10.6.12.** $2\sqrt{\pi}\left(1 - \frac{4}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$. **10.6.13.** а) $\frac{3\pi a^2}{4}$, б) площадь ромба меньше площади части круга, лежащей вне ромба. **10.6.14.** $2\sqrt{(R^2-a^2)(R^2-a^2\operatorname{ctg}^2\alpha)}$. ● Площадь четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями равна полупроизведению этих диагоналей. **10.6.15.** 2. ● Провести через данную точку диаметр и воспользоваться тем, что произведение отрезков хорд, проходящих через данную точку, постоянно. **10.6.16.** $8\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. **10.6.17.** 90°. **10.6.18.** 60°.

10.6.19. На диагонали AC. □ Если M лежит на продолжении AC за точку A (рис. 22), то $\angle DMA = \angle DME = 80^\circ < \angle ACD = \angle ABD = 60^\circ$, чего быть не может. Случай, когда точка M лежит на продолжении AC за точку C, рассматривается аналогично. Итак, точка M лежит на диагонали AC. ■

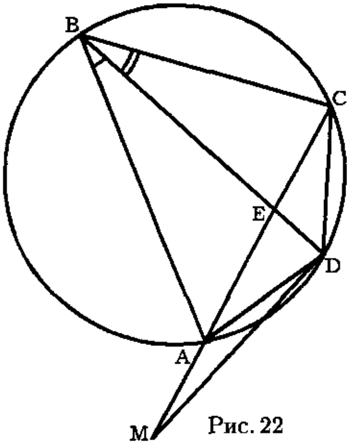


Рис. 22

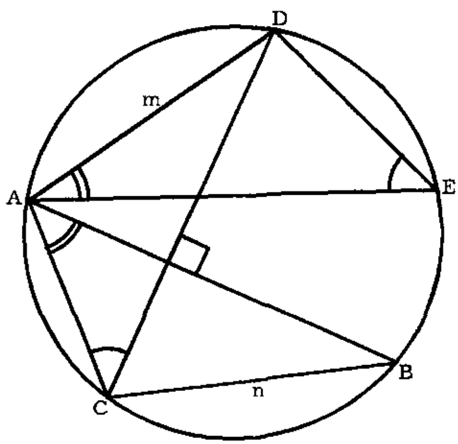


Рис. 23

10.6.20. 3 см, 4 см, 5 см. **10.6.21.** $\frac{75}{8}$. **10.6.22.** 9 : 4. ● Использовать подобие треугольников ABC и ABD. **10.6.23.** $2\arcsin\frac{5}{\sqrt{109}}$. **10.6.24.** 3. **10.6.25.** 7.

10.6.26. $\sqrt{m^2+n^2}$. □ Отложим от точки D дугу DE, равную дуге BC так, как показано на рис. 23. Тогда $\angle DAE = \angle BAC$, а $\angle AED = \angle ACD$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AD, поэтому $\angle DAE + \angle AED = \angle BAC + \angle ACD = 90^\circ$, откуда $\angle ADE = 90^\circ$ и, таким образом, AE — диаметр и $AE^2 = AD^2 + DE^2 = AD^2 + BC^2 = m^2 + n^2$, $AE = \sqrt{m^2+n^2}$. ■

10.6.27. $R\sin 2\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

10.6.28. $\sqrt{ab}$. □ Обозначим основания перпендикуляров, опущенных на прямые AB, OA, OB через D, E, F соответственно (рис. 24). Углы CAB и CBF равны, так как каждый из них измеряется половиной дуги BC (угол CAB как вписанный, а угол CBF как угол, образованный касательной OB и хордой BC). Аналогично, $\angle CBD = \angle CAE$. Отсюда следует, что $\triangle CDA \sim \triangle FBC$, $\triangle CDB \sim \triangle EAC$ (эти треугольники прямоугольные) и $\frac{CF}{CD} = \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{CE}$, т. е. $\frac{CF}{CD} = \frac{CD}{CE}$, откуда $CD = \sqrt{CE \cdot CF} = \sqrt{ab}$. ■

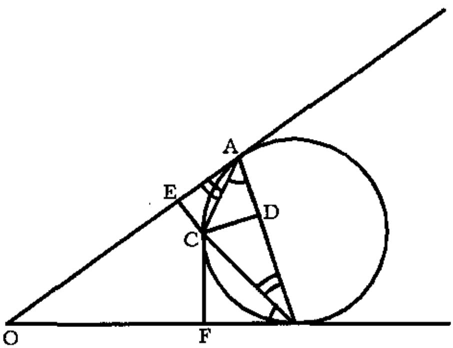


Рис. 24

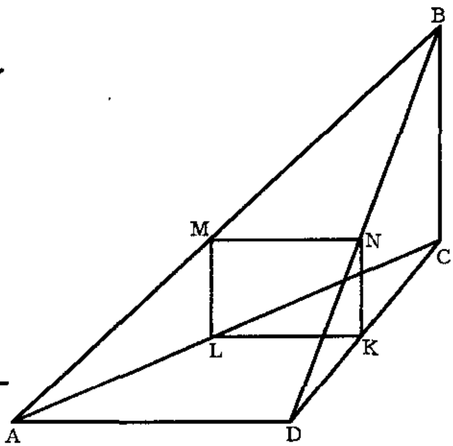


Рис. 25

10.6.29. На продолжении диагонали PR. ● См. решение задачи 10.6.19. **10.6.30.** $4\sqrt{3} + 10\pi$. **10.6.31.** 2. **10.6.32.** $4\arcsin\frac{4}{5} - \frac{48}{25}$, $4\pi - 4\arcsin\frac{4}{5} + \frac{48}{25}$.

10.6.33. 5. **10.6.34.** 4. **10.6.35.** 3. **10.6.36.** $\frac{R}{4}$. **10.6.37.** $\frac{a^2}{18}(3\sqrt{3} - \pi)$. **10.6.38.** 3.

10.7.1. 4. ● Показать, что четырехугольник $ABCD$ — ромб. **10.7.2.** $4\,\text{см}^2$. ● Показать, что четырехугольник с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника является прямоугольником. **10.7.3.** $2(\sqrt{2}-1)a^2$. **10.7.4.** 84°. **10.7.5.** $14\sqrt{6}$, 98π. **10.7.6.** 9. **10.7.7.** $\frac{8}{25}$. **10.7.8.** $14 + 6\sqrt{5}$. **10.7.9.** 180°.

10.7.10. 1 м. □ Обозначим через M, N, K, L середины отрезков AB, BD, CD, AC соответственно (рис. 25). Тогда $ML \parallel NK \parallel BC$ как средние линии треугольников BAC и BDC. Аналогично, $MN \parallel LK \parallel AD$. Поэтому параллелограмм $MNKL$ является прямоугольником и $LN = MK = 1$ м. ■

10.7.11. 90°. ● См. решение задачи 10.7.10. **10.7.12.** $0{,}045p^2$.

10.7.13. $2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$.

10.8.1. □ Пусть M — середина CD (рис. 26). Тогда $S_{ECD} = S_{ECM} + S_{EDM} = \frac{1}{2}EM \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2}EM \cdot \frac{h}{2} = EM \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (здесь h — длина высоты трапеции $ABCD$). ■

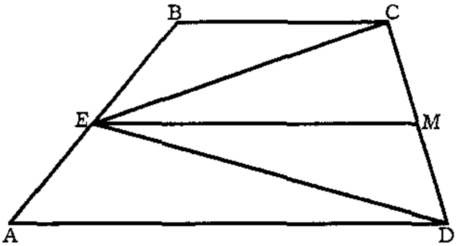


Рис. 26

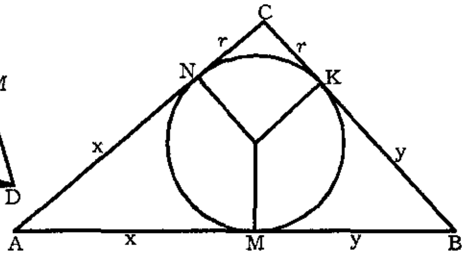


Рис. 27

10.8.2. ● Опустим из центра O окружности перпендикуляр OM на диагональ AC. Тогда $EM = MF$ как проекции равных отрезков BO и OD на AC. **10.8.3.** ● Воспользоваться тем, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. **10.8.4.** ● Боковая сторона описанной равнобедренной трапеции равна полусумме ее оснований, а диаметр вписанной окружности равен высоте трапеции. **10.8.8.** □ Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC, r — ее радиус, M, N, K — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, AC, CB соответственно (рис. 27). Поскольку отрезки касательных, проведенных к окружности из одной и той же точки, равны, то $AM = AN = x$, $BM = BK = y$, $CN = CK = r$ (четырехугольник $CKON$ — квадрат). Далее

$$S_{ABC} = S = \frac{1}{2}AC \cdot CB = \frac{1}{2}(x+r)(y+r) = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}(x+y+r)r = \\ = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}pr = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}S,$$

откуда $xy = S$. ■

10.8.11. □ Обозначим $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ (рис. 28).

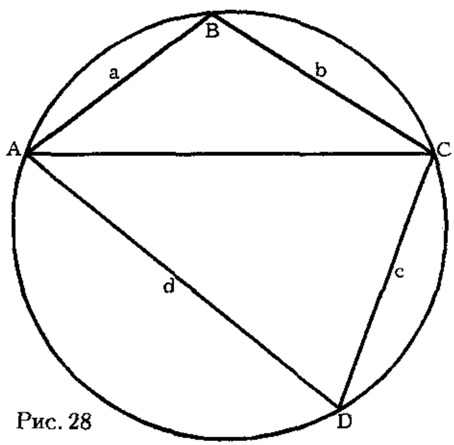


Рис. 28

Тогда по условию $d - b = a - c$, а из того, что четырехугольник $ABCD$ описанный — $d + b = a + c$. Сложив эти два равенства, получим $2d = 2a$, $d = a$, откуда следует, что и $b = c$ и, таким образом, треугольники ABC и ADC равны по трем сторонам, но тогда $\angle ABC = \angle ADC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ADC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$, т. е. AC — диаметр описанной окружности. ■

10.9.1. 1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 30°, 30°, 120°. □ Обозначим величины углов KML, MLK, LKM треугольника KLM через α, β, γ соответственно (рис. 29).

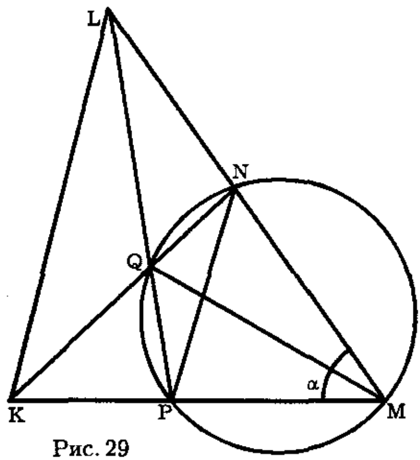


Рис. 29

Тогда $\angle PQN = \angle KQL$, но из треугольника KQL имеем

$$\angle KQL = 180^\circ - \angle KLQ - \angle LKQ = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} =$$
$$= 180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Так как четырехугольник $PQNM$ вписанный, то $\angle PQN + \angle PMN = 180^\circ$ или $90^\circ + \frac{\alpha}{2} + \alpha = 180^\circ$, откуда $\alpha = 60^\circ$, поэтому $\angle PQN = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Поскольку биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, то MQ — биссектриса угла KML и $\angle PMQ = \angle NMQ$, но тогда и $\smile PQ = \smile QN$, откуда $\angle QPN = \angle QNP = 30^\circ$ (углы QPN и QNP вписанные, опирающиеся на равные дуги QN и QP). Итак, треугольник PNQ равнобедренный и $QP = QN = \frac{1}{2\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. ■

10.9.2. 10 см, $10\sqrt{3}$ см, 20 см. ● Показать, что угол треугольника, который медиана и высота делят на три равные части, равен 90°. **10.9.3.** $\frac{7}{48}a^2\sqrt{35}$. ● Пусть D — точка пересечения биссектрисы угла BAC со стороной BC, M и N — точки пересечения окружности со сторонами AB и AC. Тогда треугольники AMD, AND и DNC равны. **10.9.4.** 3 : 1. ● Провести через точку D прямую, параллельную CE. **10.9.5.** $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}$. ● Отношение площадей треугольников PQM и PQN равно отношению их высот, проведенных из вершин

M и N. **10.9.6.** 10, 13, 13. **10.9.7.** $\frac{2}{5}$. • Провести через точку D прямую, параллельную AM.

10.9.8. $44\,\text{см}^2$. □ $\frac{S_{DLC}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}LC \cdot DC \cdot \sin\angle LCD}{\frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle ACB} = \frac{LC}{AC} \cdot \frac{DC}{BC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ (рис. 30), $S_{DLC} = \frac{2}{5}S_{ABC} = \frac{2}{5} \cdot 90 = 36\,\text{см}^2$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$. По этому же свойству из треугольника ABL находим $\frac{BE}{EL} = \frac{AB}{AL} = \dfrac{AB}{\frac{1}{3}AC} = 3\frac{AB}{AC} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$, поэтому $S_{EDL} = \frac{1}{3}S_{BDL} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}S_{BLC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{4}{45} \cdot 90 = 8\,\text{см}^2$. $S_{EDCL} = S_{DLC} + S_{EDL} = 36 + 8 = 44\,\text{см}^2$. ■

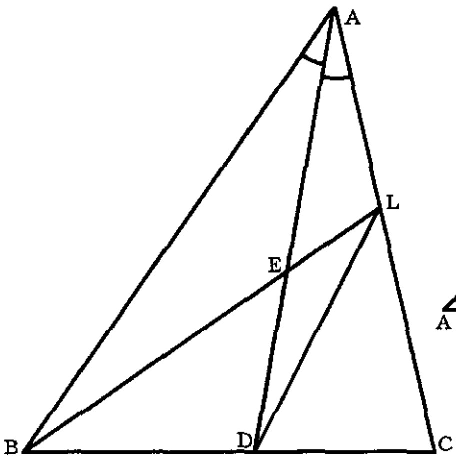


Рис. 30

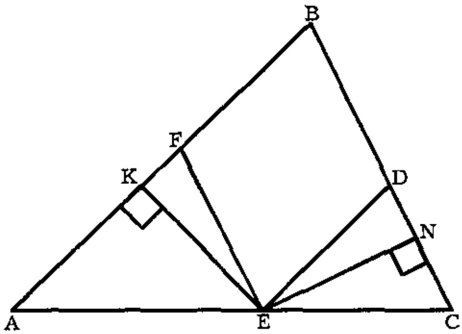


Рис. 31

10.9.9. $11\,\text{см}^2$. **10.9.10.** $16\,\text{см}^2$. **10.9.11.** $32 : 105$. **10.9.12.** $\frac{144}{\sqrt{5}}$. **10.9.13.** $\frac{\sqrt{7}}{16}$.

10.9.14. $5\sqrt{5}$. □ Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ (рис. 31), $EK \perp AB$, $EN \perp BC$. Тогда EK и EN равны диаметру окружности, вписанной в ромб $FEDB$ и $\sin\alpha = \frac{KE}{AE} = \frac{2}{3}$, $\sin\gamma = \frac{EN}{EC} = \frac{2}{7}$, поэтому $\sin\beta = \sin(\alpha+\gamma) = \sin\alpha \cdot \cos\gamma + \sin\gamma \cdot \cos\alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{45}}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{8\sqrt{5}}{21}$. По теореме синусов из треугольника ABC: $AB = AC \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \dfrac{10 \cdot \frac{2}{7}}{\sin\beta} = \frac{20}{7\sin\beta}$,

$BC = AC \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{10 \cdot \frac{2}{3}}{\sin\beta} = \frac{20}{3\sin\beta}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\beta = \frac{400 \cdot 21}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8\sqrt{5}} = \frac{25}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}$. ■

10.9.15. $\frac{9}{2}$. **10.9.16.** $\frac{2}{5\pi}$. **10.9.17.** 9. ● Провести через точку K прямую, параллельную BF, а через точку L — прямую, параллельную AB.

10.9.18. $\dfrac{h_a h_b h_c}{h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c}$. □ Пусть S — площадь треугольника ABC, a, b, c — длины сторон BC, AC, AB соответственно, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, r — радиус вписанной окружности. Тогда $S = pr = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, откуда $a = \dfrac{2S}{h_a}$, $b = \dfrac{2S}{h_b}$, $c = \dfrac{2S}{h_c}$ и

$$\frac{1}{r} = \frac{p}{S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{\dfrac{2S}{h_a} + \dfrac{2S}{h_b} + \dfrac{2S}{h_c}}{2S} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c}{h_a h_b h_c}.$$

Окончательно, $r = \dfrac{h_a h_b h_c}{h_a h_c + h_a h_c + h_b h_c}$. ■

10.9.19. $45°$, $75°$. **10.9.20.** $\frac{9}{\sqrt{2}}R$. **10.9.21.** $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 2$, $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2$. **10.9.22.** $1:4$.

10.9.23. 2,14. **10.9.24.** $\sqrt{13}$, $2\sqrt{13}$, $3\sqrt{5}$. **10.9.25.** $\frac{25}{4}$.

10.9.26. $7 + 4\sqrt{3}$. □ Из прямоугольного треугольника CMD: $MC^2 = MD^2 + CD^2 = BD \cdot CD + CD^2 = CD(BD + DC) = CD \cdot BC$ (рис. 32). Аналогично, $NC^2 = CP \cdot AC$. Из прямоугольных треугольников BPC и ADC получаем $\dfrac{CP}{BC} = \dfrac{CD}{AC} = \cos C$, $CP \cdot AC = BC \cdot CD$, т.е. $MC^2 = NC^2$, откуда $MC = NC$ и, таким образом, треугольник MCN равнобедренный. В равнобедренном треугольнике MCN биссектриса CL является одновременно высотой, поэтому $CL = \frac{1}{2}MN \operatorname{ctg} 15° = (2+\sqrt{3})\dfrac{1+\cos 30°}{\sin 30°} = (2+\sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$. ■

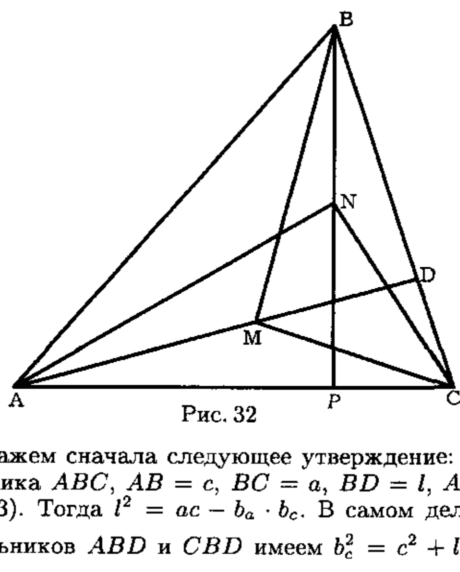


Рис. 32

10.9.27. 56. □ Докажем сначала следующее утверждение: пусть BD — биссектриса треугольника ABC, $AB = c$, $BC = a$, $BD = l$, $AD = b_c$, $CD = b_a$, $\angle ABC = \beta$ (рис. 33). Тогда $l^2 = ac - b_a \cdot b_c$. В самом деле, по теореме косинусов из треугольников ABD и CBD имеем $b_c^2 = c^2 + l^2 - 2lc\cos\dfrac{\beta}{2}$, $b_a^2 = a^2 + l^2 - 2la\cos\dfrac{\beta}{2}$. Умножим обе части первого из этих уравнений на a, а второго — на c и вычтем из первого уравнения второе: $ab_c^2 - cb_a^2 = ac^2 - ca^2 - l^2(c-a)$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{a}{c} = \frac{b_a}{b_c}$ или $ab_c = cb_a$, поэтому полученное равенство можно переписать в виде $l^2(a-c) = ac(a-c) + cb_ab_c - ab_cb_a = ac(a-c) + b_ab_c(c-a) = (a-c)(ac - b_ab_c)$, откуда $(a-c)(l^2 - ac + b_ab_c) = 0$. Если $a = c$, то $b_a = b_c = \frac{b}{2}$ и $l^2 = a^2 - \frac{b^2}{4} = ac - b_ab_c$. Если же $a \neq c$, то $l^2 - ac + b_ab_c = 0$, $l^2 = ac - b_ab_c$, что и требовалось доказать.

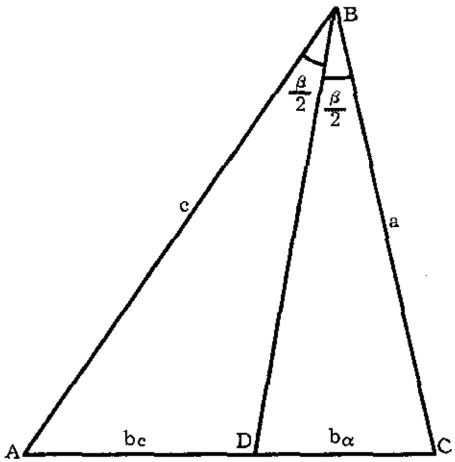


Рис. 33

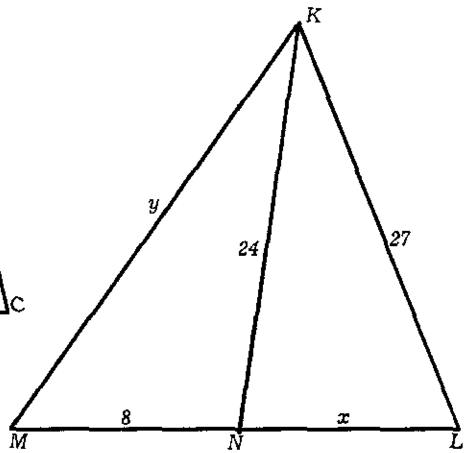


Рис. 34

Положим $MK = y$, $NL = x$ (рис. 34). Тогда $\frac{y}{27} = \frac{8}{x}$, $xy = 216$, и по доказанному свойству $27y - 8x = 576$, т. е. $27xy - 8x^2 = 576x$, $27 \cdot 216 - 8x^2 = 576x$. Решив полученное квадратное уравнение, найдем $x = 9$, тогда $y = \frac{8 \cdot 27}{x} = \frac{8 \cdot 27}{9} = 24$ и $P_{KMN} = KM + MN + NK = 24 + 8 + 24 = 56$. ■

10.9.28. $\frac{\sqrt{15}}{3}$. **10.9.29.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **10.9.30.** 195. **10.9.31.** $60°$, $60°$, $60°$.
10.9.32. 6, 6, 6.

10.10.1. $8\sqrt{21}$ см, $10\sqrt{21}$ см, $10\sqrt{21}$ см или 48 см, 40 см, 40 см. **10.10.2.** $a(\sqrt{6}-2)$.
10.10.3. $20°$. □ Опишем из точки B как из центра окружность радиусом BA (рис. 35). Поскольку $BC = BA$, то эта окружность пройдет через точку C и, таким образом, отрезок AC виден из точки M под углом в два раза меньшим, чем из точки B ($\angle CMA = 30° = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle ABC = 60°$ как угол равностороннего треугольника ABC), но $\angle ABC$ — центральный угол построенной окружности, поэтому угол AMC является вписанным углом этой же окружности, поэтому точка M также лежит на окружности. Так как $BA = BM$, то $\angle BAM = \angle BMA = 20°$. ■
10.10.4. $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$. **10.10.5.** $\arccos\frac{1}{9}$, $\arccos\frac{1}{9}$, $\pi - 2\arccos\frac{1}{9}$, $20\sqrt{5}$.

10.10.6. 108 или $48\sqrt{6}$. **10.10.7.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. ● Использовать то, что периметр треугольника MNC равен $2CD = AC = \frac{2}{5}P_{ABC} = 8$. **10.10.8.** $\frac{8}{9\sqrt{5}}$.

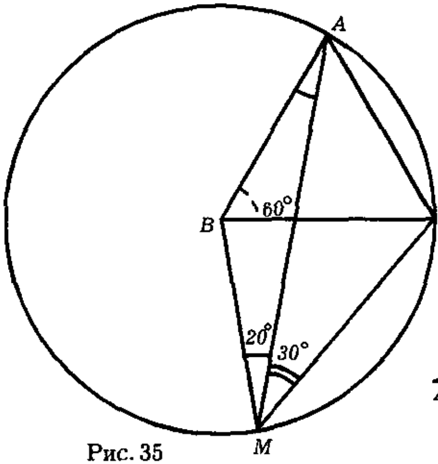


Рис. 35

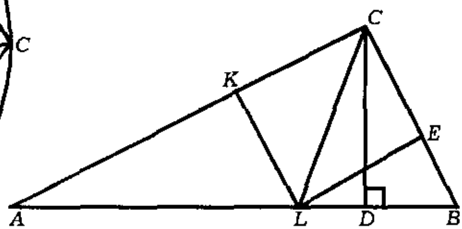


Рис. 36

10.11.1. $\frac{a}{2}$, $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **10.11.2.** 32.

10.11.3. 72. □ Проведем высоты CD и LE треугольника CBL (рис. 36) и обозначим $BC = a$, $AC = b$. Тогда $LE = CL\sin 45^\circ = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Так как L — основание биссектрисы CL, то точка L равноудалена от прямых AC и BC и $LE = LK$, поэтому

$$S_{ABC} = S_{ACL} + S_{BCL} = \frac{1}{2}AC \cdot KL + \frac{1}{2}BC \cdot LE = \frac{1}{2}LE(AC + BC) = \sqrt{2}(a + b).$$

С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \cdot 3$. Итак, $ab = 3\sqrt{a^2+b^2}$, $a^2b^2 = 9(a^2+b^2) = 9((a+b)^2 - 2ab) = 9\left(\frac{a^2b^2}{8} - 2ab\right)$, $8a^2b^2 = 9a^2b^2 - 144ab$, $ab = 144$. $S = \frac{1}{2}ab = 72$. ■

10.11.4. 121,5 см^2.

10.11.5. 5, 12, 13. □ Пусть a и b — длины катетов, а c длина гипотенузы треугольника ABC, тогда $S = pr = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = 30$, откуда $\frac{a+b}{2} \cdot r = 30 - \frac{cr}{2} = 30 - 13 = 17$. Итак, $r = \frac{26}{c} = \frac{34}{a+b}$, $34c = 26(a+b)$, $17c = 13(a+b)$, $289c^2 = 169(a^2+2ab+b^2)$, $289c^2 = 169(c^2+4S)$, $289c^2 = 169(c^2+120)$, $120c^2 = 120 \cdot 169$, $c = 13$. Тогда $r = \frac{2 \cdot 13}{c} = 2$ и $a + b = \frac{17 \cdot 2}{r} = 17$, но $ab = 2S = 60$. По обратной теореме Виета числа a и b являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 17x + 60 = 0$, решив которое, найдем $a = 5$, $b = 12$ или $a = 12$, $b = 5$. ■

10.11.6. $\frac{1323}{20}$. **10.11.7.** 15.

10.12.1. $\frac{6a^2}{3\sqrt{2}-1}$.

10.12.2. $40\,\text{см}^2$. □ Проведем высоты BE и CF (рис. 37) и обозначим $BE = CF = h$, $AE = x$, $FD = y$. Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$. Тогда $\angle NMD = \angle MDA = \angle MDN$ (DM — биссектриса угла ADC) и треугольник MND равнобедренный: $MN = ND = \frac{1}{2}CD = 5$. $S_{ABCD} = MN \cdot h = 5h$. Осталось найти длину высоты h. $AD + BC = 2MN = 10$, откуда $AD = 10 - BC = 8$. $EF = BC = 2$, поэтому $x + y = AD - EF = 6$.

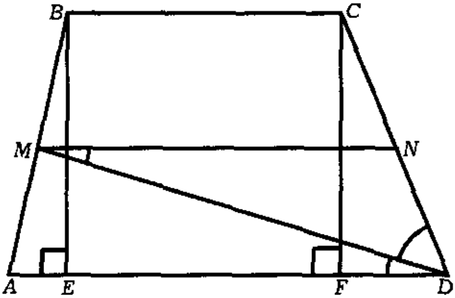


Рис. 37

Из прямоугольных треугольников ABE и DCF находим $x^2 + h^2 = 64$, $y^2 + h^2 = 100$. Вычитая из второго равенства первое, получим $y^2 - x^2 = 36$, $(y + x)(y - x) = 36$, но $x + y = 6$, поэтому $y - x = 6$, т. е. $y = 6$, $x = 0$ и, таким образом, трапеция $ABCD$ прямоугольная: $h = AB = 8$, $S = 5h = 40\,\text{см}^2$. ■

10.12.3. $\frac{5}{\pi}$. **10.12.4.** $h^2\sqrt{3}$.

10.12.5. $\frac{6-\sqrt{3}}{2}R^2$. □ Пусть $BC = b$ (рис. 38), тогда $AD = AE + ED = b + 2R\cos 30^\circ = b + R\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника OND находим $OD = 2R$, поэтому $AD = AO + OD = R + 2R = 3R = b + R\sqrt{3}$. Из последнего равенства получаем $b = (3 - \sqrt{3})R$ и $S = \frac{a+b}{2}h = \frac{3R + (3-\sqrt{3})R}{2} \cdot R = \frac{6-\sqrt{3}}{2}R^2$. ■

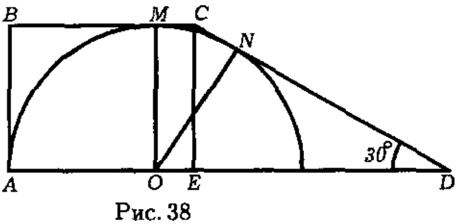


Рис. 38

10.12.6. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}a$. **10.12.7.** $\frac{3}{4}a$. **10.12.8.** $\frac{2R^2(6-\sqrt{3})}{3}$. **10.12.9.** $\frac{4(k+1)}{k+3}S$.

10.12.10. 3. □ $\angle KAM = \angle MAD = \angle KMA$ (рис. 39), поэтому треугольник KAM равнобедренный и $AK = KM$, но $AK = BK$, т. е. $AK = KM = BK$ и треугольник AMB прямоугольный ($\angle BMA = 90^\circ$), $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. ■

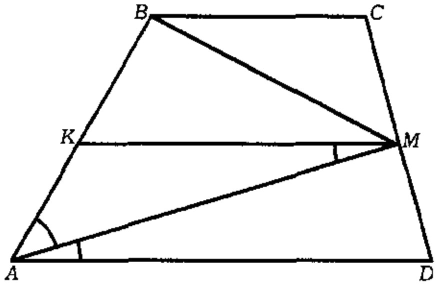


Рис. 39

10.12.11. 3 : 1. **10.12.12.** $6\sqrt{55}$. **10.12.13.** 13,5. **10.12.14.** 150. В трапецию можно вписать окружность, а описать нельзя.

10.12.15. $\frac{3}{4}ab$. □ Пусть M — середина основания AB (рис. 40), тогда $AM = \frac{1}{2}AB = DC$ и в четырехугольнике $ADCM$ стороны AM и DC равны и параллельны, поэтому этот четырехугольник является параллелограммом и $CM = AD$, но $AD = \frac{1}{2}AB = AM = MB$, т. е. $CM = AM = MB$. Последние равенства означают, что $\angle ACB = 90°$. Тогда $S_{ABCD} = S_{ACB} + S_{ADC} = S_{ACB} + S_{ACM} = S_{ACB} + \frac{1}{2}S_{ACB} = \frac{3}{2}S_{ACB} = \frac{3}{4}ab$. ■

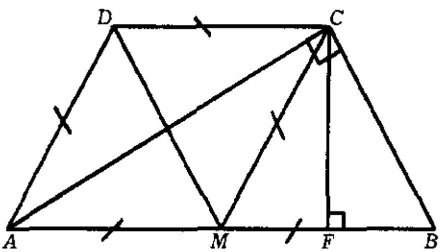


Рис. 40

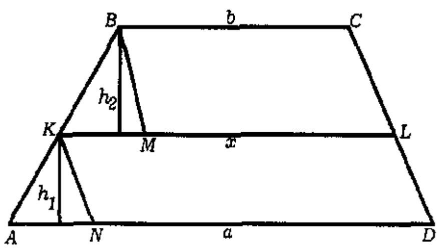


Рис. 41

10.12.16. 12. □ Пусть KL — отрезок, параллельный основаниям трапеции $ABCD$ и делящий ее площадь пополам (рис. 41), отрезки KN и BM параллельны боковой стороне CD, h_1 и h_2 — длины высот треугольника AKN и KBM, проведенных из вершин K и B, $KL = x$. Тогда $KM = x - b$, $AN = a - x$ и из подобия треугольников AKN и KBM получаем $\frac{AN}{KM} = \frac{a-x}{x-b} = \frac{h_1}{h_2}$, но из условия $S_{AKLD} = S_{KBCL}$ следует, что

$$\frac{a+x}{2}h_1 = \frac{b+x}{2}h_2 \quad \text{или} \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{b+x}{a+x} = \frac{a-x}{x-b},$$

откуда $x^2 - b^2 = a^2 - x^2$, $2x^2 = a^2 + b^2$, $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{288}{2}} = \sqrt{144} = 12$. ■

10.12.17. 2. □ Пусть M и N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ (рис. 42), O — центр окружности, BE — высота трапеции. Поскольку трапеция равнобедренная, то точка касания окружности с основанием BC совпадает с его серединой M. Пусть K — точка касания окружности с боковой стороной

AB. Тогда $BK = BM = \frac{1}{2}BC = 1$ и $AK = 9BK = 9$. Обозначим $OK = x$. $AE = AN - EN = AN - BM = 7 - 1 = 6$ и из прямоугольного треугольника ABE имеем $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$, тогда $ON = MN - MO = BE - MO = 8 - x$. Из прямоугольного треугольника AKO: $AO = \sqrt{81 + x^2}$, а из прямоугольного треугольника AON: $AO = \sqrt{AN^2 + NO^2} = \sqrt{7^2 + (8-x)^2}$, поэтому $\sqrt{81 + x^2} = \sqrt{49 + (8-x)^2}$, $81 + x^2 = 49 + 64 - 16x + x^2$, $16x = 32$, $x = 2$. ■

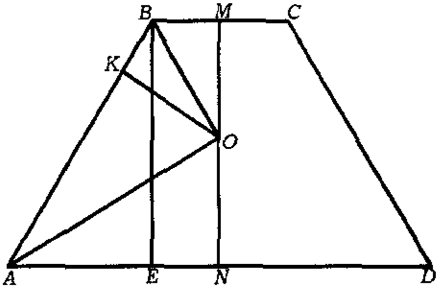


Рис. 42

10.12.18. 3. □ $AB_1 = B_1D - AD = BC - AD = 9 - 8 = 1$ (рис. 43). Обозначим $BB_1 = x$. Тогда радиус окружности QN равен $\frac{3}{4}LN = \frac{3}{4}BB_1 = \frac{3}{4}x$. В прямоугольном треугольнике LQM имеем $LQ = \frac{x}{4}$, $LM = \frac{1}{2}PM = 2$, $QM = QN = \frac{3}{4}x$, но $QL^2 + LM^2 = QM^2$, откуда $\frac{x^2}{16} + 4 = \frac{9}{16}x^2$, $\frac{x^2}{2} = 4$, $x^2 = 8$. Наконец, из прямоугольного треугольника BB_1A находим $AB = \sqrt{AB_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{1+8} = 3$. ■

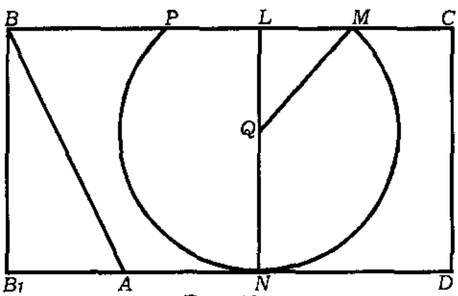


Рис. 43

10.12.19. *12 см или $12\sqrt{3}$ см.* ● *Рассмотреть два случая:*

а) боковая сторона образует угол 60° с большим основанием трапеции,

б) боковая сторона образует угол 60° с меньшим основанием трапеции.

10.12.20. 1 : 4.

10.12.21. $\sqrt{a(a-b)}$. □ $\angle BEK = \angle BCE$ (угол BEK измеряется половиной дуги BE как угол, образованный касательной и хордой, а угол BCE — половиной той же дуги как вписанный) (рис. 44). Но $\angle BCE = \angle CAD$, а $\angle BEK = \angle DEF$, поэтому $\angle CAD = \angle DEF$ и треугольники AEF и DEF подобны по двум углам ($\angle EFD$ — общий). Из подобия треугольников AEF и DEF

заключаем, что $\frac{AF}{EF} = \frac{EF}{DF}$; $EF^2 = AF \cdot DF = a(a-b)$, откуда $EF = \sqrt{a(a-b)}$. ■

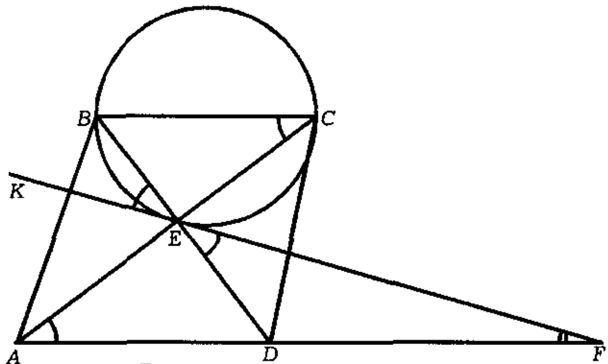


Рис. 44

10.12.22. $\frac{18}{25+\sqrt{445}+2\sqrt{130}}$. □ Проведем в трапеции $ABCD$ высоты BF и CG (рис. 45). Тогда $AF = h \cdot \operatorname{ctg} A = \frac{h}{2}$, $DG = h \cdot \operatorname{ctg} D = \frac{h}{3}$ (здесь h — длина высоты трапеции).

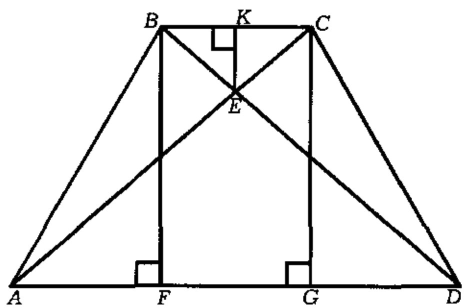


Рис. 45

Подставляя найденные значения в равенство $AF + FG + GD = AD$, получим $\frac{h}{2} + 1 + \frac{h}{3} = 4$, $\frac{5}{6}h = 3$, $h = \frac{18}{5}$. Из прямоугольного треугольника BFD имеем $BD^2 = BF^2 + FD^2$ или $BD^2 = h^2 + \left(4 - \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{445}{25}$, $BD = \frac{\sqrt{445}}{5}$. Аналогично, из прямоугольного треугольника ACG имеем $AC^2 = h^2 + \left(4 - \frac{h}{3}\right)^2 = \frac{520}{25}$, $AC = \frac{\sqrt{520}}{5}$. Из подобия треугольников BEC и AED заключаем, что $\frac{BE}{ED} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{4}$, т.е. $BD = BE + ED = BE + 4BE = 5BE$, откуда $BE = \frac{1}{5}BD = \frac{\sqrt{445}}{25}$. Аналогично, $CE = \frac{1}{5}AC = \frac{2\sqrt{130}}{25}$.

$$S_{BEC} = \frac{1}{2}BC \cdot EK = \frac{1}{2}BC \cdot \frac{h}{5} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{18}{25} = \frac{9}{25}.$$

$$r = \frac{2S_{BEC}}{P_{BEC}} = \frac{2 \cdot \frac{9}{25}}{1 + \frac{\sqrt{445}}{25} + \frac{2\sqrt{130}}{25}} = \frac{18}{25 + \sqrt{445} + 2\sqrt{130}}. \ \blacksquare$$

10.12.23. $2\sqrt{3}$.

10.12.24. $10\,\text{см}^2$. $\square$ $S_{BKL} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} S_{BCD} = \frac{1}{6} S_{BCD}$ (рис. 46). $S_{ABK} = \frac{1}{4} S_{ABD}$, $S_{ABL} = \frac{2}{3} S_{ABC} = \frac{2}{3} S_{BCD}$. $S_{ABK} = S_{ABL} - S_{BKL} = \frac{2}{3} S_{BCD} - \frac{1}{6} S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{BCD} = \frac{1}{4} S_{ABD}$. Из последнего равенства следует, что $S_{ABD} = 2S_{BCD}$, но $S_{BCD} + S_{ABD} = 3S_{BCD} = 36$, откуда $S_{BCD} = 12$. Окончательно получаем, что $S_{DKLC} = S_{BCD} - S_{BKL} = \frac{5}{6} S_{BCD} = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10\,\text{см}^2$. $\blacksquare$

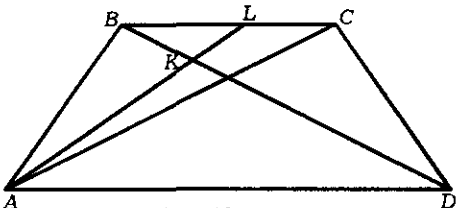


Рис. 46

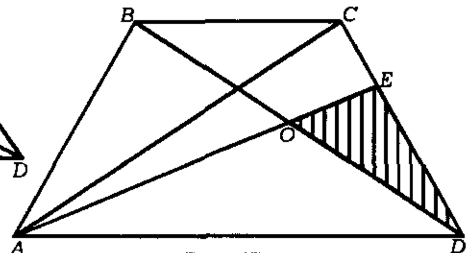


Рис. 47

10.12.25. $4:5$. **10.12.26.** $8\,\text{см}^2$.

10.12.27. $\frac{1}{7}$. $\square$ $S_{OED} = \frac{1}{3} S_{AED} = \frac{1}{9} S_{ACD} = \frac{1}{9} S_{ABD}$ (рис. 47). $S_{ABD} = S_{ABO} + S_{AOD} = 1 + 2S_{OED} = 9S_{OED}$. Из последнего равенства находим, что $S_{OED} = \frac{1}{7}$. $\blacksquare$

10.12.28. $\sqrt{4a^2 - b^2}$. **10.12.29.** $\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$. **10.12.30.** $4\sqrt{5}\,\text{см}$.

10.13.1. $3 \arccos \frac{k+2}{2k}$, $\pi - 3 \arccos \frac{k+2}{2k}$. **10.13.2.** $\frac{4 + \sqrt{15}}{3\pi}$.

10.13.3. $\frac{15}{4}$ см. $\square$ Высоты ромба равны, поэтому $BM = BN = h$ (рис. 48). $MD = BM \cdot \operatorname{ctg} \angle BDM = h \cdot \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 2) = \frac{h}{2}$. Четырехугольник $BMDN$ состоит из двух равных прямоугольных треугольников, поэтому $S_{BMDN} = BM \cdot MD = h \cdot \frac{h}{2} = \frac{h^2}{2} = pr = (BM + MD)r = \left(h + \frac{h}{2}\right) \cdot 1 = \frac{3}{2}h$. Таким образом, $\frac{h^2}{2} = \frac{3h}{2}$, откуда $h = 3$, $MD = \frac{h}{2} = \frac{3}{2}$. Из прямоугольного треугольника ABM получаем $AM = BM \cdot \operatorname{ctg} \angle BAD = h \cdot \operatorname{ctg}(\pi - 2 \operatorname{arctg} 2) = \frac{h}{-\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 2)} = \frac{-h(1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 2))}{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)} = \frac{-h(1-4)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} \cdot h = \frac{9}{4}$, $AD = AM + MD = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$ см. $\blacksquare$

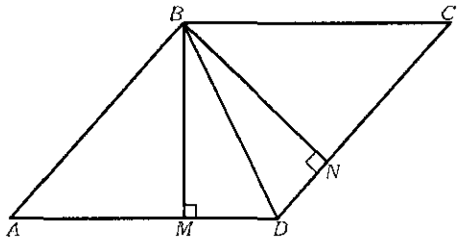


Рис. 48

10.13.4. 300. □ Пусть K — точка касания окружности со стороной AB, $BK = x$, M и N — точки касания окружностей со стороной AD, O_1 и O_2 — их центры (рис. 49). Тогда $AK = \frac{9}{4}x$. Так как окружность O_1 касается сторон углов BAD и ABC, то ее центр совпадает с точкой пересечения биссектрис этих углов и $\angle BAO_1 + \angle ABO_1 = \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$, откуда $\angle AO_1B = 90^\circ$ и, таким образом, треугольник AO_1B прямоугольный.

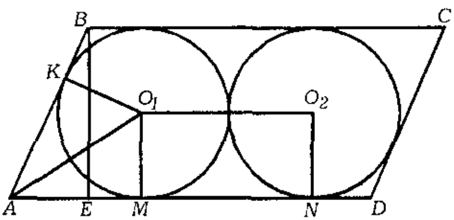


Рис. 49

Поскольку в прямоугольном треугольнике квадрат высоты, опущенной из вершины прямого угла, равен произведению отрезков, на которые разбивает гипотенузу основание этой высоты, то $KO_1^2 = BK \cdot KA$ или $6^2 = x \cdot \frac{9}{4} \cdot x$, $x^2 = 16$, $x = 4$, $AK = \frac{9}{4} \cdot x = 9$. Так как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны, то $AM = AK = 9$, а в силу симметрии параллелограмма $ND = BK = 4$. Отсюда $AD = AM + MN + ND = AM + O_1O_2 + ND = 9 + 12 + 4 = 25$. $S_{ABCD} = AD \cdot BE = 25 \cdot 12 = 300$. ■

10.13.5. $\frac{49\sqrt{3}}{2}$. **10.13.6.** $10 \pm 4\sqrt{3}$. **10.13.7.** $\frac{3(\sqrt{5} \pm 1)}{2}$. **10.13.8.** 7 см^2. **10.13.9.** 7.

10.14.1. $7\sqrt{3}r$. • Центры окружностей лежат по одну сторону от хорды. **10.14.2.** 3. • Пусть AD — хорда, которая делит угол CAB пополам. Применить теорему косинусов к треугольникам ABD и ACD.

10.14.3. $3r$. □ Пусть O_1, O_2, O_3 — центры кругов с радиусами $\frac{3}{2}r$, $\frac{3}{2}r$, r соответственно (рис. 50), O — центр круга с радиусом R, касающегося трех данных внутренним образом, M — точка касания кругов O_1 и O_2. Тогда из прямоугольного треугольника OMO_2 получим $OM^2 + MO_2^2 = OO_2^2$. Поскольку прямая OO_2 проходит через точку касания кругов O и O_2, то $OO_2 = R - \frac{3}{2}r$.

Учитывая то, что $MO_2 = \frac{3}{2}r$, получим $OM^2 + \left(\frac{3}{2}r\right)^2 = (R - \frac{3}{2}r)^2$.

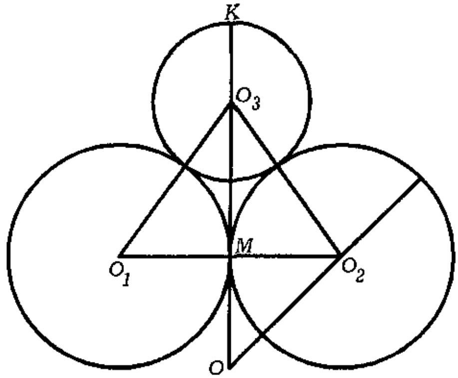


Рис. 50

Теперь для того, чтобы составить уравнение относительно R, осталось только выразить OM через R и r. Если K — точка касания кругов O и O_3, то $OM = OK - O_3K - MO_3 = R - r - MO_3$. MO_3 найдем из прямоугольного треугольника MO_2O_3: $MO_3 = \sqrt{O_2O_3^2 - MO_2^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}r\right)^2 - \left(\frac{3}{2}r\right)^2} = 2r$. Итак, $OM = R - r - MO_3 = R - r - 2r = R - 3r$ и $(R-3r)^2 + \left(\frac{3}{2}r\right)^2 = \left(R - \frac{3}{2}r\right)^2$, откуда $3Rr = 9r^2$, $R = 3r$. ■

10.14.4. $\dfrac{R\left(R - r - \sqrt{R^2 - 2Rr}\right)}{r + R - \sqrt{R^2 - 2Rr}}$.

10.14.5. 4. □ Обозначим $\angle MKL = \alpha$, $\angle KML = \beta$ (рис. 51).

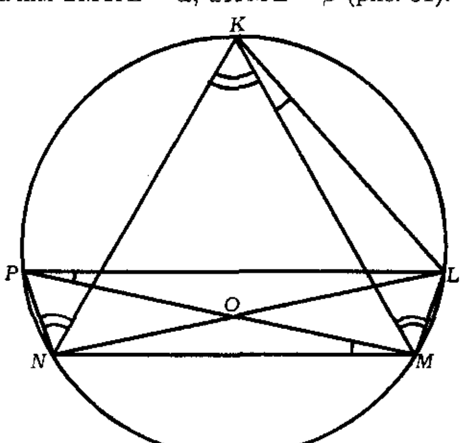


Рис. 51

Тогда $\angle PNK = \angle NKM = \angle KML = \beta$ и $\smile PK = \smile KL = \smile NM = 2\beta$, $\smile PN = \smile ML = 2\alpha$, но объединение дуг PK, KL, NM, PN, ML образует всю окружность, поэтому $6\beta + 4\alpha = 2\pi$. Поскольку LOM — внешний угол треугольника MON, то $\angle LOM = \angle OMN + \angle ONM = \alpha + \alpha = 2\alpha = \frac{\pi}{4}$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{8}$, $6\beta = 2\pi - 4\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$. По теореме синусов из треугольника KLM имеем $KL = 2R\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4$, $LM = 2R\sin\frac{\pi}{8} = 4\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}$. $S_{KLM} = \frac{1}{2}KL\cdot LM\cdot\sin\left(\pi - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{5\pi}{8} = 8\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8} = 4\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4$. ■

10.14.6. $\frac{19\sqrt{26}}{26}$. □ Проведем высоту MD трапеции (рис. 52).

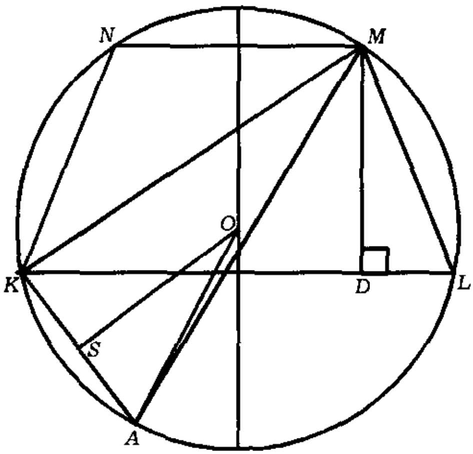


Рис. 52

Тогда $DL = \frac{1}{2}(KL - MN) = \frac{1}{2}(8-2) = 3 = MD$, так как $\angle MLK = \angle NKL = 45^\circ$ и из прямоугольного треугольника MDL имеем $ML = \sqrt{DL^2 + MD^2} = 3\sqrt{2}$. Аналогично, $KM = \sqrt{KD^2 + MD^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$, но по теореме синусов из треугольника KNM получим $KM = 2R\cdot\sin 135^\circ = \sqrt{34}$, откуда $R = \frac{\sqrt{34}}{2\sin 135^\circ} = \frac{\sqrt{34}}{2\sin 45^\circ} = \sqrt{17}$. Из подобия треугольников BKA и BML выводим $\frac{KA}{ML} = \frac{KB}{BM}$, т. е. $KA = \frac{KB\cdot ML}{BM}$, но $BM = \sqrt{BD^2 + MD^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, поэтому $KA = \frac{3\cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = 9\sqrt{\frac{2}{13}}$. Если теперь S — середина хорды AK, то из прямоугольного треугольника ASO находим: $OS = \sqrt{OA^2 - SA^2} = \sqrt{R^2 - \frac{KA^2}{4}} = \sqrt{17 - \frac{81\cdot 2}{13\cdot 4}} = \sqrt{\frac{361}{26}} = \frac{19\sqrt{26}}{26}$. ■

10.14.7. $\frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{5}{7} + \frac{1}{2} + \frac{10\sqrt{6}}{49}$. □ Для нахождения площади части круга, лежащей внутри угла ABC достаточно вычесть из площади всего круга площади сегментов AMB и BKC (рис. 53). Так как $AO = OB = 1$ и $AB = \sqrt{2}$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, заключаем, что $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ и $S_{AMB} = S_{\text{сектора}AOB} - S_{\triangle AOB} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. Пусть E — середина хорды BC. Тогда

$$\sin\alpha = \frac{BE}{OB} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7},$$

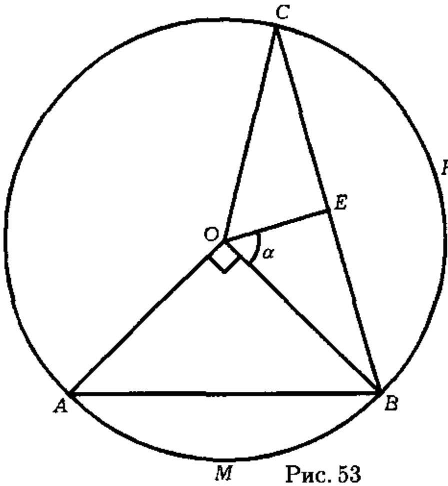


Рис. 53

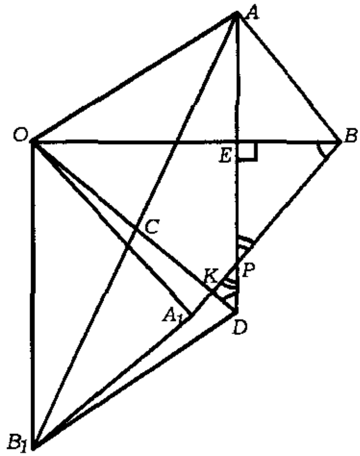


Рис. 54

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{5}{7}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{10}{7}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{20\sqrt{6}}{49}.$$

$$S_{BKC} = S_{\text{сектора}BOC} - S_{\triangle BOC} = \arcsin\frac{5}{7} - \frac{1}{2}OB\cdot OC\cdot\sin 2\alpha =$$
$$= \arcsin\frac{5}{7} - \frac{1}{2}\cdot\frac{20\sqrt{6}}{49} = \arcsin\frac{5}{7} - \frac{10\sqrt{6}}{49}.$$

Окончательно получаем

$$S = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\arcsin\frac{5}{7} - \frac{10\sqrt{6}}{49}\right) = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{5}{7} + \frac{1}{2} + \frac{10\sqrt{6}}{49}. \ ■$$

10.14.8. $\frac{15\sqrt{2}}{8}$. ● Разобрать случаи внутреннего и внешнего касания окружностей. **10.14.9.** 216. **10.14.10.** $\frac{155\sqrt{3}}{84}$. **10.14.11.** $\frac{19\sqrt{3}}{52}$. **10.14.12.** 2.

10.15.1. □ Пусть OC — медиана треугольника OAB_1 (рис. 54). На продолжении отрезка OC за точку C возьмем точку D так, что $OC = CD$, тогда четырехугольник OB_1DA — параллелограмм. Так как $OA = OA_1$, $AD = OB_1 = OB$ и $\angle OAD = \angle A_1OB$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами, то треугольники ACD и A_1OB равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $\angle ODA = \angle OBA_1$. Итак, в треугольниках KPD и BPE: $\angle KDP = \angle ODA = \angle OBA_1 = \angle PBE$, $\angle KPD = \angle BPE$, поэтому и $\angle PKD = \angle PEB = 90^\circ$, поскольку $AD \parallel O_1B$, а $O_1B \perp OB$. Второе утверждение задачи доказывается аналогично первому. ■

10.15.2. □ Пусть S — площадь треугольника ABC, r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности, $h_a = AD$ — высота, опущенная из вершины A (рис. 55). Тогда

$$\frac{2p\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2S}{r}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{ah_a}{r}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=$$

$$=\frac{2R\sin A}{r}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cdot h_a=\frac{2R\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{r}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cdot h_a=$$

$$=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{r}\cdot h_a.$$

Очевидно, что последнее выражение равно h_a в том и только в том случае, когда

$$\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{r}=1\quad\text{или}\quad r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Итак, для доказательства утверждения задачи достаточно доказать последнее равенство. Пусть O — центр вписанной окружности, K — точка касания со стороной BC (рис. 56).

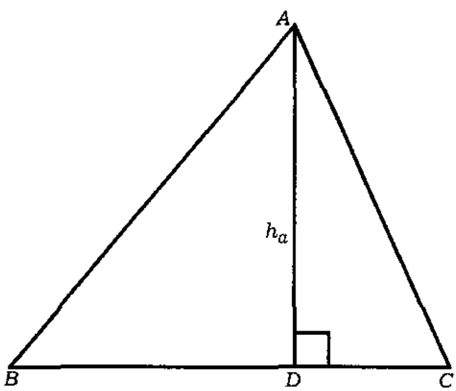


Рис. 55

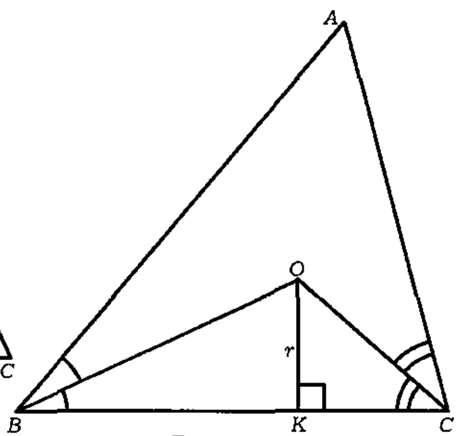


Рис. 56

Тогда

$$BC=BK+KC=r\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+r\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=$$

$$=r\left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right)=r\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=$$

$$=r\cdot\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=r\cdot\frac{\sin\frac{180^\circ-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=r\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

С другой стороны, $BC = a = 2R\sin A$, поэтому

$$2R\sin A = 2R\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = r\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

откуда $r = 4R\cdot\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, что и требовалось доказать. Тем самым, как уже отмечалось, доказано и утверждение задачи. ■

10.15.3. □ Пусть точка D лежит на дуге BC описанной окружности треугольника ABC (рис. 57). Докажем, что $BD + DC = AD$. Для этого возьмем на отрезке AD точку E так, что $DE = DC$. Поскольку $\angle EDC = \angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$, то треугольник EDC равносторонний и $DC = EC$. $\angle ACE = \angle ACD - \angle ECD = \angle ACD - 60^\circ = \angle ACD - \angle ACB = \angle BCD$. Итак, в треугольниках ACE и BCD: $EC = DC$, $AC = BC$ как стороны равностороннего треугольника ABC и $\angle ACE = \angle BCD$, поэтому $\triangle ACE = \triangle BCD$, откуда следует, что $AE = BD$ и, таким образом, $CD + BD = DE + EA = DA$. ■

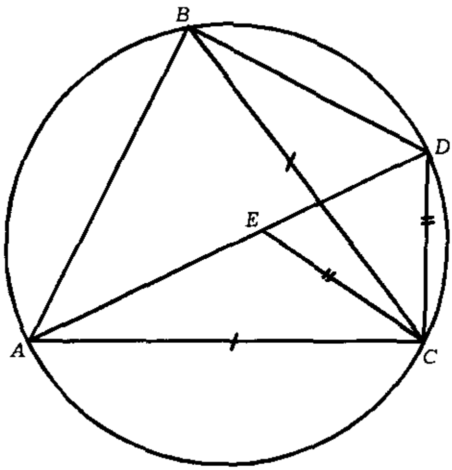


Рис. 57

10.15.4. □ Обозначим центр меньшей окружности через O (рис. 58). Поскольку MN — диаметр большей окружности, то $NK \perp KM$, а так как KM касается меньшей окружности, то $OC \perp KM$, поэтому $\angle KNC = \angle NCO$, но $OC = ON$ как радиусы меньшей окружности и $\angle NCO = \angle ONC$. Итак, $\angle KNC = \angle NCO = \angle ONC$, откуда $\angle KNC = \angle ONC$. ■

10.15.5. □ Обозначим $AD = a$, $BC = b$, $AB = h$, $CD = x$, S — площадь трапеции (рис. 59). Тогда из прямоугольного треугольника CED получим: $CD^2 = CE^2 + ED^2$ или $x^2 = h^2 + (a-b)^2$, $x^2 - h^2 = (a-b)^2$, $(x+h)(x-h) = (a-b)^2$, но $x + h = a + b$, поэтому $(a+b)(x-h) = (a-b)^2$, $x = \dfrac{(a-b)^2}{a+b} + h$ и $h = a + b - x = a + b - h - \dfrac{(a-b)^2}{a+b}$. Из последнего равенства находим

$$h = \frac{1}{2}\left(a + b - \frac{(a-b)^2}{a+b}\right) = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{2(a+b)} = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Итак, $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab$, что и требовалось доказать. ■

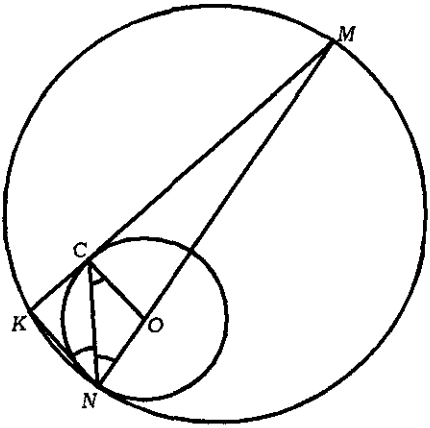


Рис. 58

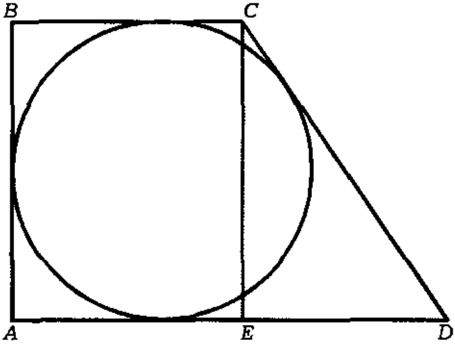


Рис. 59

10.16.1. $\frac{ab(a+b+2)}{(a+1)(b+1)(a+b+1)}$. □ Обозначим точку пересечения отрезков BE и CL через P и опустим перпендикуляры AL, BK и EM на прямую CD (рис. 60). Тогда

$$\frac{AL}{BK} = \frac{AD}{DB} = b \quad (\triangle KBL \sim \triangle PAL) \quad \text{и}$$

$$\frac{AL}{EM} = \frac{AC}{EC} = \frac{AE+EC}{EC} = \frac{AE}{EC} + 1 = a+1 \quad (\triangle APC \sim \triangle EMC).$$

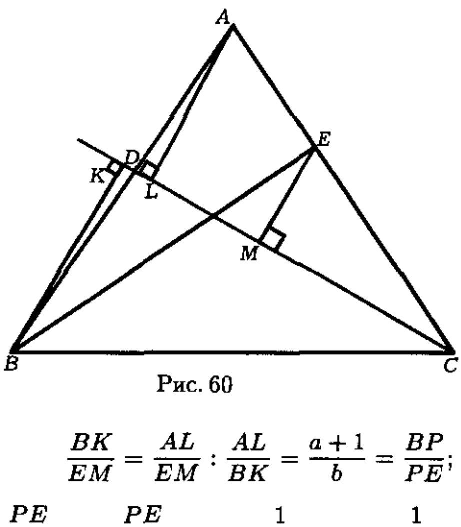


Рис. 60

Далее,

$$\frac{BK}{EM} = \frac{AL}{EM} : \frac{AL}{BK} = \frac{a+1}{b} = \frac{BP}{PE};$$

$$\frac{S_{DPE}}{S_{BDE}} = \frac{PE}{BE} = \frac{PE}{BP+PE} = \frac{1}{\frac{BP}{PE}+1} = \frac{1}{\frac{a+1}{b}+1} = \frac{b}{a+b+1}.$$

Пусть $S_{ABC} = S$. Тогда

$$\frac{S_{BDE}}{S} = \frac{BD}{AB}\cdot\frac{AE}{AC} = \frac{BD}{AD+DB}\cdot\frac{AE}{AE+EC} = \\ = \frac{1}{1+\frac{AD}{DB}}\cdot\frac{1}{1+\frac{EC}{AE}} = \frac{1}{1+b}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{a}} = \frac{a}{(a+1)(b+1)}.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{S_{DPE}}{S} = \frac{S_{DPE}}{S_{BDE}}\cdot\frac{S_{BDE}}{S} = \frac{b}{a+b+1}\cdot\frac{a}{(a+1)(b+1)},$$

$$\frac{S_{DAE}}{S} = \frac{\frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot\sin\angle BAC}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC} = \frac{AD}{AB}\cdot\frac{AE}{AC} = \frac{b}{b+1}\cdot\frac{a}{a+1} = \frac{ab}{(a+1)(b+1)}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{S_{DAEP}}{S} = \frac{S_{DPE}}{S} + \frac{S_{DAE}}{S} = \frac{ab}{(a+1)(b+1)(a+b+1)} + \\ + \frac{ab}{(a+1)(b+1)} = \frac{ab(a+b+2)}{(a+1)(b+1)(a+b+1)}. \quad \blacksquare$$

10.16.2. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. □ Покажем, что точки H и M симметричны относительно прямой BC (рис. 61). В самом деле $\angle HCH_1 = \angle H_3CB = \frac{\pi}{2} - B$, $\angle H_1CM = \angle BCM = \angle BAM = \angle BAH_1 = \frac{\pi}{2} - B$ (углы BCM и BAM вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу BM). Итак, прямоугольные треугольники HCH_1 и MCH_1 равны по катету и прилежащему острому углу (катет CH_1 — общий).

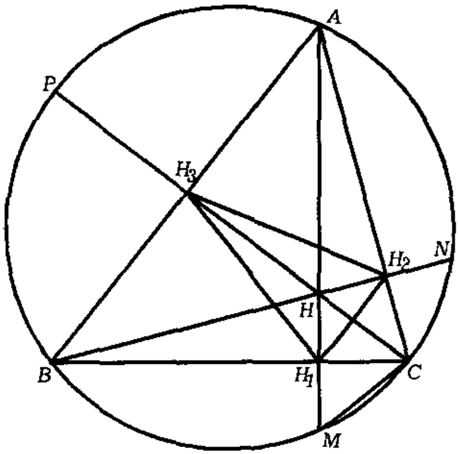


Рис. 61

Аналогично, точки N и P симметричны точке H относительно прямых AC и AB соответственно. Отсюда следует, что треугольник MNP гомотетичен треугольнику $H_1H_2H_3$ с центром гомотетии H и коэффициентом гомотетии 2. Найдем площадь треугольника $H_1H_2H_3$. Прямоугольные треугольники ABH_2 и ACH_3 подобны, так как имеют общий угол A, поэтому $\frac{AH_2}{AB} = \frac{AH_3}{AC} = \cos A$, но это равенство означает, что треугольники AH_2H_3 и ABC подобны с коэффициентом подобия $\cos A$, поэтому $\angle AH_2H_3 = \angle B$, $\angle AH_3H_2 = \angle C$. Аналогично, каждый из треугольников BH_1H_3 и CH_1H_2 подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\cos B$ и $\cos C$. Таким образом,

$$S_{H_1H_2H_3} = \frac{1}{2}H_1H_2 \cdot H_1H_3 \cdot \sin\angle H_2H_1H_3 = \frac{1}{2}H_1H_2 \cdot H_1H_3 \cdot \sin(\pi - 2A) =$$
$$= \frac{1}{2}c\cos C \cdot b\cos B \cdot \sin 2A = \frac{1}{2}bc\cos B\cos C\sin 2A, \quad \text{где } b = AC, \ c = AB.$$

Окончательно,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{S_{ABC}}{4S_{H_1H_2H_3}} = \frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{4\cdot\frac{1}{2}bc\cdot\cos B\cdot\cos C\cdot\sin 2A} = \frac{1}{8\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C} =$$

$$= \frac{1}{8\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}} = \frac{1}{8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \ \blacksquare$$

10.16.3. $\arccos\frac{1}{7}$.

10.16.4. $3\sqrt{2}$ м. □ Пусть M — середина BC (рис. 62). Отложим на прямой DM от точки M отрезок $MC_1 = DM$. Так как $CD \perp AB$, то параллелограмм $CDBC_1$ является прямоугольником и $C_1D = CB = AD$, $AB = CD = C_1B = 3$, т. е. прямоугольный треугольник ABC_1 равнобедренный и $\angle C_1AB = 45°$.

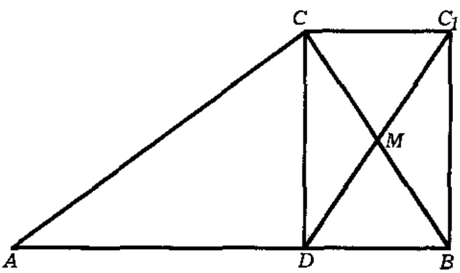


Рис. 62

Но прямоугольный треугольник ADC также равнобедренный и $\angle CAD = \angle CAB = 45°$. Это означает, что точка C_1 лежит на прямой AC, а так как $CD = C_1B$, то точки C_1 и C совпадают и, таким образом, точки D и B также совпадают и треугольник ABC — равнобедренный и прямоугольный, поэтому $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3\sqrt{2}$ м. ■

10.16.5. $\dfrac{S_1S_3(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2 - S_1S_3)}$. □ Обозначим $S_{MON} = Q_1$, $S_{CMN} = Q_2$ (см. рис. 63). Тогда $\dfrac{S_1}{Q_1} = \dfrac{AO}{ON} = \dfrac{S_2}{S_3}$, откуда $Q_1 = \dfrac{S_1S_3}{S_2}$. Далее $\dfrac{Q_2}{Q_1+S_3} = \dfrac{CN}{NB} = \dfrac{Q_2+Q_1+S_1}{S_2+S_3}$. Из последнего равенства получаем $Q_2(S_2 - Q_1) = Q_1^2 + Q_1S_1 + Q_1S_3 + S_1S_3$. Отсюда

$$Q_2 = \frac{Q_1^2 + Q_1S_1 + Q_1S_3 + S_1S_3}{S_2 - Q_1} = \frac{\left(\dfrac{S_1^2S_3^2}{S_2^2} + \dfrac{S_1^2S_3}{S_2} + \dfrac{S_1S_3^2}{S_2} + S_1S_3\right)}{\left(S_2 - \dfrac{S_1S_3}{S_2}\right)} =$$

$$= \frac{S_1S_3(S_1S_3 + S_1S_2 + S_2S_3 + S_2^2)}{S_2(S_2^2 - S_1S_3)} = \frac{S_1S_3(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2 - S_1S_3)}. ■$$

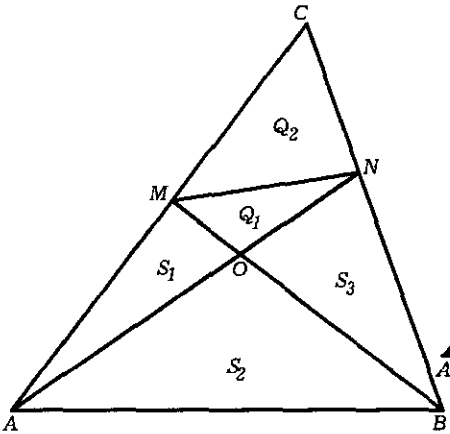


Рис. 63

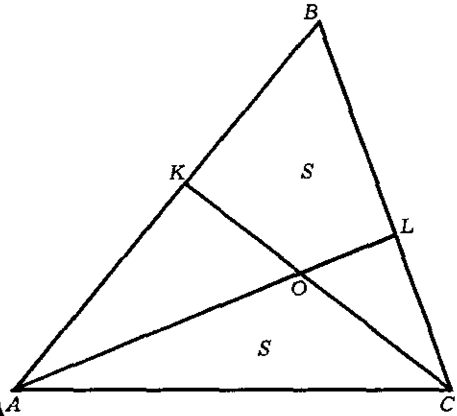


Рис. 64

10.16.6. 5 : 10 : 13. ● Воспользоваться тем, что квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

10.16.7. 6. □ Обозначим $S_{AOC} = S$ (рис. 64). Тогда

$$S+1 = \frac{S+1}{1} = \frac{S_{ABL}}{S_{AKO}} = \frac{\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AL\cdot \sin\angle BAL}{\dfrac{1}{2}\cdot AK\cdot AO\cdot \sin\angle KAO} = \frac{AB\cdot AL}{AK\cdot AO} = \frac{AB}{AK}\cdot\frac{AL}{AO} =$$

$$= \frac{S_{ABC}}{S_{AKC}}\cdot\frac{S_{ALC}}{S_{AOC}} = \frac{2S+9}{S+1}\cdot\frac{S+8}{S}.$$

В результате получаем уравнение $S(S+1)^2 = (S+8)(2S+9)$ или $S^3 - 24S - 72 = 0$. Целые корни этого уравнения являются делителями его свободного члена, т. е. 72. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $S = 6$ — корень данного уравнения. Для того, чтобы найти другие корни, разделим многочлен $S^3 - 24S - 72$ на двучлен $S - 6$ «углом»:

$$
\begin{array}{rrr|l}
-\, S^3 & & -24S-72 & S-6 \\
\cline{4-4}
S^3 & -6S^2 & & S^2+6S+12 \\
\cline{1-2}
 & -\,6S^2 & -24S-72 & \\
 & 6S^2 & -36S & \\
\cline{2-3}
 & & -\,12S\ -72 & \\
 & & 12S\ -72 & \\
\cline{3-3}
 & & 0. &
\end{array}
$$

Тогда оставшиеся корни уравнения $S^3 - 24S - 72 = 0$ являются корнями уравнения $S^2 + 6S + 12 = 0$. Так как $S^2 + 6S + 12 = (S+3)^2 + 3 > 0$, то последнее уравнение не имеет действительных корней. Таким образом, $S = 6$ единственный действительный корень уравнения $S^3 - 24S - 72 = 0$ и задача имеет единственный ответ $S = 6$. ■

10.16.8. $4\sqrt{7 - \frac{17}{21}\sqrt{42}}$. □ Обозначим точки пересечения медианы, биссектрисы и высоты со стороной AB через M, E и H соответственно (рис. 65).

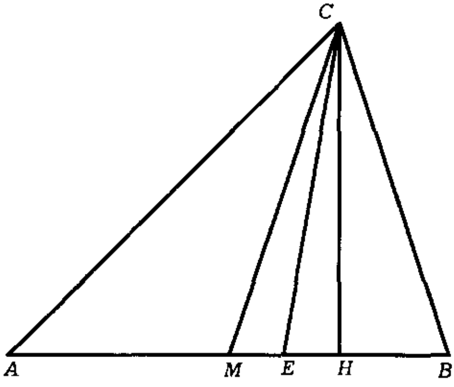


Рис. 65

Из прямоугольного треугольника MCH имеем $MH = \sqrt{CM^2 - CH^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$, а из ΔECH — $EH = \sqrt{CE^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$. Пусть $AM = MB = x$. Тогда $AH = x + MH$, $HB = x - MH$, $AE = x + ME$, $BE = x - ME$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}$. Отсюда

$$\frac{AE^2}{BE^2} = \frac{AH^2 + CH^2}{BH^2 + CH^2} \quad \text{или} \quad \left(\frac{x + 4\sqrt{2} - \sqrt{21}}{x - 4\sqrt{2} + \sqrt{21}}\right)^2 = \frac{(x + 4\sqrt{2})^2 + 4}{(x - 4\sqrt{2})^2 + 4},$$

следовательно,

$$\frac{(x + 4\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{21}(x + 4\sqrt{21}) + 21}{(x - 4\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{21}(x - 4\sqrt{2}) + 21} = \frac{(x + 4\sqrt{2})^2 + 4}{(x - 4\sqrt{2})^2 + 4} \implies$$

$$\Longrightarrow 17\Big((x-4\sqrt{2})^2-(x+4\sqrt{2})^2\Big)-2\sqrt{21}(x-4\sqrt{2})(x+4\sqrt{2})\times$$
$$\times\Big((x-4\sqrt{2})+(x+4\sqrt{2})\Big)-8\sqrt{21}\Big((x-4\sqrt{2})+(x+4\sqrt{2})\Big)=0 \Longrightarrow$$

$17\cdot 4\sqrt{2}+\sqrt{21}(x^2-32)+4\sqrt{21}=0,\ x^2=32-\dfrac{4\sqrt{21}+17\cdot 4\sqrt{2}}{\sqrt{21}}=28-68\cdot\sqrt{\dfrac{2}{21}},$

$AB=2x=4\sqrt{7-\frac{17}{21}\sqrt{42}}.$ ■

10.17.1. $\dfrac{3\sqrt{6}+2}{5}a^2.$

10.17.2. $\dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$ см^2. □ Пусть перпендикуляр к основаниям трапеции, проведенный через точку N, пересекает AD и BC в точках K и L соответственно (рис. 66), $BE\perp AD$, $BE=h$, $KN=h_1$, $NL=h_2$. Так как $\angle BAE=30^\circ$ и трапеция $ABCD$ равнобедренная, то $AB=BC=2h$, а поскольку диагональ AC является биссектрисой угла BAD, то $\angle BAC=\angle CAD=\angle BCA$, т. е. треугольник ABC равнобедренный и $BC=AB=2h$. Далее

$$AD=AE+EF+FD=2AE+BC=$$
$$=2AB\cdot\cos 30^\circ+BC=2\cdot 2h\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2h=2h(\sqrt{3}+1);$$
$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot BE=\frac{2h(\sqrt{3}+1)+2h}{2}\cdot h=h^2(\sqrt{3}+2)=2+\sqrt{3},$$

откуда $h=1$. Так как CM — биссектриса угла BCD, то треугольник CDM также равнобедренный и $MD=CD=2h$.

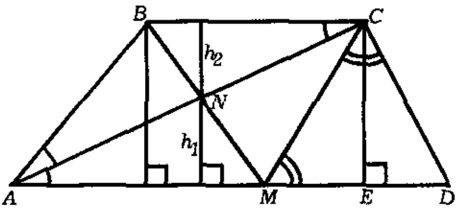


Рис. 66

$AM=AD-MD=2h(\sqrt{3}+1)-2h=2\sqrt{3}h$. Из подобия треугольников ANM и BNC выводим $\dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{NK}{NL}=\dfrac{AM}{BC}=\dfrac{2\sqrt{3}h}{2h}=\sqrt{3}$, откуда $h_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot h_1$, но $h_1+h_2=h=1$, поэтому $h_1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot h_1=1$, $h_1=\dfrac{3}{\sqrt{3}+3}=\dfrac{3(3-\sqrt{3})}{6}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$.

$S_{ANM}=\frac{1}{2}AM\cdot NK=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}h\cdot\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$ см^2. ■

10.17.3. $\operatorname{arctg}\sqrt{2},\ \pi-\operatorname{arctg}\sqrt{2},\ \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}.$

10.17.4. $\frac{185}{8}$. □ Проведем из точки P как из центра окружность радиусом PN (рис. 67). Тогда угол NPM — центральный угол этой окружности, а по условию $\angle NQM=\frac{1}{2}\angle NPM$, т. е. угол NQM вписанный и, таким образом, точка Q

лежит на построенной окружности. Опустим из точки P перпендикуляр PH на MQ. Тогда H — середина MQ и из прямоугольного треугольника PHQ:

$$PH = \sqrt{PQ^2 - QH^2} = \sqrt{MP^2 - \frac{1}{4}MQ^2} = \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{5}{2};$$

$$S_{MNPQ} = \frac{MQ + NP}{2} \cdot PH = \frac{1}{2}\left(\frac{13}{2} + 12\right) \cdot \frac{5}{2} = \frac{185}{8}. \quad \blacksquare$$

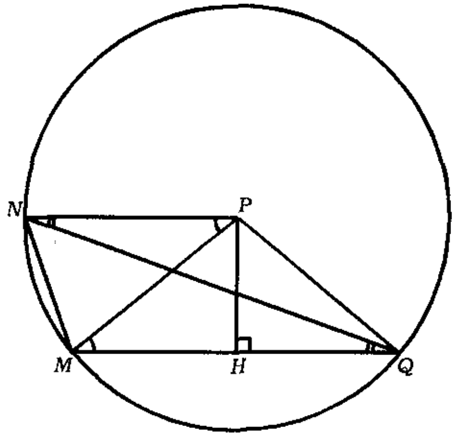


Рис. 67

10.17.5. $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

10.18.1. Площадь квадрата больше площади круга.

10.18.2. $26\cos 15^\circ = \frac{13(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$. • Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, O — центр описанной около него окружности, OM и OK — перпендикуляры, опущенные из точки O на хорды AC и BD соответственно. Пользуясь тем, что треугольники AOM и OKD равны, доказать, что наибольший угол, под которым некоторая сторона четырехугольника может быть видна из точки O, равен 150°. Учесть то, что точка O лежит вне четырехугольника $ABCD$.

10.18.3. $7\sqrt{2}$. □ Обозначим $\angle QNA = \alpha$, $\angle PMB = \beta$ (рис. 68). Тогда $\angle CBA = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle CAB = \frac{\beta}{2}$. По теореме синусов

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle ACB} = \frac{14}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{7}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$

(Здесь R — радиус описанной окружности треугольника ABC). Далее,

$$\frac{S_{AQN}}{S_{MPB}} = \frac{\frac{1}{2}AN \cdot QN \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}MB \cdot MP \cdot \sin\beta} = \frac{15\sqrt{3}}{8}. \qquad (1)$$

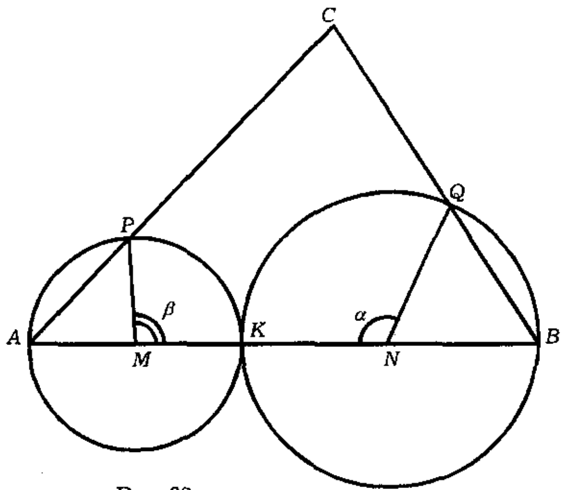


Рис. 68

По теореме косинусов из треугольников APM и BQN имеем

$$AP^2 = AM^2 + MP^2 + 2AM \cdot MP \cdot \cos\beta,$$
$$QB^2 = QN^2 + NB^2 + 2QN \cdot NB \cdot \cos\alpha,$$

поэтому $\dfrac{AP^2}{QB^2} = \dfrac{AM^2 + MP^2 + 2AM \cdot MP \cdot \cos\beta}{QN^2 + NB^2 + 2QN \cdot NB \cdot \cos\alpha} = \dfrac{4}{25} \cdot \dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$. Подставив в последнее равенство числовые данные, получим $\dfrac{1+\cos\beta}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$. С другой стороны, $AN = AK + KN = 4 + 5 = 9$, $QN = 5$, $MB = MK + KB = 2 + 10 = 12$, $MP = 2$. Подставим эти значения в равенство (1):

$$\frac{9 \cdot 5 \cdot \sin\alpha}{12 \cdot 2 \cdot \sin\beta} = \frac{15\sqrt{3}}{8}, \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{3}.$$

В результате мы получили систему тригонометрических уравнений

$$\begin{cases} \sin\alpha = \sqrt{3}\sin\beta \\ \dfrac{1+\cos\beta}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$ Решим ее, учитывая то, что $0 < \alpha,\ \beta < \pi$.

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \sin^2\alpha = 3\sin^2\beta \\ \dfrac{1+\cos\beta}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} 1-\cos^2\alpha = 3(1-\cos^2\beta) \\ \dfrac{1+\cos\beta}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение системы:

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos^2\beta} = 3, \quad \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1-\cos\beta)(1+\cos\beta)} = \frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta} \cdot \frac{3}{2+\sqrt{3}} = 3.$$

Итак,

$$\begin{cases} \dfrac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta} = 2+\sqrt{3} \\ \dfrac{1+\cos\beta}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Снова упростим первое уравнение:

$$1-\cos\alpha = (2+\sqrt{3})(1-\cos\beta) = 2+\sqrt{3}-2\cos\beta-\sqrt{3}\cos\beta,$$

$$1+\cos\alpha = \cos\beta(2+\sqrt{3})-\sqrt{3},$$

но из второго уравнения системы $1+\cos\alpha = \dfrac{3(1+\cos\beta)}{2+\sqrt{3}}$, поэтому

$$\frac{3(1+\cos\beta)}{2+\sqrt{3}} = \cos\beta(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}, \quad 3+3\cos\beta = \cos\beta(2+\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}-3,$$

$$\cos\beta(4+4\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}+6, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{3}+3}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{6},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{3}\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Вспомнив, что $R = \dfrac{7}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$, окончательно найдем

$$R = 7 : \left(\sin\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}\right) = \frac{7}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 7\sqrt{2}. \quad \blacksquare$$

10.18.4. $\dfrac{9(3\sqrt{10}-8)}{10}$. □ Угол AKL измеряется половиной дуги KL окружности O_2, а угол KBL вписанный угол той же окружности, поэтому $\angle AKL = \angle KBL = \alpha$ (рис. 69).

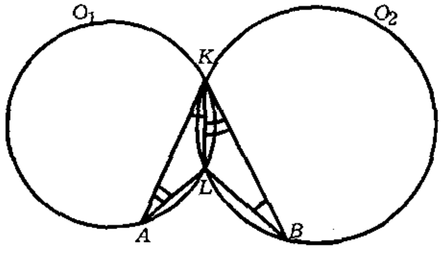


Рис. 69

Аналогично, $\angle LKB = \angle KAL = \beta$, поэтому треугольники AKL и BKL подобны и $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{AL}{LK} = \dfrac{LK}{BL}$, $\left(\dfrac{AK}{KB}\right)^2 = \dfrac{AK}{KB}\cdot\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{AL}{LK}\cdot\dfrac{LK}{BL} = \dfrac{AL}{BL} = \dfrac{1}{2}$, откуда

$BK = \sqrt{2}AK$. Обозначим $\angle AKB = \gamma$. Тогда $\gamma = \alpha + \beta$, причем $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$, так как $\operatorname{tg}\gamma = -0{,}5$. Отсюда

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}} = -\frac{1}{\sqrt{1+1/4}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos 2\gamma = \cos^2\gamma - \sin^2\gamma = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5},$$

$$\angle ALK = \angle KLB = \pi - (\alpha+\beta) = \pi - \gamma, \qquad \angle ALB = 2\angle ALK = 2\pi - 2\gamma.$$

Из треугольников ALB и AKB по теореме косинусов: $AB^2 = AK^2 + BK^2 - 2AK \cdot BK\cos\gamma = 9 + 36 - 2\cdot 3\cdot 6\cdot\cos 2\gamma$, $AK^2 + BK^2 + 2AK\cdot BK\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{117}{5}$. Учитывая то, что $BK = \sqrt{2}AK$, получаем: $AK^2 + 2AK^2 + 2\sqrt{2}AK^2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{117}{5}$, откуда $AK^2 = \frac{9(3\sqrt{10}-8)}{\sqrt{10}}$ и $S_{AKB} = \frac{1}{2}AK\cdot BK\cdot\sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}AK^2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}\cdot 9\cdot(3\sqrt{10}-8)}{2\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{9(3\sqrt{10}-8)}{10}$. ■

10.18.5. $\frac{\sqrt{54}-2}{4}$. □ Обозначим через N основание высоты, опущенной из точки P на сторону BC (рис. 70). Тогда $PN = \frac{1}{2}$ и из прямоугольного треугольника PNC получим $PC = \frac{PN}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\sin\alpha$, где $\alpha = \angle ACB = \angle ADB$.

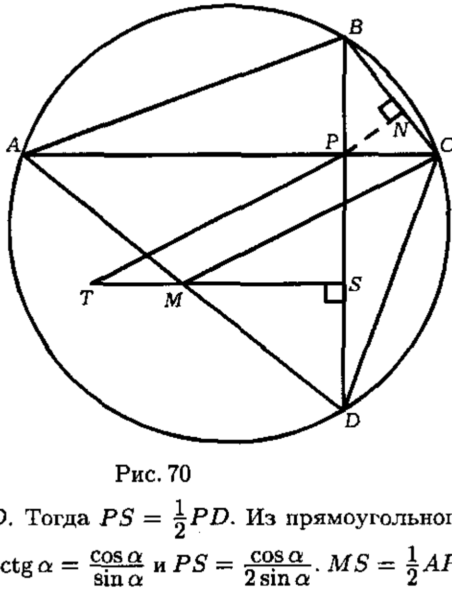


Рис. 70

Пусть $MS \perp BD$. Тогда $PS = \frac{1}{2}PD$. Из прямоугольного треугольника APD имеем $PD = AP\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и $PS = \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}$. $MS = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}$. Проведем через точку P прямую, параллельную MC и обозначим через T точку пересечения этой прямой с прямой MS. Так как $PT \parallel MC$ и $TM \parallel PC$, то четырехугольник

$PCMT$ — параллелограмм и

$$CM^2 = PT^2 = PS^2 + TS^2 = PS^2 + (TM + MS)^2 = PS^2 + (PC + MS)^2,$$

$$\text{или}\quad \frac{\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha} + \left(\frac{1}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{16}, \quad 25\sin^2\alpha - 8\sin\alpha - 8 = 0,$$

отсюда $\sin\alpha = \dfrac{4+\sqrt{216}}{25}$ (т. к. $\sin\alpha > 0$). Теперь $AD = \dfrac{AP}{\sin\alpha} = \dfrac{25}{\sqrt{216}+4} =$
$= \dfrac{25(\sqrt{216}-4)}{200} = \dfrac{2\sqrt{54}-4}{8} = \dfrac{\sqrt{54}-2}{4}$. ■

10.18.6. $\frac{1}{4}(5+\sqrt{15})$. **10.18.7.** $\dfrac{81(\sqrt{3}-1)}{2}$. **10.18.8.** 6π.

10.18.9. $\dfrac{Rr(R-r)}{R+r}$. □ Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей с радиусами r и R соответственно (рис. 71); M, E, T, N — точки касания этих окружностей с их внешними касательными; F — точка касания окружности O_2 с внутренней касательной BC, K — точка пересечения внутренних касательных BC и PS, $\angle BAC = \alpha$. Проведем прямую O_1L, параллельную EN.

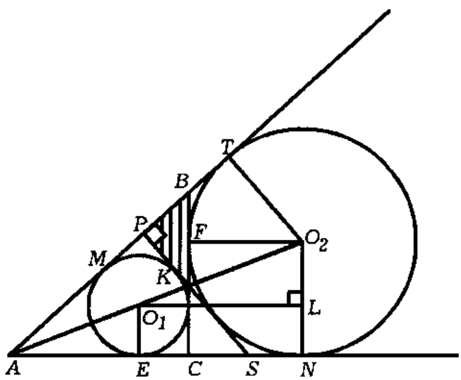


Рис. 71

Тогда из прямоугольного треугольника O_1LO_2 получаем

$$\operatorname{tg}\angle O_2O_1L = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{O_2L}{O_1L} = \frac{O_2N - LN}{EN} = \frac{O_2N - O_1E}{EC + CN} = \frac{R-r}{r+R} = \frac{R-r}{R+r}$$

(здесь использовано то, что точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе угла TAN). В силу того, что отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны, имеем $CN = CF$ и $BF = BT$, поэтому $P_{ABC} = AB + BC + CA =$ $= AB + BF + FC + CA = AB + BT + NC + CA = AT + AN = 2AN$, т. е. $AN = \frac{1}{2}P_{ABC} = p$. Из прямоугольного треугольника AO_2N имеем $AN =$ $= O_2N \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{R(R+r)}{R-r} = p$. Теперь мы можем найти площадь треугольника ABC: $S_{ABC} = pr = \dfrac{R(R+r)}{R-r}\cdot r = \dfrac{Rr(R+r)}{R-r}$. Но прямоугольный треугольник BPK, площадь которого необходимо определить, подобен треугольнику ABC, поэтому для решения задачи достаточно найти коэффициент подобия треугольников BPK и ABC. Обозначим полупериметр треугольника BPK

через p_1. Тогда $p_1 = PT = TO_2 = R$. Отсюда получаем, что коэффициент подобия $k = \frac{p_1}{p} = R : \frac{R(R+r)}{R-r} = \frac{R-r}{R+r}$ и

$$S_{BPK} = k^2 S_{ABC} = \left(\frac{R-r}{R+r}\right)^2 \cdot \frac{Rr(R+r)}{R-r} = \frac{Rr(R-r)}{R+r}. \blacksquare$$

10.19.1. $\frac{1}{4}$. □ Решим эту задачу с применением векторов (рис. 72).

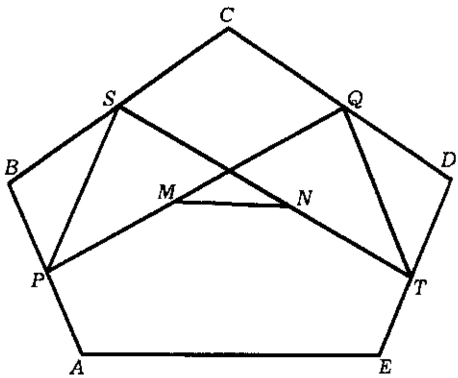


Рис. 72

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM},$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AT}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED});$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}) = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}) - \frac{1}{4}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}) =$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} \text{ и } |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AE}| = \frac{1}{4}. \blacksquare$$

10.19.2. $\dfrac{\sqrt{(b^2-n^2)(a^2+b^2-2kn) + 2\sqrt{(a^2-k^2)(b^2-n^2)}}}{n\sqrt{a^2-k^2} + k\sqrt{b^2-n^2}}$.

10.19.3. $3\sqrt{3}$. □ Обозначим $S_{AOD} = S_1$, $S_{AOB} = S_2$, $S_{BOC} = S_3$, $S_{COD} = S_4$, $\angle AOB = \alpha$ (рис. 73). Тогда $S_1 \cdot S_3 = AO \cdot OD \cdot BO \cdot CO \cdot \sin^2\alpha = S_2 \cdot S_4$. Так как площади S_1, S_2, S_3, S_4 образуют арифметическую прогрессию, то можно положить $S_1 = S - d$, $S_2 = S$, $S_3 = S + d$, $S_4 = S + 2d$ и равенство $S_1S_3 = S_2S_4$ запишется в виде $(S-d)(S+d) = S(S+2d)$, $S^2 - d^2 = S^2 + 2Sd$, $d(2S+d) = 0$. Поскольку $2S + d > 0$, то из последнего равенства следует, что $d = 0$ и $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. В этом случае легко доказать, что диагонали четырехугольника $ABCD$ делятся точкой пересечения пополам и, таким образом, этот четырехугольник — параллелограмм (рис. 74). Пусть $\angle ABD = \varphi$. Тогда из треугольника ABO по теореме синусов

$$\frac{AO}{\sin\varphi} = \frac{BO}{\sin\frac{\pi}{6}}, \quad \sin\varphi = \frac{AO\cdot\sin\frac{\pi}{6}}{BO} = \frac{AO}{2BO} = \frac{2}{(2\sqrt{7})/2} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

и $\sin\angle AOB = \sin\alpha = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\varphi\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot\sqrt{7}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$. Окончательно $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 3\sqrt{3}$. ■

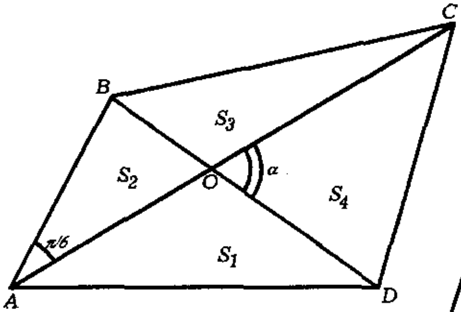


Рис. 73

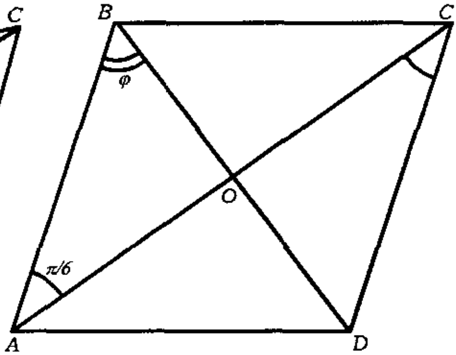


Рис. 74

10.19.4. $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 4$, $DA = 2$, $BD = \sqrt{13 + 3\sqrt{15}}$.

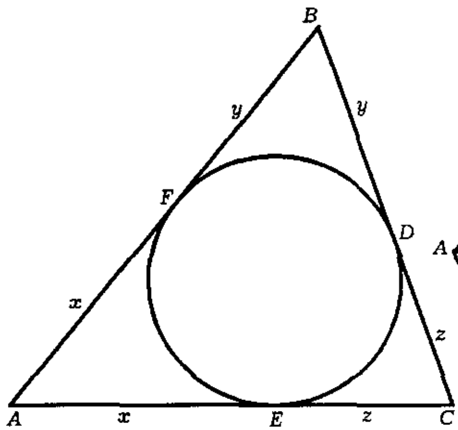


Рис. 75

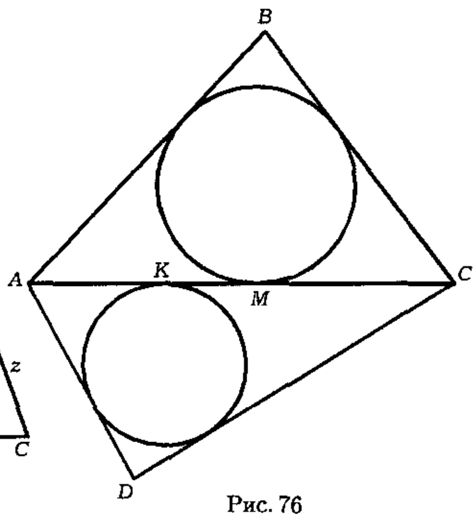


Рис. 76

□ Докажем сначала следующий факт. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно (см. рис. 75). Тогда справедливо равенство $BD = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$. В самом деле, поскольку отрезки касательных, проведенных к окружности из любой точки, равны, то можно обозначить $AE = AF = x$, $BF = BD = y$, $CD = CE = z$. Тогда $x + y + z = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$, но $x + z = AC$, поэтому $y = BD = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) - AC = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$, что и требовалось. Аналогично, $AE = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$, $CD = \frac{1}{2}(BC + AC - AB)$. Пусть теперь вписанные окружности треугольников ABC и CDA касаются диагонали AC в точках M и K соответственно (рис. 76). Применяя только что доказанные равенства, получим $AM = \frac{1}{2}(AC + AB - BC)$, $AK = \frac{1}{2}(AC + AD - CD)$, поэтому $AM - AK = \frac{1}{2}(AB - BC - AD + CD) = \frac{1}{2}\Big((AB + CD) - (BC + AD)\Big)$. Но по условию четырехугольник $ABCD$ описанный и, значит, $AB + CD = BC + AD$. Отсюда следует, что $AM - AK = 0$, т. е. $AM = AK$ и, таким образом, точки M и K совпадают. Обозначим теперь через p_1 и p_2 полупериметры треугольников ABC и ACD, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$, $DA = a$, $AC = l$ (рис. 77).

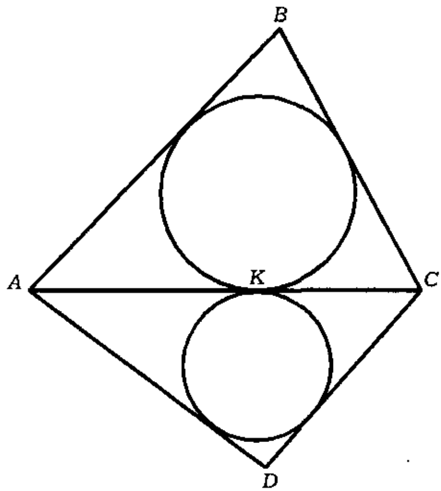


Рис. 77

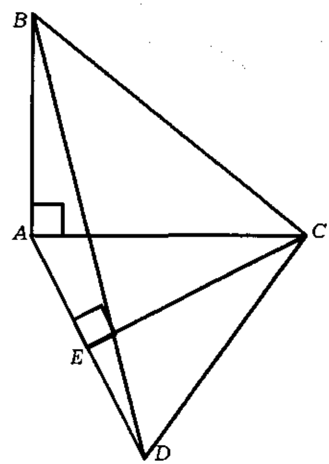


Рис. 78

По условию $S_{ABC} = 6 = p_1 r_1 = p_1 \cdot 1$, т. е. $p_1 = 6$ и $S_{ADC} = \sqrt{15} = p_2 r_2 = p_2 \frac{3}{\sqrt{15}}$, $p_2 = \frac{15}{3} = 3$. Используя формулу Герона можно записать

$$p_1(p_1 - b)(p_1 - c) \cdot (p_1 - l) = 36 \quad \text{или} \quad (6 - b)(6 - c)(6 - l) = 6.$$

Аналогично, $p_2(p_2 - a)(p_2 - d)(p_2 - l) = 15$ или $(5 - a)(5 - d)(5 - l) = 3$. Разделив первое из этих равенств на второе, получим

$$\frac{(6 - b)(6 - c)(6 - l)}{(5 - a)(5 - d)(5 - l)} = 2. \qquad (1)$$

Мы показали, что $AK = p_1 - c = p_2 - d$ или $6 - c = 5 - d$, $d = c - 1$. Аналогично, $CK = p_1 - b = p_2 - a$, $6 - b = 5 - a$, $b = a + 1$. Подставляя значения $d = c - 1$ и $b = a + 1$ в равенство (1), находим, что $\frac{(5 - a)(6 - c)(6 - l)}{(5 - a)(6 - c)(5 - l)} = 2$ или $6 - l = 10 - 2l$, откуда $l = 4$. Далее $b + c + l = 2p_1$, $b + c = 2p_1 - l = 12 - 4 = 8$, $c = 8 - b$. Подставляя найденные значения c и l в равенство $(6-b)(6-c)(6-l) = 6$, получим $(6-b)(6-(8-b))(6-4) = 6$ или $(6-b)(b-2) = 3$, $6b-b^2-12+2b = 3$, $b^2-8b+15 = 0$, $b_1 = 3$, $b_2 = 5$. Тогда $c_1 = 8 - b_1 = 5$, $c_2 = 8 - b_2 = 3$. Предположим для определенности, что $b = b_1 = 3$, $c = c_1 = 5$. В этом случае $a = b - 1 = 2$, $d = c - 1 = 4$. На основании теоремы, обратной к теореме Пифагора, заключаем, что $\angle BAC = 90°$. Проведем в равнобедренном треугольнике ACD высоту CE (рис. 78). Пусть $\angle CAE = \varphi$. Тогда $\sin\varphi = \dfrac{CE}{AC} = \dfrac{\sqrt{4^2 - 1^2}}{4} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Из треугольника BAD по теореме косинусов

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB\cos(90° + \varphi) =$$

$$= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3(-\sin\varphi) = 13 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 13 + 3\sqrt{15},$$

т.е. $BD = \sqrt{13 + 3\sqrt{15}}$. В случае $b = b_2 = 5$, $c = c_2 = 3$, аналогично получаем $a = b - 1 = 4$, $d = c - 1 = 2$, $BD = \sqrt{13 + 3\sqrt{15}}$. ■

10.19.5. 4.

10.19.6. 5 : 9. □ Обозначим $AB = a$, $AC = b$, $CK = p$, $KM = q$, $CD = c$, $DK = d$, $AD = x$, $\angle ABD = \alpha$, $\angle ACD = \beta$, $\angle CMD = \gamma$, $\angle ADB = \delta$, $\angle ADC = \varphi$ (рис. 79).

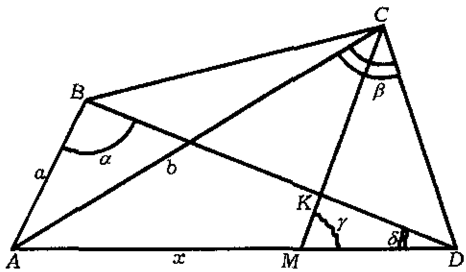


Рис. 79

По теореме синусов для треугольников ABD, ACD, CMD и CKD

$$\begin{cases} a\sin\alpha = x\sin\delta \\ b\sin\beta = x\sin\varphi \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} (p+q)\sin\gamma = c\sin\varphi \\ q\sin\gamma = d\sin\delta. \end{cases} \quad (2)$$

Так как $\alpha + \beta = 180°$, то $\sin\alpha = \sin\beta$ и из (1) получаем

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}, \qquad (3)$$

а из (2): $\dfrac{q}{p+q} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{\sin\delta}{\sin\varphi}$. Отсюда и из (3): $\dfrac{q}{p+q} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d} = \dfrac{5}{3}$, $\dfrac{p}{q} = 2$, $\dfrac{1}{\frac{p}{q} + 1} \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{a}{b}$, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{5}{9}$. ■

10.19.7. 4 : 3. **10.19.8.** 1. **10.19.9.** 2. **10.19.10.** $\dfrac{189}{25}$.

10.19.11. Можно. □ Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 80), $\angle CAD = \alpha_1$, $\angle ADB = \alpha_2$, $\angle BDC = \alpha_3$, $\angle ACD = \alpha_4$.

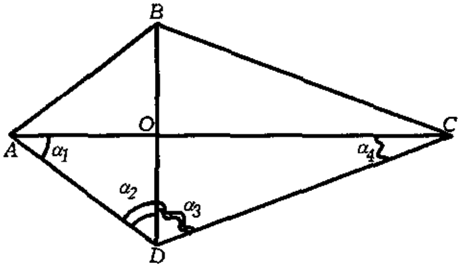


Рис. 80

Из треугольников AOD и COD по теореме синусов

$$\frac{AO}{\sin\alpha_2}=\frac{DO}{\sin\alpha_1},\qquad \frac{CO}{\sin\alpha_3}=\frac{DO}{\sin\alpha_4}.$$

Разделив первое равенство на второе, получим

$$\frac{AO}{CO}=\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3}\cdot\frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_1}.$$

Далее, по теореме косинусов из треугольника ADC получаем

$$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos(\alpha_2+\alpha_3),$$

откуда

$$\cos(\alpha_2+\alpha_3)=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}.$$

Поскольку длины AC, AD и CD рациональны, то из последнего равенства следует, что $\cos(\alpha_2+\alpha_3)$ рационален. Аналогично, рациональны $\cos\alpha_2$ и $\cos\alpha_3$, но

$$\cos(\alpha_2+\alpha_3)=\cos\alpha_2\cos\alpha_3-\sin\alpha_2\sin\alpha_3,$$
$$\text{откуда }\ \sin\alpha_2\sin\alpha_3=\cos\alpha_2\cos\alpha_3\cos(\alpha_2+\alpha_3),$$

т. е. $\sin\alpha_2\sin\alpha_3$ рационально. На основании равенства $\sin^2\alpha_3=1-\cos^2\alpha_3$ заключаем, что $\sin^2\alpha_3$ также рационален, поэтому рационально и отношение

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3}=\frac{\sin\alpha_2\cdot\sin\alpha_3}{\sin^2\alpha_3}.$$

Из треугольника ADC по теореме синусов $\frac{AD}{DC}=\frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_1}$, т. е. отношение $\frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_1}$ рационально. Итак, отношение $\frac{AO}{CO}$ равно произведению двух рациональных чисел $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3}$ и $\frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_1}$ и поэтому само рационально. Обозначим $\frac{AO}{CO}=k$, где k — рациональное число. Тогда $AO+CO=kCO+CO=CO(k+1)=AC$, откуда $CO=\frac{AC}{k+1}$ — рационально и $AO=kCO$ также рационально. Аналогично можно доказать, что длины отрезков BO и OD являются рациональными числами. ■

10.19.12. 24 *или* 72 (*в обоих случаях* $AB=2\sqrt{13}$).

11. Стереометрия

11.1.1. $\frac{\sqrt{2}}{3}d^3(2+\operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\operatorname{ctg}^3\varphi$. □ Пусть $AD = a$, $SO = H$ (рис. 1). Тогда $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SO = \frac{1}{3}a^2H$. Из прямоугольного треугольника SOM находим $H = OM\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\varphi$, а из прямоугольного треугольника AOS: $AS = \sqrt{AO^2+SO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}+H^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\varphi}$. $S_{AOS} = d\cdot AS = AO\cdot OS$ или $d\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{2}\operatorname{tg}\varphi$, откуда $a = \frac{\sqrt{2}d\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\varphi}}{\operatorname{tg}\varphi} = \sqrt{2}d\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\varphi}\operatorname{ctg}\varphi$. Окончательно получаем $V = \frac{1}{6}a^3\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}d^3(2+\operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\operatorname{ctg}^3\varphi$. ■

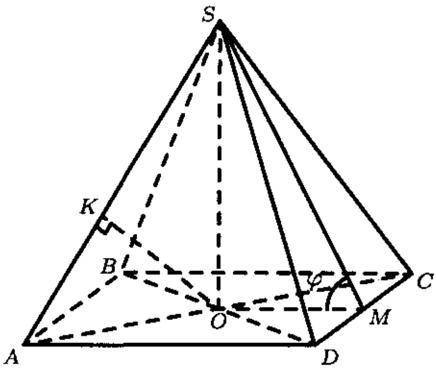


Рис. 1

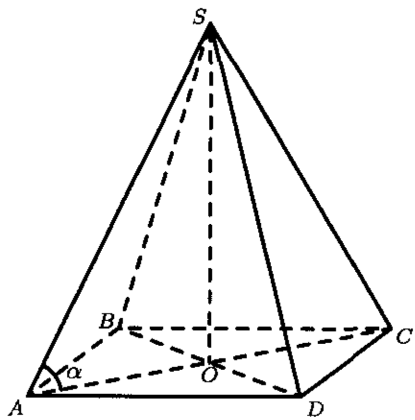


Рис. 2

11.1.2. $\frac{\left(\frac{3V\operatorname{ctg}\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\cos\alpha}$. □ $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SO = \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 2), поэтому $a = \left(\frac{6}{\sqrt{2}}V\operatorname{ctg}\alpha\right)^{\frac{1}{3}} = (3\sqrt{2}V\operatorname{ctg}\alpha)^{\frac{1}{3}}$. $AS = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha} = \frac{(3\sqrt{2}V\operatorname{ctg}\alpha)^{\frac{1}{3}}\sqrt{2}}{2\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{3V\operatorname{ctg}\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\cos\alpha}$. ■

11.1.3. $\frac{1}{3}H^3\operatorname{ctg}^2\beta\sin 2\alpha$. □ Поскольку все боковые ребра пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то основание высоты этой пирамиды совпадает с центром O описанной окружности треугольника ABC (рис. 3). Так как треугольник ABC прямоугольный (на рис. 3 $\angle ACB = 90^\circ$), то O — середина гипотенузы AB. $AC = AB\sin\alpha$, $BC = AB\cos\alpha$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BC = \frac{1}{2}AB^2\sin\alpha\cos\alpha$, но из прямоугольного треугольника ASO: $AO = SO\operatorname{ctg}\beta = H\operatorname{ctg}\beta$ и $AB = 2AO = 2H\operatorname{ctg}\beta$, поэтому $S_{ABC} = H^2\operatorname{ctg}^2\beta\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = H^2\operatorname{ctg}^2\beta\sin 2\alpha$. $V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot H = \frac{1}{3}H^3\operatorname{ctg}^2\beta\sin 2\alpha$. ■

11.1.4. 3. ● Площадь основания ABK пирамиды $ABKL$ в 2 раза меньше площади основания ABC пирамиды $ABCF$, высота пирамиды $ABKL$ также в 2 раза меньше высоты пирамиды $ABCF$, поэтому объем пирамиды $ABKL$ в 4 раза меньше объема пирамиды $ABCF$. **11.1.5.** $16(3+\sqrt{3})$. **11.1.6.** $\frac{3\pi}{32}$. ● Рассмотреть сечение пирамиды и шара плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и середины противоположных ребер основания. **11.1.7.** 2. **11.1.8.** 12. **11.1.9.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

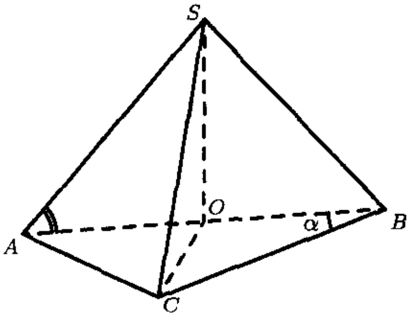


Рис. 3

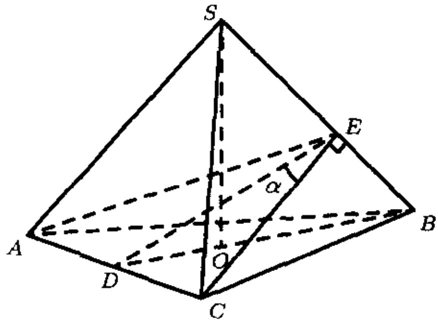


Рис. 4

11.1.10. $H\sqrt{3(3\operatorname{tg}^2\alpha-1)}$. □ Пусть D — середина ребра AC, O — основание высоты SO (рис. 4). Опустим из точки C перпендикуляр CE на прямую BS, тогда $AE \perp BS$ и ребро BS перпендикулярно плоскости AEC. Таким образом, угол AEC — линейный угол двугранного угла при ребре BS, поэтому $\angle DEC = \frac{1}{2}\angle AEC = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha = \alpha$. Обозначим $AC = a$, тогда $BD = CD\operatorname{tg}60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $2S_{DBS} = BD\cdot SO = DE\cdot BS$ (1). Из прямоугольного треугольника SOB: $BS = \sqrt{SO^2+BO^2} = \sqrt{H^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{H^2+\frac{a^2}{3}}$, а из прямоугольного треугольника EDC: $DE = DC\operatorname{ctg}\angle DEC = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. Подставим значения $BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BS = \sqrt{H^2+\frac{a^2}{3}}$, $DE = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha$ в равенство (1): $\frac{a\sqrt{3}}{2}H = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{H^2+\frac{a^2}{3}}$ или $3H^2\operatorname{tg}^2\alpha = H^2+\frac{a^2}{3}$, $a^2 = 3H^2(3\operatorname{tg}^2\alpha-1)$, $a = H\sqrt{3(3\operatorname{tg}^2\alpha-1)}$. ■

11.1.11. $S = \frac{100\pi}{\sin^2 2\beta}$, $V = \frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$. □ Пусть O — центр шара, описанного около пирамиды $SABCD$, R — его радиус, E — центр прямоугольника $ABCD$, M — середина ребра CS (рис. 5). Тогда $OM \perp CS$ и

$$R = OS = \frac{SM}{\sin\beta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{SC}{\sin\beta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{CE}{\cos\beta\sin\beta} = \frac{5}{2\sin\beta\cos\beta} = \frac{5}{\sin 2\beta}.$$

$$S = 4\pi R^2 = \frac{4\pi\cdot 25}{\sin^2 2\beta} = \frac{100\pi}{\sin^2 2\beta},\quad V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{125}{\sin^3 2\beta} = \frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}. \ ■$$

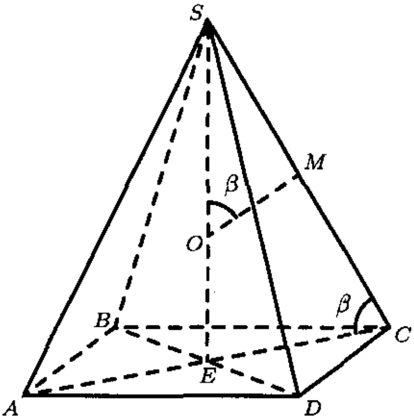


Рис. 5

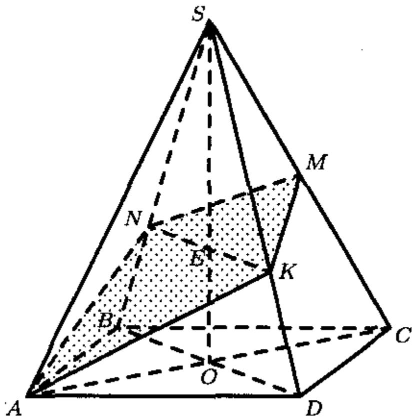


Рис. 6

11.1.12. $2\arcsin\dfrac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2}$. **11.1.13.** $\dfrac{a^2}{2}\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\alpha}$. **11.1.14.** $\arccos\dfrac{7}{15}$. **11.1.15.** 8.

11.1.16. $\dfrac{64\sqrt{3}}{3}$. □ Плоскость сечения пересекает диагональную плоскость BCD по прямой KN, параллельной BD (рис. 6). Пусть E — точка пересечения KN с высотой SO, тогда $SD:EO = 2:1$ и из подобия треугольников NKS и BDS выводим $\dfrac{NK}{BD} = \dfrac{SE}{SO} = \dfrac{2}{3}$, откуда $NK = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2}{3}\cdot 8\sqrt{2} = \dfrac{16}{3}\sqrt{2}$. Так как диагонали четырехугольника $AKMN$ перпендикулярны, то его площадь можно найти по формуле $S_{AKMN} = \dfrac{1}{2}KN\cdot AM$. Осталось определить AM. Поскольку $\angle SAC = \angle SCA = 60^\circ$, то треугольник ASC правильный. Учитывая, что $SD:DO = 2:1$, заключаем, что E — точка пересечения медиан треугольника ASC, но тогда $AM = SO = AC\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$ и $S_{AKMN} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{16}{3}\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{6} = \dfrac{64\sqrt{3}}{3}$. ■

11.1.17. $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$. **11.1.18.** 60°. ● Основание высоты пирамиды совпадает с центром ромба. **11.1.19.** 1,5. **11.1.20.** 12. **11.1.21.** $\dfrac{1}{3}a^3(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2(1+\operatorname{tg}\alpha)$.

11.1.22. $\dfrac{4a^2\cos^3\alpha}{(1+2\cos 2\alpha)^2}$. □ В сечении получается трапеция $ADMN$ (рис. 7) и для нахождения ее площади достаточно определить длины отрезков MN и KE, где E — точка пересечения MN и SL, а K и L — середины ребер AD и BC. Рассмотрим равнобедренный треугольник KSL. В нем $\angle SKL = \angle KLS = 2\alpha$, $\angle KSL = 180^\circ - 2\angle SKL = 180^\circ - 4\alpha$. Тогда в треугольнике KSE: $\angle KES = 180^\circ - \angle SKE - \angle KSE = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 4\alpha) = 3\alpha$. Из прямоугольного треугольника SKO находим $SK = \dfrac{KO}{\cos 2\alpha} = \dfrac{a}{2\cos 2\alpha}$, а по теореме синусов из треугольника KSE: $\dfrac{KE}{\sin(180^\circ - 4\alpha)} = \dfrac{KS}{\sin 3\alpha}$, $KE = \dfrac{KS\cdot\sin 4\alpha}{\sin 3\alpha} = \dfrac{a\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha\sin 3\alpha} = \dfrac{a2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha\sin 3\alpha} = \dfrac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$. Треугольники MSN и BSC

подобны, поэтому $\frac{MN}{BC}=\frac{SE}{SL}=\frac{SE}{KS}=\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$ (последнее равенство получено по теореме синусов из треугольника SKE) и $MN=BC\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}=\frac{a\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$. Итак,

$$S_{ADMN}=\frac{AD+MN}{2}\cdot KE=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a\sin\alpha}{\sin 3\alpha}\right)\cdot\frac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}=\frac{a^2(\sin 3\alpha+\sin\alpha)\sin 2\alpha}{2\sin^2 3\alpha}=$$
$$=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha\left(3-4\sin^2\alpha\right)^2}=\frac{a^2\cdot 4\cos^3\alpha}{\left(3-2(1-\cos 2\alpha)\right)^2}=\frac{4a^2\cos^3\alpha}{(1+2\cos 2\alpha)^2}.\ \blacksquare$$

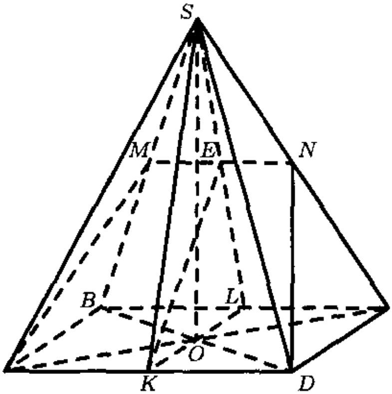


Рис. 7

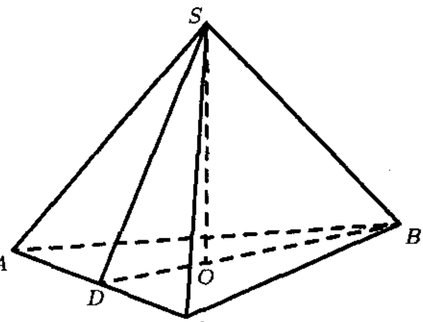


Рис. 8

11.1.23. $V=2(2-\sqrt{3})$, $S=2\sqrt{3}$.

11.1.24. 6. □ Так как боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, то основание высоты пирамиды совпадает с центром O окружности, вписанной в основание ABC пирамиды (рис. 8). Обозначим радиус этой окружности через r. Поскольку $\angle SDO=45^\circ$, то прямоугольный треугольник SOD является равнобедренным и $SO=DO=r$, поэтому $V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot SO=\frac{1}{3}pr\cdot r=\frac{8}{3}r^2$. С другой стороны, $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=pr$, т. е. $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{5^2-3^2}=8r$, $r=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ и $V=\frac{8}{3}r^2=\frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{4}=6$. ■

11.1.25. 24. **11.1.26.** $16\,\text{см}^2$. ● Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. **11.1.27.** $\frac{1}{3}l^3\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha$. **11.1.28.** $4m^2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **11.1.29.** $48\,\text{см}^3$. **11.1.30.** 55,4. **11.1.31.** 45,9.

11.1.32. 3,4. ● Основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в основание пирамиды. **11.1.33.** $98\,\text{см}^2$. **11.1.34.** 10. **11.1.35.** $\frac{5}{6}l^3\sin\beta\cos^2\beta\sin 72^\circ$. **11.1.36.** $4q$. **11.1.37.** $a^2\frac{\sqrt{4+3\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$. **11.1.38.** 14.

11.1.39. $\frac{9\sqrt{11}}{4}a^3$. □ Пусть AB — сторона основания, M — середина AB, SO — высота пирамиды (см. рис. 9). $S_{\text{осн}}=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. Так как треугольник AOB правильный, то $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и из прямоугольного треугольника SOM имеем: $SM = \sqrt{MO^2+OS^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + H^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2+4H^2}$, поэтому $S_{бок} = 6S_{ABS} = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+4H^2} = \frac{3a}{2}\sqrt{3a^2+4H^2}$. Но по условию $S_{бок} = 10S_{осн}$, т.е. $\frac{3a}{2}\sqrt{3a^2+4H^2} = 10\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ или $3a^2+4H^2 = 300a^2$, $H = a\sqrt{\frac{297}{4}} = \frac{3\sqrt{33}a}{2}$. $V = \frac{1}{3}S_{осн}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\cdot\frac{3\sqrt{33}a}{2} = \frac{9\sqrt{11}}{4}a^3$. ■

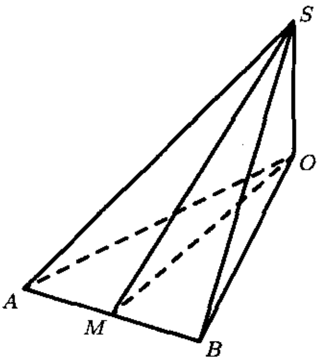


Рис. 9

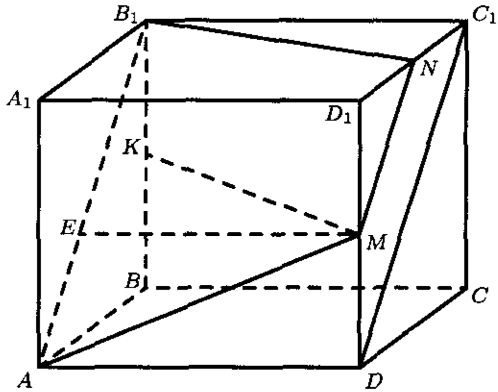


Рис. 10

11.1.40. $\frac{a^3\operatorname{tg}\varphi}{24}$, $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$. **11.1.41.** $2a^2$.

11.2.1. Верно. ● Показать, что ребро A_1B перпендикулярно плоскости B_1C_1D.

11.2.2. $P = \frac{a}{4}(5+4\sqrt{2}+\sqrt{33})$, $S = \frac{5\sqrt{41}}{32}a^2$. □ Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости AA_1B_1B и DD_1C_1C по параллельным прямым, а так как эта плоскость параллельна прямой C_1D, то и прямые, по которым она пересекает плоскости AA_1B_1B и DD_1C_1C, параллельны C_1D. Таким образом, в сечении получится равнобокая трапеция $AMNB_1$ (рис. 10). Пусть K и E — проекции точки M на отрезки BB_1 и AB_1 соответственно. Тогда из прямоугольного треугольника B_1KM имеем: $B_1M = \sqrt{KM^2+KB_1^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2} = \sqrt{2a^2+\frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{33}}{4}$. Аналогично, $AB_1 = a\sqrt{2}$, $AM = \sqrt{AD^2+DM^2} = \sqrt{a^2+\frac{9}{16}a^2} = \frac{5}{4}a$, поэтому $P_{AB_1M} = AM+AB_1+B_1M = \frac{5}{4}a + a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{33}}{4} = \frac{a}{4}(5+4\sqrt{2}+\sqrt{33})$. Далее, $AE = \frac{1}{2}(AB_1-MN) = \frac{1}{2}(a\sqrt{2}-\frac{1}{4}a\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}a}{8}$, $ME = \sqrt{AM^2-AE^2} = \sqrt{\frac{25}{16}a^2-\frac{9a^2}{32}} = a\sqrt{\frac{41}{32}}$.

$S_{AMNB_1} = \frac{1}{2}(AB_1+MN)\cdot ME = \frac{1}{2}(a\sqrt{2}+\frac{1}{4}a\sqrt{2})\cdot\frac{a\sqrt{41}}{4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{41}}{32}a^2$. ■

11.2.3. $6\sqrt{3}$. **11.2.4.** 12. ● Многогранник состоит из двух правильных пирамид с общим основанием, сторона которого в 2 раза меньше стороны основания призмы, а высота каждой из этих пирамид в 2 раза меньше высоты призмы.

11.2.5. $\frac{3\sqrt{3}}{16}H(4R^2 - H^2)$.

11.2.6. $2\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. □ Введем обозначения $AB = a$, $BB_1 = H$, $\angle AB_1O = \angle B_1OB = \alpha$. (рис. 11). Из прямоугольного треугольника AOB_1: $\sin\alpha = \frac{AO}{AB_1}$, а из прямоугольного треугольника B_1BO: $\sin\alpha = \frac{BB_1}{B_1O}$, т.е. $\frac{AO}{AB_1} = \frac{BB_1}{B_1O}$, но $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AB_1 = \sqrt{a^2+H^2}$, $BB_1 = H$, $B_1O = \sqrt{AB_1^2 - AO^2} = \sqrt{a^2+H^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+2H^2}}{\sqrt{2}}$. Таким образом, $\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2+H^2}} = \frac{H\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+2H^2}}$ или $a\sqrt{a^2+2H^2} = 2H\sqrt{a^2+H^2}$. Следовательно, $a^2(a^2+2H^2) = 4H^2(a^2+H^2)$, $a^4 + 2a^2H^2 = 4a^2H^2 + 4H^4$, $a^4 - 2a^2H^2 - 4H^4 = 0$. Обозначим $a^2 = z$. Тогда $z^2 - 2H^2z - 4H^4 = 0$, $z_{1,2} = H^2 \pm \sqrt{H^4+4H^4} = H^2(1\pm\sqrt{5})$. Поскольку $a^2 > 0$, то $a^2 = z = H^2(1+\sqrt{5})$. Теперь мы можем найти $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2+H^2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{5}}H}{2\sqrt{H^2(1+\sqrt{5})+H^2}} = \frac{\sqrt{2(1+\sqrt{5})}H}{2\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot H} =$$

$$= \frac{\sqrt{2(1+\sqrt{5})}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}} = \frac{\sqrt{2(\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5})}}{2\sqrt{5-4}} = \frac{\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Итак, $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, поэтому $\angle AB_1C = 2\alpha = 2\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. ■

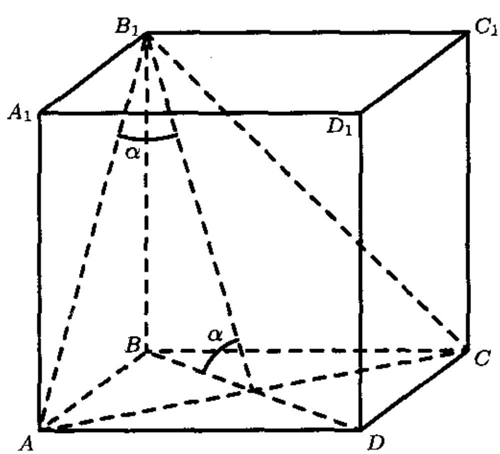


Рис. 11

11.2.7. $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **11.2.8.** $P = a\left(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$; $7 : 41$. **11.2.9.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{b^2 + 2a^2}$. **11.2.10.** $V = 48\sqrt{3}$, $S = 144 + 8\sqrt{3}$. **11.2.11.** 480 см^3. **11.2.12.** 432 см^2. **11.2.13.** $8\sqrt{6}$. **11.2.14.** $\sqrt{3}$. **11.2.15.** $\frac{a^2 b \sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

11.2.16. 53 : 73. ● Пусть $BM : MB_1 = 1 : 5$ (рис. 12). Проведем через точку M параллельно основанию ABC плоскость, которая пересечет ребра CC_1 и AA_1 в точках N и P соответственно. Тело $ABCKML$ состоит из призмы $ABCPMN$ и тела $PMNKL$, которое в свою очередь разбивается на две пирамиды $PMNL$ и $KMPL$. Для нахождения объема пирамиды $KMPL$ за основание удобно принять треугольник KMP.

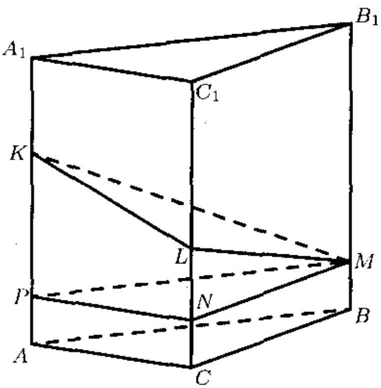


Рис. 12

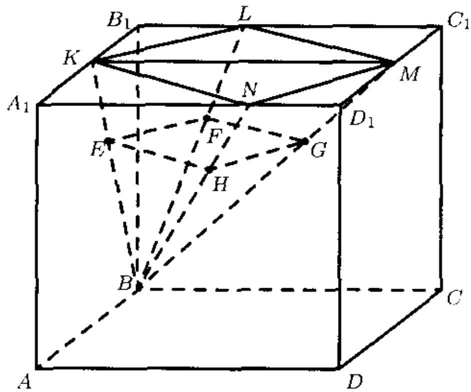


Рис. 13

11.2.17. $\frac{a^2 \sin 2\alpha}{2\cos\beta}$. **11.2.18.** $a^2\frac{\sqrt{6}}{4}$.

11.2.19. $\frac{9}{128}V$. □ См. рис. 13: $S_{KLMN} = S_{KLM} + S_{KNM} = \frac{1}{2}KM\cdot h_1 + \frac{1}{2}KM\cdot h_2 = \frac{1}{2}KM(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}B_1C_1\cdot h = \frac{1}{2}S_{A_1B_1C_1D_1}$ (здесь h_1, h_2, h — высоты треугольников KLM, KNM и параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$). Поскольку четырехугольники $EFGH$ и $KLMN$ подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{EH}{KN} = \frac{BH}{BN} = \frac{AA_2}{AA_1} = \frac{3}{4}$, то $S_{EFGH} = \frac{9}{16}S_{KLMN} = \frac{9}{32}S_{A_1B_1C_1D_1}$. Высота пирамиды $CEFGH$ равна $\frac{3}{4}AA_1 = \frac{3}{4}H$. Итак,

$$V_{CEFGH} = \frac{1}{3}S_{EFGH}\cdot H_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{32}S_{A_1B_1C_1D_1}\cdot\frac{3}{4}H = \frac{9}{128}S_{A_1B_1C_1D_1}\cdot H = \frac{9}{128}V. \blacksquare$$

11.2.20. 3. **11.2.21.** 3. **11.2.22.** $\frac{2\sqrt{2}d^2}{\cos\beta}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)\sqrt{\sin(\beta - \varphi)\sin(\beta + \varphi)}$.

11.2.23. $\frac{4\sqrt{2}h^2 \sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$. **11.2.24.** $\frac{Q^2 \sin 2\beta}{2a}$.

11.3.1. 4 см. □ Поскольку стороны треугольника ABC касаются сферы, то центр O этой сферы проектируется в центр I окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 14). Найдем высоту CD этого треугольника: $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$, а радиус вписанной окружности треугольника ABC равен

$$r = \frac{S}{p} = \frac{48}{\frac{1}{2}(10 + 10 + 12)} = \frac{48}{16} = 3.$$

Далее, $OI = \sqrt{OD^2 - DI^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см). ■

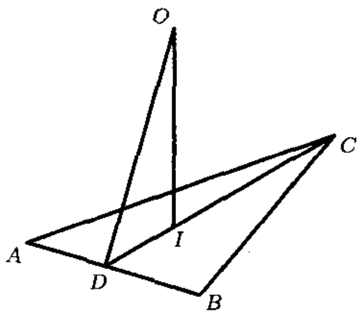


Рис. 14

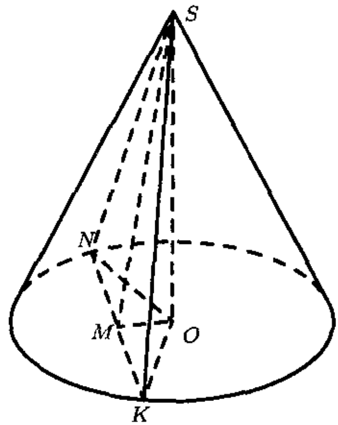


Рис. 15

11.3.2. $\frac{7}{25}$. **11.3.3.** $\frac{\sqrt{3}}{24}\pi l^3$. **11.3.4.** 2,25. **11.3.5.** 153,6. **11.3.6.** $\sqrt[3]{12}$.

11.3.7. 24 см^2. □ Пусть SKN — данное сечение (рис. 15), M — середина хорды KN. Тогда $\angle MSO = 30^\circ$ и из прямоугольного треугольника MOS находим $MO = SO \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3$, $SM = 2MO = 6$, а из прямоугольного треугольника KMO: $MK = \sqrt{OK^2 - MO^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$, поэтому $S_{KNS} = \frac{1}{2} KN \cdot SM = MK \cdot SM = 4 \cdot 6 = 24$ см^2. ■

11.3.8. 5. **11.3.9.** $\frac{\pi}{2}$. **11.3.10.** $a\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. ● Объем тела вращения равен удвоенному объему конуса с радиусом основания равным a и высотой также равной a. **11.3.11.** $0{,}75\pi$. ● Высоты описанного и вписанного конусов совпадают с высотой пирамиды, а радиус окружности основания описанного конуса в два раза больше радиуса окружности основания вписанного конуса. **11.3.12.** 0,2. **11.3.13.** $\frac{\pi}{48}(\sqrt{3} - 1)^3$. ● Рассмотрев диагональное сечение куба, показать, что высота конуса равна разности половины диагонали куба и половины его ребра. **11.3.14.** $\frac{2}{3}\pi H^3$. **11.3.15.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

11.3.16. $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{5} - \sqrt{2})^3$. □ Пусть $ABCD$ — осевое сечение двух данных конусов (рис. 16). Тогда плоскость $ABCD$ пересекает вписанный шар по большому кругу, окружность которого является вписанной в четырехугольник $ABCD$, откуда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = pr$ или $\frac{1}{2}AC \cdot BD = (AB + CD)r$,

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = (\sqrt{2} + \sqrt{5})r$, $r = \dfrac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \dfrac{3(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$. $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{5} - \sqrt{2})^3$. ■

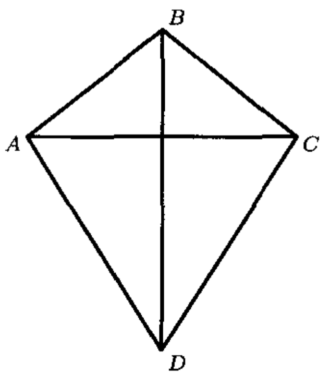


Рис. 16

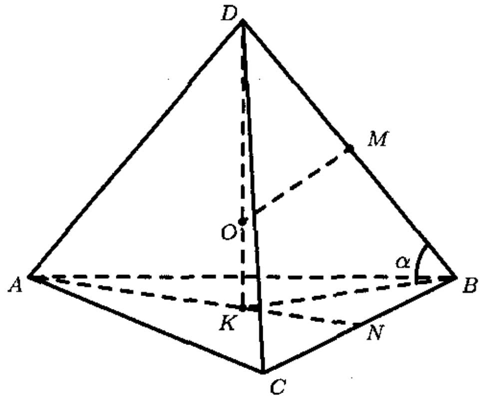


Рис. 17

11.3.17. $\dfrac{\pi a^2}{\sin^2 \alpha}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3 \sin\alpha \cos^2\alpha$. □ Пусть O — центр описанного шара, M и N — середины ребер BD и BC, K — центр правильного треугольника ABC (рис. 17). Тогда O лежит на высоте DK и из прямоугольного треугольника DMO получаем $DO = R = \dfrac{DM}{\cos \angle ODM} = \dfrac{a}{2\cos(90^\circ - \alpha)} = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, поэтому площадь поверхности шара равна $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{a}{2\sin\alpha}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}$. Из прямоугольного треугольника DBK находим $BK = a\cos\alpha$ и $DK = a\sin\alpha$, а из прямоугольного треугольника BNK: $BN = BK \cdot \cos 30^\circ = a\cos\alpha \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AN = BN \cdot \frac{3}{2} \cdot BK = \frac{3}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\cos\alpha \cdot a\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2\cos^2\alpha$. Окончательно получаем $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot DK = \frac{1}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2\cos^2\alpha \cdot a\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. ■

11.3.18. $\sqrt{\dfrac{5}{\pi}}$ м. **11.3.19.** 12π. **11.3.20.** $\dfrac{\pi \sin^3 2\alpha}{6(1+\cos\alpha)^3}$. **11.3.21.** $\frac{9}{4}\sqrt{3}$ дм^3. **11.3.22.** $\frac{7}{27}V$. **11.3.23.** 24π см^3. **11.3.24.** 16. **11.3.25.** $\frac{32}{9}\pi$ см^3. **11.3.26.** 120.

11.4.1. $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$. **11.4.2.** 4 см.
11.4.3. 3,36 см. □ Пусть $\angle ACB = 90^\circ$, $CK \perp AB$ (рис. 18); DC — перпендикуляр к плоскости ABC, $CP \perp DK$, D — точка пересечения плоскости,

проходящей через AB и составляющей угол 30° с плоскостью ABC, с перпендикуляром CD. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $DK \perp AB$, поэтому DKC — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями ABC и ABD, т.е. $\angle DKC = 30^\circ$. Далее, $2S_{ABC} = AC \cdot CB = CK \cdot AB$, откуда $CK = \dfrac{AC \cdot CB}{AB} = \dfrac{7 \cdot 24}{\sqrt{7^2 + 24^2}} = \dfrac{7 \cdot 24}{25} = \dfrac{168}{25}$. Из прямоугольного треугольника CKP: $CP = \frac{1}{2}CK = \dfrac{84}{25} = 3\dfrac{9}{25} = 3{,}36$ см. ■

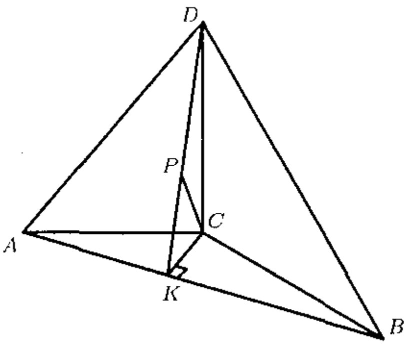


Рис. 18

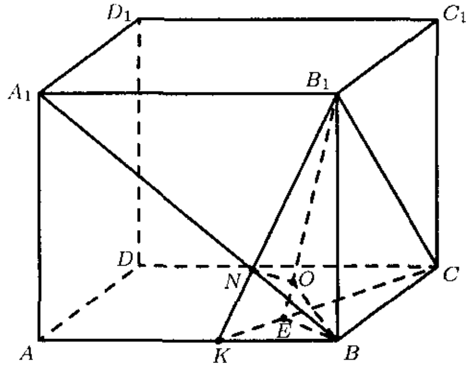


Рис. 19

11.4.4. 10. **11.4.5.** 1. **11.4.6.** 30°. **11.4.7.** $\sqrt{2}$.

11.5.1. $\operatorname{arctg} \dfrac{4}{\sqrt{5}}$. ● Так как все боковые ребра пирамиды равны, то основание высоты пирамиды совпадает с точкой O пересечения диагоналей основания $ABCD$. Пусть N — середина SC, тогда MN — прямая, по которой построенная плоскость пересекает плоскость SAC. Проведем высоту BE треугольника ABC, а через точку E — прямую EK, параллельную SO. Угол BKE — линейный угол двугранного угла между плоскостями MNB и SAC (точка K лежит на прямой MN).

11.5.2. 1 : 1. □ Пусть проведенная плоскость пересекает ребро AB в точке K, O — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на плоскость B_1KC, N — точка пересечения прямых A_1B и B_1K (рис. 19). Поскольку $B_1B \perp$ $\perp ABCD$ и $BO \perp B_1CK$, то $KC \perp B_1B$ и $KC \perp BO$, т.е. $KC \perp B_1BO$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Пусть E — точка пересечения прямой KC с плоскостью B_1BO, тогда $KC \perp BE$ и $KC \perp B_1E$. Положим $BK = x$. Из подобия треугольников KNB и A_1NB_1 следует, что $\dfrac{KB}{A_1B_1} = \dfrac{BN}{A_1N}$ или, обозначив BN через y, имеем

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{2} - y} \implies \sqrt{2} - xy = y \implies y(x+1) = \sqrt{2}x \implies y = \frac{\sqrt{2}x}{x+1}.$$

Из прямоугольного треугольника KBC найдем высоту BE:

$$2S_{KBC} = KB \cdot BC = BE \cdot KC, \quad BE = \frac{KB \cdot BC}{KC} = \frac{x \cdot 1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Аналогично, из прямоугольного треугольника B_1BE:

$$BO = \frac{BE \cdot BB_1}{B_1E} = \frac{BE \cdot BB_1}{\sqrt{BE^2 + BB_1^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}.$$

И, наконец, из прямоугольного треугольника BON: $BO = BN \cdot \sin \angle BNO = BN \sin 60^\circ$ или $\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{\sqrt{2}x}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Так как $x \neq 0$, то $2(x+1) = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2x^2+2}$, $2(x+1)^2 = 3(2x^2+1)$, $4x^2 - 4x + 1 = 0$, $(2x-1)^2 = 0$, $x = \frac{1}{2}$. Отсюда $BK = KA = \frac{1}{2}$ и $BK : KA = 1 : 1$. ■

11.5.3. $\frac{2}{\sqrt{41}}$. ● Построить сечение куба плоскостью, проходящей через вершину A и параллельной BM. Перпендикуляр, опущенный из точки B на эту плоскость, является общим перпендикуляром прямых AN и BM.

11.5.4. $BD = 2\sqrt{2}$, $S = 8(3 - 2\sqrt{2})$. ● Существует единственное сечение, являющееся квадратом. Плоскость этого сечения параллельна ребрам BD и AC.

11.5.5. $3\sqrt{3}$. ● Доказать, что четырехугольник $FOGN$ — параллелограмм с острым углом 60°. **11.5.6.** $1 - \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$.

11.5.7. $\sqrt{154}$, $\arccos \frac{12}{\sqrt{154}}$. ● Четырехугольник, полученный в сечении — параллелограмм. Сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей, одной из которых является диагональ параллелепипеда AC_1. Вторая диагональ параллелограмма проходит через середину AC_1 и лежит в плоскости BB_1D_1D. Длина этой диагонали минимальна, когда она параллельна плоскости $ABCD$, т.е. сечение с наименьшей суммой квадратов сторон проходит через середины M и N ребер BB_1 и DD_1. Основание $ABCD$ является ортогональной проекцией четырехугольника AMC_1N на плоскость $ABCD$, поэтому $S_{ABCD} = 12 = S_{AMC_1N} \cdot \cos\varphi = S_{AMC_1N} \cdot \frac{12}{\sqrt{154}}$, где φ — угол между плоскостью сечения и плоскостью $ABCD$, откуда $S_{AMC_1N} = \sqrt{154}$.

11.5.8. $\frac{\sqrt{3}c(3+\sin^2\gamma)}{12\sin\gamma}$. □ $S_{RST} = S_{R_1S_1T_1} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$, откуда $RS = c$. Пусть M — середина RS, N — точка пересечения секущей плоскости с ребром TT_1 (рис. 20), тогда $\angle MNT = \gamma$ и $MN = \frac{MT}{\sin\gamma} = \frac{c\sqrt{3}}{2\sin\gamma}$. Из прямоугольного треугольника NMS имеем

$$NS = \sqrt{MS^2 + MN^2} = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{3c^2}{4\sin^2\gamma}} = \frac{c}{2\sin\gamma}\sqrt{3+\sin^2\gamma},$$

поэтому $\sin\angle MSN = \frac{MN}{NS} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+\sin^2\gamma}}$. По теореме синусов из треугольника RNS: $RN = 2\sin\angle MNS$, но $RN = NS$, т.е. $\frac{c}{2\sin\gamma}\sqrt{3+\sin^2\gamma} = 2R\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+\sin^2\gamma}}$, откуда $R = \frac{c}{4\sqrt{3}\sin\gamma}(3+\sin^2\gamma) = \frac{\sqrt{3}c(3+\sin^2\gamma)}{12\sin\gamma}$. ■

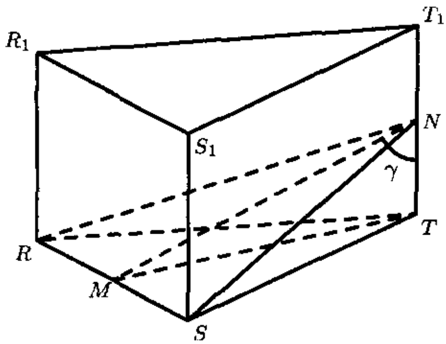


Рис. 20

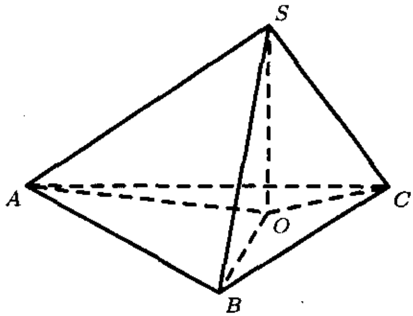


Рис. 21

11.5.9. $\dfrac{H^2\sin^2\alpha}{18\cos^6\alpha}$ *при* $0<\alpha\leqslant\arccos\sqrt{\dfrac{1}{6}}$. **11.5.10.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **11.5.11.** $\dfrac{27\pi}{128}$. **11.5.12.** $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)$. **11.5.13.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2b^2}$. **11.5.14.** $\dfrac{R\cdot|2\sqrt{3}\cos\varphi-3|}{3\sin\varphi}$. **11.5.15.** $\frac{\pi}{9}(3+2\sqrt{3})(b-a)^2+2\pi\sqrt{3}a^2$. **11.5.16.** 100. **11.5.17.** $\frac{\pi h^3}{3}(3\operatorname{tg}^2\alpha-1)$. **11.5.18.** $\arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin\alpha\sin\beta}\right)$. **11.5.19.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **11.5.20.** $\frac{1}{3}$.

11.5.21. $\sqrt{k}$. □ Обозначим через α и β величины двугранных углов с ребрами AB и BC соответственно (рис. 21). Поскольку $CS\perp ASB$ и $AS\perp BSC$, то ASB и BSC — ортогональные проекции основания ABC, поэтому $S_{ASB}=S_{ABC}\cos\alpha$, $S_{BSC}=S_{ABC}\cos\beta$, откуда $\dfrac{S_{ASB}}{S_{BSC}}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. Но треугольники AOB и BOC в свою очередь являются проекциями граней ASB и BSC, т. е. $S_{AOB}=S_{ASB}\cos\alpha$, $S_{BOC}=S_{BSC}\cos\beta$, откуда получим, что $\dfrac{S_{ASB}}{S_{BSC}}=\dfrac{S_{AOB}}{S_{BOC}}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=k\cdot\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ или $\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^2=k$, $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\sqrt{k}$ и $\dfrac{S_{ASB}}{S_{BSC}}=k\cdot\dfrac{1}{\sqrt{k}}=\sqrt{k}$. ■

11.5.22. $\sqrt{3}:2$, считая от нижнего основания. ● Пусть K — точка пересечения плоскости AB_1C с осью цилиндра, тогда отношение, в котором делится объем цилиндра плоскостью AB_1C, равно отношению, в котором делится его ось точкой K. **11.5.23.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. **11.5.24.** $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$. ● Данная сфера касается отрезка BC_1 в его середине. **11.5.25.** $\dfrac{2a^2}{9\sqrt{3}\cos\alpha}$. **11.5.26.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$. ● В сечении получится правильный шестиугольник со стороной $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, где a — длина ребра куба. **11.5.27.** $\frac{1}{3}$. **11.5.28.** $\sqrt{6}$. ● Основанием высоты пирамиды служит центр вписанной в основание пирамиды окружности, центр сферы лежит на продолжении высоты пирамиды. **11.5.29.** $\dfrac{5\pi}{12}$. ● *Рассмотреть сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр перпендикулярно данным прямым.*

11.5.30. $\dfrac{n}{m+n}\cdot\dfrac{V}{d}$. **11.5.31.** $\sqrt{22}$.

11.6.1. $\dfrac{29\sqrt{3}}{216}a^3$. □ Используем в решении задачи следующий достаточно очевидный факт. Пусть α и β — взаимно перпендикулярные плоскости, l — прямая, по которой они пересекаются, P — произвольная точка пространства, P' — точка, симметричная P относительно прямой l. Тогда P' можно получить, последовательно симметрично отражая точку P относительно плоскостей α и β.

Проведем через точку M прямую, параллельную A_1C_1 и пересекающую ребра A_1B_1 и C_1B_1 в точках A_2 и C_2 соответственно (рис. 22). Тогда плоскости BA_2C_2 и BB_1D взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой BM, поэтому призму, симметричную призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой BM можно получить в результате двух последовательных симметрий призмы $ABCA_1B_1C_1$ относительно плоскостей BB_1D и BA_2C_2. Но плоскость BB_1D является плоскостью симметрии правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (эта плоскость проходит через середину D_1 ребра AC), т. е. при симметрии относительно BB_1D призма $ABCA_1B_1C_1$ переходит в себя. Итак, призма, симметричная призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой BM, симметрична этой призме относительно плоскости BA_2C_2, поэтому и общая часть этих призм симметрична относительно плоскости BA_2C_2.

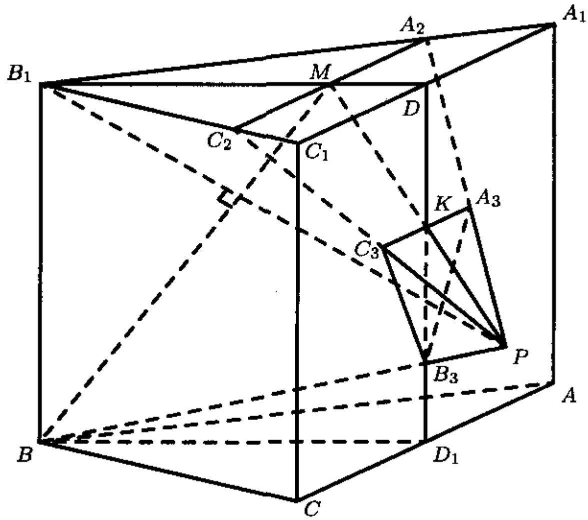


Рис. 22

Пусть P — точка, симметричная B_1 относительно плоскости BA_2C_2. Тогда объем общей части призм равен удвоенной общей части пирамиды PA_2C_2B и призмы $ABCA_1B_1C_1$. Покажем, что точка P лежит вне призмы $ABCA_1B_1C_1$. Из прямоугольного треугольника BB_1M получим

$$\operatorname{tg}\angle BMB_1 = \frac{BB_1}{B_1M} = \frac{BB_1}{\frac{5}{6}B_1D} = \frac{\frac{5}{4}a}{\frac{5}{6}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}, \text{ т. е. } \angle BMB_1 = 60^\circ,$$

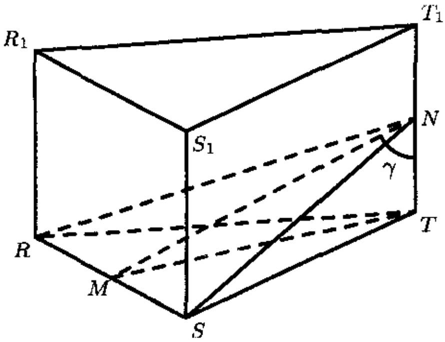


Рис. 20

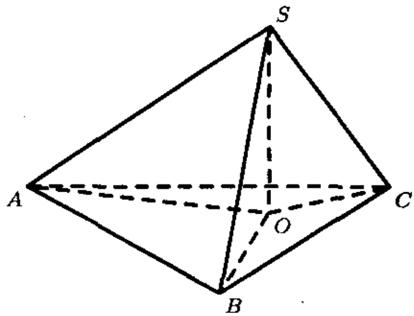


Рис. 21

11.5.9. $\dfrac{H^2\sin^2\alpha}{18\cos^6\alpha}$ при $0<\alpha\leqslant\arccos\sqrt{\dfrac{1}{6}}$. **11.5.10.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **11.5.11.** $\dfrac{27\pi}{128}$. **11.5.12.** $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)$. **11.5.13.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2b^2}$. **11.5.14.** $\dfrac{R\cdot|2\sqrt{3}\cos\varphi-3|}{3\sin\varphi}$. **11.5.15.** $\frac{\pi}{9}(3+2\sqrt{3})(b-a)^2+2\pi\sqrt{3}a^2$. **11.5.16.** 100. **11.5.17.** $\dfrac{\pi h^3}{3}(3\operatorname{tg}^2\alpha-1)$. **11.5.18.** $\arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin\alpha\sin\beta}\right)$. **11.5.19.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **11.5.20.** $\frac{1}{3}$.

11.5.21. $\sqrt{k}$. □ Обозначим через α и β величины двугранных углов с ребрами AB и BC соответственно (рис. 21). Поскольку $CS\perp ASB$ и $AS\perp BSC$, то ASB и BSC — ортогональные проекции основания ABC, поэтому $S_{ASB}=S_{ABC}\cos\alpha$, $S_{BSC}=S_{ABC}\cos\beta$, откуда $\dfrac{S_{ASB}}{S_{BSC}}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. Но треугольники AOB и BOC в свою очередь являются проекциями граней ASB и BSC, т.е. $S_{AOB}=S_{ASB}\cos\alpha$, $S_{BOC}=S_{BSC}\cos\beta$, откуда получим, что $\dfrac{S_{ASB}}{S_{BSC}}=\dfrac{S_{AOB}}{S_{BOC}}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=k\cdot\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ или $\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^2=k$, $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\sqrt{k}$ и $\dfrac{S_{ASB}}{S_{BSC}}=k\cdot\dfrac{1}{\sqrt{k}}=\sqrt{k}$. ■

11.5.22. $\sqrt{3}:2$, считая от нижнего основания. ● Пусть K — точка пересечения плоскости AB_1C с осью цилиндра, тогда отношение, в котором делится объем цилиндра плоскостью AB_1C, равно отношению, в котором делится его ось точкой K. **11.5.23.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. **11.5.24.** $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$. ● Данная сфера касается отрезка BC_1 в его середине. **11.5.25.** $\dfrac{2a^2}{9\sqrt{3}\cos\alpha}$. **11.5.26.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$. ● В сечении получится правильный шестиугольник со стороной $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, где a — длина ребра куба. **11.5.27.** $\frac{1}{3}$. **11.5.28.** $\sqrt{6}$. ● Основанием высоты пирамиды служит центр вписанной в основание пирамиды окружности, центр сферы лежит на продолжении высоты пирамиды. **11.5.29.** $\dfrac{5\pi}{12}$. ● Рассмотреть сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр перпендикулярно данным прямым.

11.5.30. $\frac{n}{m+n}\cdot\frac{V}{d}$. **11.5.31.** $\sqrt{22}$.

11.6.1. $\frac{29\sqrt{3}}{216}a^3$. □ Используем в решении задачи следующий достаточно очевидный факт. Пусть α и β — взаимно перпендикулярные плоскости, l — прямая, по которой они пересекаются, P — произвольная точка пространства, P' — точка, симметричная P относительно прямой l. Тогда P' можно получить, последовательно симметрично отражая точку P относительно плоскостей α и β.

Проведем через точку M прямую, параллельную A_1C_1 и пересекающую ребра A_1B_1 и C_1B_1 в точках A_2 и C_2 соответственно (рис. 22). Тогда плоскости BA_2C_2 и BB_1D взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой BM, поэтому призму, симметричную призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой BM можно получить в результате двух последовательных симметрий призмы $ABCA_1B_1C_1$ относительно плоскостей BB_1D и BA_2C_2. Но плоскость BB_1D является плоскостью симметрии правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (эта плоскость проходит через середину D_1 ребра AC), т. е. при симметрии относительно BB_1D призма $ABCA_1B_1C_1$ переходит в себя. Итак, призма, симметричная призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой BM, симметрична этой призме относительно плоскости BA_2C_2, поэтому и общая часть этих призм симметрична относительно плоскости BA_2C_2.

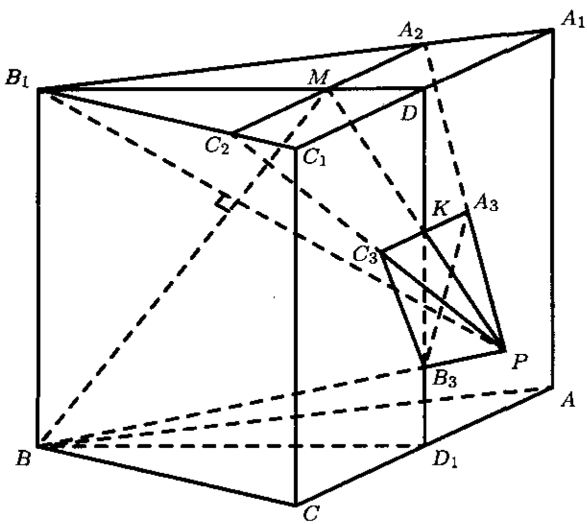


Рис. 22

Пусть P — точка, симметричная B_1 относительно плоскости BA_2C_2. Тогда объем общей части призм равен удвоенной общей части пирамиды PA_2C_2B и призмы $ABCA_1B_1C_1$. Покажем, что точка P лежит вне призмы $ABCA_1B_1C_1$. Из прямоугольного треугольника BB_1M получим

$$\operatorname{tg}\angle BMB_1 = \frac{BB_1}{B_1M} = \frac{BB_1}{\frac{5}{6}B_1D} = \frac{\frac{5}{4}a}{\frac{5}{6}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3},\ \text{т. е. } \angle BMB_1 = 60^\circ,$$

но $\angle BMP = \angle BMB_1 = 60^\circ$, откуда $\angle PMD = 180^\circ - \angle B_1MP = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Пусть K — точка пересечения прямой MP с плоскостью AA_1C_1C. Тогда $MK = 2MD = \frac{1}{3}B_1D$, но $MP = MB_1 = \frac{5}{6}B_1D > \frac{1}{3}B_1D = MK$, поэтому точка P лежит вне призмы $ABCA_1B_1C_1$.

Обозначим через A_3, B_3, C_3 точки пересечения прямых PA_2, PB, PC_2 с гранью AA_1C_1C. Тогда объем общей части призм равен удвоенной разности объемов пирамид PA_2BC_2 и $PA_3B_3C_3$. Так как $BB_1 \perp A_1B_1C_1$, а точки P и B_1 симметричны относительно плоскости BA_2C_2, то $BP \perp PA_2C_2$ и $B_2P \perp A_3B_3C_3$. Поэтому

$$V_{BPA_2C_2} = \frac{1}{3}\cdot BP\cdot S_{PA_2C_2} = \frac{1}{3}\cdot BB_1\cdot S_{B_1A_2C_2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}a\cdot\left(\frac{5}{6}a\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{125\sqrt{3}a^3}{36\cdot 48}.$$

Далее, $\angle B_2BD_1 = 90^\circ - \angle B_1BB_2 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ и из прямоугольного треугольника B_2BD_1: $BB_2 = \dfrac{BD_1}{\cos 30^\circ} = \dfrac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = a$ и $B_2P = BP - BB_2 = BB_1 - BB_2 = \frac{5}{4}a - a = \frac{a}{4}$. Итак,

$$V_{B_2PA_3C_3} = \frac{1}{3}\cdot B_2P\cdot S_{PA_3C_3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}A_2C_2\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a}{12}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}a\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{48\cdot 4}a^3.$$

Окончательно, $V = 2(V_{BPA_2C_2} - V_{B_2PA_3C_3}) = 2\sqrt{3}a^3\left(\frac{125}{36\cdot 48} - \frac{1}{4\cdot 48}\right) = \sqrt{3}a^3\frac{2\cdot 116}{36\cdot 48} = \frac{29\sqrt{3}}{216}a^3$. ■

11.6.2. $\frac{5\sqrt{3}}{48}a^3$. **11.6.3.** $\frac{28\pi}{1215}$. **11.6.4.** $\frac{27\pi}{80}$. **11.6.5.** 10. **11.6.6.** 22.

11.6.7. $\frac{26}{11\sqrt{11}}\pi$. ● Сечением сферы плоскостью $KLMN$ является окружность, вписанная в прямоугольник $KLMN$, поэтому прямоугольник $KLMN$ является квадратом, а сфера касается сторон MN, NK, KL, LM квадрата $KLMN$ в их серединах Q_1, E_1, P_1, F_1 соответственно (рис. 23). Так как отрезки

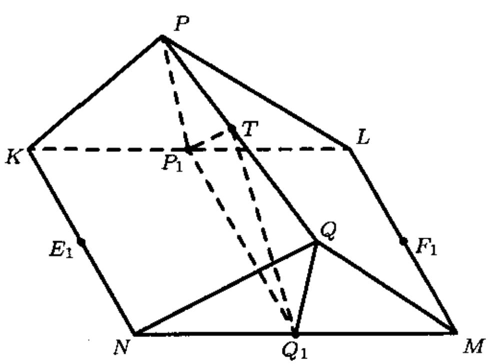


Рис. 23

касательных, проведенных к сфере из одной и той же точки, равны, а Q_1 и

P_1 — середины MN и KL, то $NQ = MQ$ и $KP = LP$, поэтому $QQ_1 \perp MN$ и $PP_1 \perp KL \parallel MN$ (QQ_1 и PP_1 — медианы равнобедренных треугольников MQN и KPL, совпадающие с их высотами). Итак, $MN \perp QQ_1$ и $MN \perp PP_1$ и по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $MN \perp PQQ_1P_1$. Поскольку *прямые* E_1F_1 *и* MN *параллельны, то* $E_1F_1 \perp PQQ_1P_1$. *Точки* E_1 *и* F_1 лежат на сфере, а плоскость PQQ_1P_1 проходит через середину отрезка E_1F_1 и перпендикулярна ему, поэтому центр сферы лежит в плоскости PQQ_1P_1. Пусть T — точка касания сферы с отрезком PQ. Тогда радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около треугольника P_1TQ_1.

11.6.8. $\dfrac{8(2\sqrt{2}-1)}{7}$. ● Точки H и C совпадают. **11.6.9.** $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\sqrt{3}q}{1+q}\operatorname{ctg}\varphi\right)$ при $0 < q \leqslant \frac{1}{2}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. **11.6.10.** $\dfrac{8\sqrt{3}d^2\sin\beta}{1+3\cos^2\beta}$. **11.6.11.** $\dfrac{343\sqrt{13}\pi}{18}$.

11.6.12. $\frac{5}{18}$. □ Убедимся сначала в справедливости следующего простого факта. Пусть сфера с центром O касается граней α и β двугранного угла в точках C и D соответственно (рис. 24), точки A и B лежат на ребре l этого угла. Тогда $\angle CAB = \angle DAB$.

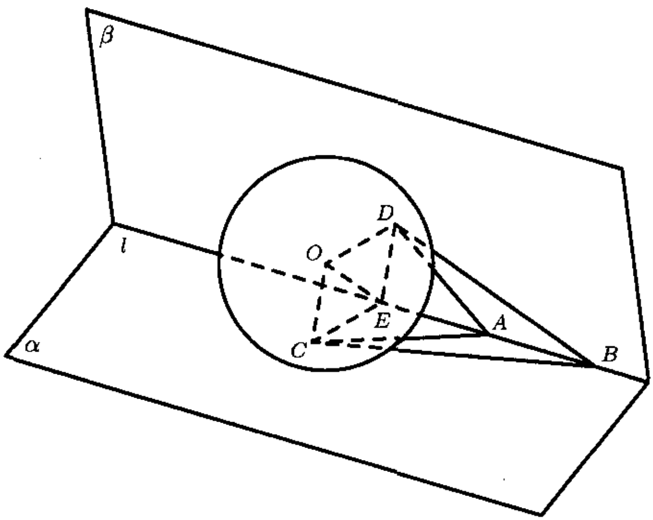


Рис. 24

В самом деле, пусть плоскость COD пересекает ребро l в точке E. Из равенства прямоугольных треугольников OCE и ODE (гипотенуза OE общая, а катеты OC и OD равны как радиусы сферы) заключаем, что $CE = DE$, но тогда прямоугольные треугольники CEA и DEA также равны по катетам, поэтому $\angle CAE = \angle DAE$ и $\angle CAB = \angle DAB$. Из доказанного утверждения следует, что если сфера, вписанная в трехгранный угол, касается одной из его *граней в точке, лежащей на биссектрисе плоского угла, то два других плоских* угла равны.

Поскольку все углы при вершине M различны, то сфера касается грани KLN в центре I вписанной в эту грань окружности. Пусть C, D, E — точки касания сферы с гранями KMN, KML, MLN соответственно (рис. 25). Так как $\angle KMC = \angle KMD$, $\angle LMD = \angle LME$, $\angle NME = \angle NMC$, то

$$2(\angle NMC + \angle LMD + \angle KMD) = \angle KMN + \angle KML + \angle NML,$$
$$2\angle NMC + 2(\angle LMD + \angle KMD) = \angle KMN + \angle KML + \angle NML,$$
$$2\angle NMC + 2\angle KML = \angle KMN + \angle KML + \angle NML,$$

откуда

$$\angle NMC = \tfrac{1}{2}(\angle KMN + \angle NML - \angle KML) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2} + \left(\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}\right) - 3\operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\tfrac{1}{3},$$
$$\angle KMC = \angle KMD = \angle KMN - \angle NMC = \tfrac{\pi}{2} - \left(\tfrac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}\right) = 2\operatorname{arctg}\tfrac{1}{3},$$
$$\angle LMD = \angle LME = \angle NML - \angle NME = \angle NML - \angle NMC =$$
$$= \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}.$$

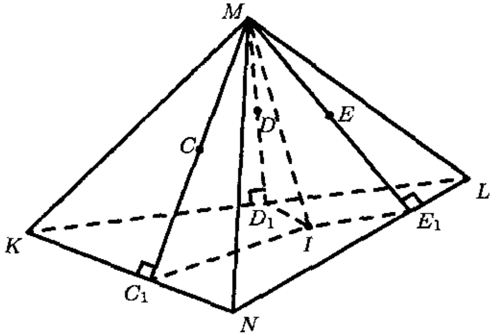


Рис. 25

Далее, поскольку $\angle NKM = \angle LKM$, $\angle KLM = \angle NLM$, $\angle LNM = \angle KNM$, то боковые ребра KM, LM, NM пирамиды проектируются в биссектрисы грани KLN, поэтому центр O вписанной сферы лежит на высоте пирамиды и, таким образом, точка касания I совпадает с основанием высоты пирамиды. Отсюда получаем, что $MC \perp KN$, $MD \perp KL$, $ME \perp NL$. Обозначим через C_1, D_1, E_1 точки касания вписанной в треугольник KLN окружности с его сторонами NK, KL, LN соответственно. Тогда отрезки MC_1, MD_1, ME_1 являются высотами треугольников KMN, KML, LMN и содержат соответственно точки C, D, E. Из прямоугольного треугольника KC_1M:

$$KC_1 = KM \cdot \sin\angle KMC_1 = KM \cdot \sin\angle KMC = \frac{5}{4}\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) =$$
$$= \frac{5}{4}\cdot 2\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\cdot\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2}\,\frac{\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}\cdot\cos^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) =$$
$$= \frac{5}{2}\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{9}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{9}{3\cdot 10} = \frac{3}{4};$$
$$MC_1 = \sqrt{KM^2 - KC_1^2} = \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{9}{16}} = 1.$$

Так как $IC_1 = ID_1 = IE_1$, то $MC_1 = MD_1 = ME_1 = 1$. В прямоугольном треугольнике KMN: $MC_1^2 = 1 = KC_1 \cdot C_1N = \frac{3}{4}C_1N$, откуда $C_1N = \frac{3}{4}$. Из прямоугольного треугольника MD_1L находим $D_1L = MD_1 \cdot \operatorname{tg} \angle LMD_1 = 1 \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$. Обозначим $KC_1 = x$, $NC_1 = y$, $LD_1 = z$, $LN = k$, $NK = l$, $KL = n$, Поскольку отрезки касательных, проведенных к окружности из одной и той же точки, равны, то $KC_1 = KD_1$, $LD_1 = LE_1$, $NE_1 = NC_1$ и

$$2x + 2y + 2z = k + l + n = 2p \Longrightarrow x + y + z = p,$$

$$x = p - y - z = p - k, \quad y = p - x - z = p - n, \quad z = p - x - y = p - l.$$

Теперь можно найти площадь треугольника KLN по формуле Герона:

$$S_{KLN} = \sqrt{p(p-k)(p-n)(p-l)} = \sqrt{(x+y+z) \cdot xyz} =$$
$$= \sqrt{(KC_1 + C_1N + D_1L) \cdot KC_1 \cdot C_1N \cdot D_1L} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{29}{4 \cdot 3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{29}}{6}.$$

Тогда $C_1I = r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{29} \cdot 12}{6 \cdot 29} = \frac{2}{\sqrt{29}}$ и из прямоугольного треугольника MIC_1 имеем: $H = MI = \sqrt{MC_1^2 - C_1I^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$. Окончательно получаем, что $V_{KLMN} = \frac{1}{3}S_{KLN} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{29}}{6} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{5}{18}$. ■

11.6.13. $8\sqrt{2}$. □ Геометрическим местом точек, равноудаленных от граней двугранного угла, является пара взаимно перпендикулярных плоскостей, одна из которых делит пополам данный двугранный угол, а вторая — двугранный угол, смежный с данным. Таким образом, центр I сферы, касающейся всех граней пирамиды, принадлежит пересечению указанных геометрических мест всех двугранных углов этой пирамиды.

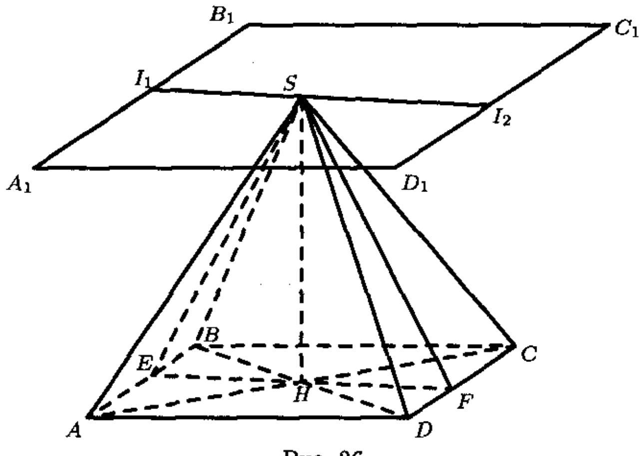


Рис. 26

Пусть H — основание высоты пирамиды $SABCD$ (рис. 26). Проведем через H высоту ромба EF. Тогда SEF — линейный угол двугранного угла при ребре AB, SFE — линейный угол двугранного угла при ребре CD, а ESF — линейный угол двугранного угла между плоскостями ASD и BSC, поэтому биссектральные плоскости указанных двугранных углов и двугранных углов, смежных с ними, пересекут плоскость ESF по биссектрисам внутренних и внешних углов равнобедренного треугольника ESF. Эти биссектрисы пересекаются по три в четырех точках I_1, I_2, I_3, I_4 (рис. 27), причем вершины треугольника ESF лежат на сторонах треугольника $I_1I_2I_3$, а точка I_4 совпадает с точкой пересечения высот треугольника $I_1I_2I_3$.

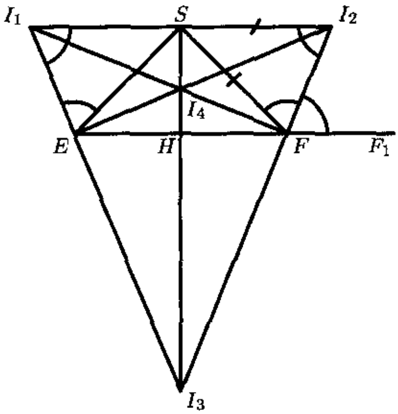


Рис. 27

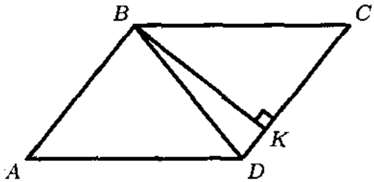


Рис. 28

Так как $\angle F_1FI_2 = \angle SFI_2$, а $SI_2 \parallel EF_1$, то $\angle SFI_2 = \angle SI_2F$ и треугольник SFI_2 равнобедренный. Если центр I сферы совпадает с точкой I_4, то $I_4H = HF = 2$, но тогда $\angle HFS = 2\angle HFI_4 = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$, что невозможно, поскольку $\angle HFS = 2\angle HES$. Аналогично, центр сферы не может лежать в точке I_4 (в этом случае $\angle I_1SE = 2\angle I_2SF = 90^\circ$, что также невозможно). Итак, центр сферы должен находиться в плоскости, проходящей через вершину S пирамиды и параллельной ее основанию $ABCD$, и одновременно лежать на прямых, параллельных AB и CD и проходящих соответственно через точки I_1 и I_2. Если провести через высоту SH плоскость, перпендикулярную сторонам AD и BC ромба, то аналогичные рассуждения приведут к выводу о том, что центр сферы лежит в указанной плоскости на прямых, параллельных AD и BC. Таким образом, центр сферы должен лежать в одной из четырех вершин A_1, B_1, C_1, D_1 ромба $A_1B_1C_1D_1$, гомотетичного ромбу $ABCD$ с коэффициентом гомотетии равным $\dfrac{I_1I_2}{EF} = \dfrac{SI_2}{HF} = \dfrac{SF}{HF} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot HF}{HF} = \sqrt{2}$ (высота пирамиды SH равна радиусу сферы, т. е. 2, поэтому прямоугольный треугольник SHF равнобедренный). Предположим, что центр сферы совпадает с одной из точек A_1 или C_1. Тогда расстояние от A_1 до прямой AC равно радиусу сферы, т. е. 2, но по условию задачи это расстояние равно $\frac{2\sqrt{2}}{3}AB$, т. е. $\frac{2\sqrt{2}}{3}AB = 2$, откуда $AB = \frac{3}{\sqrt{2}} < 4 = EF$, что невозможно, так как $AB > EF$. Если же центр сферы лежит в точке B_1 или точке D_1, то $BH^2 = \left(\frac{B_1S}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{B_1S^2}{2} = \frac{1}{2}(B_1H^2 - SH^2)$, но B_1H — расстояние от центра сферы до прямой AC, поэтому $B_1H = \frac{2\sqrt{2}}{3}AB$ и $BH^2 = \frac{1}{2}(B_1H^2 - SH^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}AB^2 - 4\right) = \frac{4}{9}AB^2 - 2$. Обозначим $AB = x$. Тогда $BH^2 = \frac{4}{9}x^2 - 2$. С другой стороны, $BH^2 = \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 = \frac{1}{4}BD^2$. Проведем в треугольнике DBC высоту BK (рис. 28). Из прямоугольного треугольника BKD имеем: $BD^2 = DK^2 + BK^2 = DK^2 + 16$, а из прямоугольного треугольника BKC: $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{x^2 - 16}$, поэтому $DK = DC - CK = x - \sqrt{x^2 - 16}$ и $BD^2 = (x - \sqrt{x^2 - 16})^2 + 16$. Таким образом, $BH^2 = \frac{4}{9}x^2 - 2 = \frac{1}{4}BD^2 = \frac{1}{4}\left((x - \sqrt{x^2 - 16})^2 + 16\right)$, откуда $10x^4 - 171x^2 - 162 = 0$. Положим $x^2 = z$, тогда $10z^2 - 171z - 162 = 0$. Положительный корень этого уравнения равен 18, т.е. $x^2 = 18$, $x = 3\sqrt{2}$. Теперь можно найти объем пирамиды: $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot EF \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4 \cdot 2 = 8\sqrt{2}$. ■

11.6.14. 1. ● Сфера касается плоскости ABC в центре описанной около треугольника ABC окружности. **11.6.15.** $\frac{7}{20}$, $\frac{9dS}{4}$.

11.6.16. $\frac{d^2 \sin\varphi \sin\alpha(1 + 2\cos 2\varphi)}{8\cos^3\varphi} \cdot \sqrt{4\cos^2\alpha \cos^2\varphi + \sin^2\alpha(1 - 2\cos 2\varphi)^2}$ при $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{4} \cdot \frac{d^2 \sin 2\alpha \sin 2\varphi}{2\sin\varphi - \cos 2\varphi} \cdot \sqrt{4\cos^2\varphi + \operatorname{tg}^2\alpha(2\sin\varphi - \cos 2\varphi)^2}$ при $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$. ● При $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ сечение является трапецией, а при $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$ — треугольником. **11.6.17.** Два значения $R_1 = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{3\cos\gamma - 1}{\cos\gamma}}$ (сечение параллельно плоскости основания) и $R_2 = h\sqrt{2} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2\gamma}}$ (сечение параллельно боковой грани) при $0 < \gamma \leqslant \arccos\frac{1}{3}$; при $\arccos\frac{1}{3} < \gamma < \frac{\pi}{2}$ одно значение $R = R_2$. **11.6.18.** 3 : 1. **11.6.19.** $\frac{(R+r)^2}{2\left(R + r + \sqrt{R^2 + 6Rr + r^2}\right)}$. ● Рассмотреть сечения пар цилиндров с параллельными осями плоскостями, перпендикулярными их осям и проходящими через центр искомой сферы. **11.6.20.** $\sqrt{3} - 1$. ● Плоскости граней ABC и KMM_1K_1, а также ASB и KLL_1K_1 совпадают. **11.6.21.** $\frac{27}{20}$. ● Сечением призмы данной плоскостью является пятиугольник KLL_1MK_1 такой, что $LL_1 = KK_1$, $K_1M = ML_1$, LL_1 перпендикулярна AB, KL перпендикулярна A_1B. **11.6.22.** $\left(\frac{2R\sqrt{r} + r\sqrt{3R + r}}{2(R - r)}\right)^2$. ● Использовать то, что если две окружности радиусами r и R касаются внешним образом, то длина отрезка их общей внешней касательной с концами в точках касания равна $2\sqrt{rR}$. **11.6.23.** $a\sqrt{3{,}9}$. ● Прямые PR и SQ касаются сферы. **11.6.24.** $\frac{\sqrt{21}}{4}$. **11.6.25.** 2. **11.6.26.** $\sqrt{247}$. **11.6.27.** 52. ● Спроектировать пирамиду $SABC$ на плоскость, перпендикулярную ребру BC. **11.6.28.** $\frac{465}{98}$. **11.6.29.** $\frac{1}{16}(36 + 31\sqrt{2})$. ● Искомая сфера проходит через описанную окружность треугольника MNK.

Ответы на варианты письменных работ

Вариант 1. **1.** $\left(-\infty; -\frac{11}{6}\right] \bigcup \{0\}$. **2.** -3. **3.** $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **4.** а) $1:1$, $5:9$; б) $5:21$. **5.** $a \in (-\infty; 3] \bigcup [4; +\infty)$. **6.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{5}}$.

Вариант 2. **1.** $\arccos(-\sqrt{-3\cos\alpha - 1}) < \frac{19\pi}{24}$. **2.** $\frac{2\pi}{3} + 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
3. $\left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \bigcup \left(0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \bigcup \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$. **4.** $2\sqrt{3\sqrt{2}-4}$. **5.** $\frac{2\pi}{3} + 2\pi l$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. **6.** $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Вариант 3. **1.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.** $(-\infty; 3) \bigcup (4{,}2; +\infty)$. **3.** 1. **4.** $x = \log_2 3$, $y = \log_3 2$. **5.** $\sqrt{5}$ **6.** $\sqrt{c^2 - ab}$. **7.** $\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4}$. **8.** $(-3^a; -1) \bigcup (1; 3^a)$ при $a \in (0; 0{,}5)$; $(-\infty; -3^a) \bigcup (3^a; +\infty)$ при $a \in (0{,}5; +\infty)$. Длина промежутка равна 6 при $a = 1$.

Вариант 4. **1.** $(-\infty; -2] \bigcup (-1; 0) \bigcup (0; +\infty)$. **2.** -5; -6; $-\frac{7\pi}{4}$. **3.** $\left(-\frac{1}{3}; 0\right) \bigcup (0; 2) \bigcup (2; 3)$. **4.** $\sqrt{6}$. **5.** 24. **6.** $a = \pm 1$. **7.** $2^{1001} - 4$.

Вариант 5. **1.** $\frac{(-1)^n}{3} \arcsin\frac{-3+\sqrt{29}}{8} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.** $(-\infty; -2] \bigcup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \bigcup \left(1; \frac{-3+\sqrt{73}}{4}\right]$. **3.** -1. **4.** $\frac{22}{7}$. **5.** $\left[\frac{5}{6}; 1\right) \bigcup \left(1; \frac{3}{2}\right]$. **6.** $7:5$.

Вариант 6. **1.** 3. **2.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **4.** $y \geqslant 0$. **5.** $\frac{2}{3}$ л. **6.** $\frac{\sqrt{6}}{12}$ **7.** $(-\infty; -1] \bigcup [1; +\infty)$ при $b \leqslant -1$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}; -1\right] \bigcup [1; +\infty)$ при $-1 < b \leqslant 0$.

Вариант 7. **1.** $(-3; -2) \bigcup (-2; 3]$. **2.** $A = 2 > 1{,}999$. **3.** $1 + \frac{\pi}{2}$. **4.** $90°$, $25°$, $65°$. **5.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. **6.** $n = 6$; $S_6 = -66$. **7.** 384.
8. $\left(-\frac{1+\sqrt{167}}{2}; -\frac{13}{2}\right] \bigcup \left[5; \frac{-1+\sqrt{167}}{2}\right) \bigcup \{-2\pi\} \bigcup \{0\}$.

Вариант 8. **1.** 5. **2.** $2 + \sqrt{3}$. **3.** $\frac{9}{7}$. **4.** $\pm\frac{1}{6}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{6}$. **5.** $\frac{3}{2}$. **6.** $50\sqrt{2}$.

Вариант 9. **1.** $\frac{13-\sqrt{21}}{2}$. **2.** Первый член 1 или 4, разность равна $-\frac{1}{5}$. **3.** 1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{324}{25}$. **4.** Сначала следует выступить в газете, а затем 2 раза на радио и 1 раз на телевидении. **5.** $(-\infty; -4) \bigcup \{0\} \bigcup \{2\} \bigcup (4; +\infty)$. **6.** $a \in (-\infty; -1] \bigcup \{0\} \bigcup (2; +\infty)$.

Вариант 10. **1.** $(-3; -2) \bigcup (3; 4]$. **2.** $(0; 3]$. **3.** 24 дня. **4.** $\frac{42\sqrt{51}a^2}{625}$. **5.** $-\frac{\pi}{26}$; $\frac{\pi}{34}$. **6.** $\frac{d^3}{3}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2 2\beta}$. **7.** При $b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ — единственное решение

$\left(\frac{1}{\sqrt{5}};0;0\right)$. При $b=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ — два решения: $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{5}};1;\frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{5}};-1;-\frac{\pi}{4}\right)$.

Вариант 11. **1.** $\left(\frac{4}{7};\frac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$. **2.** $7^{\log_2\left(\frac{\sqrt{41}-5}{2}\right)}$. **3.** $(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n;(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k)$, $(\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n;(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k)$, $k,n\in\mathbb{Z}$. **4.** $p=9$; $[-1;3]$. **5.** $\frac{1820\sqrt{21}}{341}$. **6.** $a\in$ $\in(\frac{5'}{11};\frac{6}{13}]$.

Вариант 12. **1.** $\frac{2}{3}$. **2.** $(-\infty;-9)\bigcup(\frac{2}{3};1)\bigcup[\frac{11}{2};+\infty)$. **3.** 15. **4.** $\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}+$ $+\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **5.** $y=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{6}k+\pi n$, $z=-\frac{\pi}{12}+\pi k$, $k,n\in\mathbb{Z}$.

Вариант 13. **1.** 1; $\frac{30-\sqrt{10}}{20}$. **2.** $A=1>\frac{5}{7}$. **3.** $\frac{\pi}{5}k$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3-\sqrt{17}}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.** $\sqrt{3}\sin\frac{10\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{13}$. **5.** $(-\infty;-11)\bigcup[\sqrt{5};3)$. **6.** $2(\sqrt{3}-1)$. **7.** $(3;\sqrt{2})$.

Вариант 14. **1.** 9. **2.** $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}+\pi n$, $y=-\frac{\pi}{4}-(-1)^k\frac{\pi}{12}-\frac{\pi k}{2}+\pi n$, $k,n\in\mathbb{Z}$. **3.** $\frac{7}{6}$. **4.** 18, $\frac{73}{6}$. **5.** a, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$.

Вариант 15. **1.** 8 и 10 деталей. **2.** $y_{\min}=\frac{3}{2}$ при $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$; $y_{\max}=6$ при $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. **3.** $x=4$. **4.** $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$. **5.** $12\sqrt{3}$. **6.** $x=2(p-1)$ при $p\in[0;1)$, $x=\frac{2(p-1)}{p}$ при $p\in[1;+\infty)$. **7.** $\frac{10}{3}l$.

Вариант 16. **1.** $\sqrt[3]{a}$. **2.** $x\in(-1;5)$. **3.** 6 и -2. **4.** $x_1=-\frac{3\pi}{2}$, $x_2=-\pi$, $x_3=\frac{\pi}{2}$, $x_4=\pi$. **5.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^3}$.

Вариант 17. **1.** $x=\frac{2\pi}{3}+\pi n$. **2.** $x_1=1$, $y_1=1$; $x_2=-1{,}5$, $y_2=2{,}25$. **3.** $\frac{\sqrt{2S\cos\alpha}}{\sqrt[4]{3}\cos\frac{\alpha}{2}}$ см. **4.** $(-2;0]\cup\left[\frac{7+\sqrt{145}}{2};\infty\right)$. **5.** $a\in[-3;-1]\cup[1;3]$. **6.** $\frac{4}{3}$.

Вариант 18. **1.** -10. **2.** 2. **3.** 12. **4.** 2. **5.** 3. **6.** -2. **7.** 400. **8.** -4. **9.** 6. **10.** 122.

Вариант 19. **1.** $\frac{1}{2}$. **2.** 150°. **3.** -12. **4.** 5,8. **5.** 19,2 см. **6.** 8 см^2. **7.** 12 см. **8.** 3,75 см^2. **9.** 2 см. **10.** 0.

Вариант 20. **1.** -8. **2.** -1. **3.** -1. **4.** -1. **5.** 2. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 32. **9.** 45. **10.** 32.

Вариант 21. **1.** $x=4$. **2.** $\left[-\frac{7}{3};-1\right)$. **3.** **4.** $x_1=2$, $y_1=1$; $x_2=1$, $y_2=2$; $x_3=-2$, $y_3=-1$; $x_4=-1$, $y_4=-2$. **5.** $a=\frac{3}{2}$, $x=0$. **6.** $\sqrt{5}$. **7.** $x_1=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x_2=\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, в обоих случаях $n=0,1,2,\ldots$ **8.** $x=0$. **9.** 12 часов и 15 часов. **10.** Искомое множество является полосой.

Вариант 22. **1.** 6. **2.** 1. **3.** 0; 2. **4.** (3; 5) **6.** $x_1 = \sqrt{7}$, $y_1 = -2$, $x_2 = 2$, $y_2 = -1$. **7.** $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **8.** arccos 0,7. **9.** $x_1 = 3$, $y_1 = -2$, $x_2 = 1$, $y_2 = -4$. **10.** $\frac{a^3 \operatorname{tg} \varphi}{24}$.

Вариант 23. **1.** 1. **2.** Возрастает при $x < -5$ и $x > -3$, убывает при $-5 < x < -4$ и $-4 < x < -3$. **3.** (5; 8]. **4.** $x = \frac{(-1)^n \pi}{8} + \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi k}{2}$, $y = \frac{(-1)^n \pi}{8} + \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi k}{2}$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **5.** 6 кг, 40%. **6.** 9 : 2.

Вариант 24. **1.** $\pm\sqrt{2}$. **2.** $x = -\frac{1}{3}$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума. **3.** $(3; 4) \bigcup [5; +\infty)$. **4.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{3} - \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **5.** 14. **6.** 1 : 7.

Вариант 25. **1.** $x_1 = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n$, $x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} m$, $n, m \in \mathbb{Z}$. **2.** [7,5; 8). **3.** 10. **4.** Не может. **5.** $y \in \left(-\infty; -\frac{8}{3}\right] \cup (1; +\infty)$.

Вариант 26. **1.** $2n$. **2.** $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{7 - \sqrt{33}}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{7 + \sqrt{33}}{2}; +\infty\right)$. **3.** $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$. **4.** 6 : 11. **5.** $y \in (-\infty; 1] \cup (5; +\infty)$.

Вариант 27. **1.** $-1{,}99$. **2.** -1. **3.** 3. **4.** 10. **5.** 0. **6.** 3. **7.** 7. **8.** 0,5. **9.** 0. **10.** 630°. **11.** 14. **12.** 54.

Вариант 28. **1.** $\frac{1}{2} c \cdot (\sin\beta + \cos\beta - 1) \cdot \sin\alpha$. **2.** 3. **3.** $-\frac{\pi}{4} + \pi n$. **4.** $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Вариант 29. **1.** $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$. **2.** $(-3; -2) \cup (-2; 0)$. **3.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$, $x_3 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $n, m, k \in \mathbb{Z}$. **4.** 2, 10, 50 или 50, 10, 2. **5.** $4\sqrt{2}$.

Вариант 30. **1.** $y_{\max} = 0$, $y_{\min} = -\frac{256}{27}$. **2.** $(0; 1) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 2\right)$. **3.** $x_1 = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $x_2 = \operatorname{arctg} 7 + \pi k$. **4.** $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 или $\frac{7}{24}$, $-\frac{7}{12}$, $\frac{7}{6}$, $-\frac{7}{3}$, $\frac{14}{3}$, $-\frac{28}{3}$, $\frac{56}{3}$. **5.** 6 см.

Вариант 31. **1.** $\arccos\frac{5\sqrt{3}}{9}$. **2.** $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi k$, $k, n \in \mathbb{Z}$. **3.** $\left[\frac{1 + \sqrt{17}}{8}; +\infty\right)$. **4.** $x_1 = 4, x_2 = -4$. **5.** 5. **6.** 48 км/ч. **7.** 79.

Вариант 32. **1.** 20. **2.** $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k, n \in \mathbb{Z}$. **3.** $(-2; 14]$. **4.** 5. **5.** -3; 23. **6.** 40 км/ч. **7.** 30°.

Вариант 33. **1.** 4; -1. **2.** 1. **3.** 2. **4.** $\frac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{6\sin\alpha}$. **5.** 512. **6.** (2; 1); (1; 2). **7.** $R\sqrt{2\left(\sin^2 A + \sin^2 B\right) - \sin^2(A + B)}$.

Вариант 34. **1.** 26. **2.** Нет. **3.** (3; 2). **4.** 40 км^2. **5.** (0; 1]. **6.** Решений нет. **7.** Нет.

Вариант 35. **1.** -2. **2.** 0°. **3.** -1. **4.** 99,9. **5.** 0. **6.** 1. **7.** 3. **8.** 90°. **9.** 729. **10.** 0,2.

Вариант 36. **1.** $x_1 = 2a-3$, $x_2 = 2$ при $a \notin \{1, 2, \frac{5}{2}, 3\}$; $x = 2$ при $a \in \{2, \frac{5}{2}\}$; $x = -1$ при $a = 1$; $x = 3$ при $a = 3$. **2.** 2; 1024. **3.** $-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **4.** 28. **5.** Если $a = 5$, то $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x_2 = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{6}-1}{2} + \pi m$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Уравнение имеет решения при $a \in [-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$.

Вариант 37. **1.** 4. **2.** -5. **3.** -54. **4.** -11. **5.** -21. **6.** 2,903. **7.** -6. **8.** 1°. **9.** 1. **10.** 4. **11.** 2. **12.** 72.

Вариант 38. **1.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.** $(0; \frac{3}{5}]$. **3.** В 23:30. **4.** $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$. **5.** 5. **6.** 20 и $\frac{25\sqrt{17}}{8}$. **7.** $a \in [3; +\infty)$.

Вариант 39. **1.** $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.** $(0; \frac{8}{3}]$. **3.** В 21:00. **4.** $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$. **5.** 8. **6.** 13 и $\frac{13\sqrt{65}}{8}$. **7.** $a \in [13; +\infty)$.

Вариант 40. **1.** $\frac{1}{9}$ (при $a \neq 0$; $b \neq 0$; $a \neq \pm b$). **2.** $\frac{\pi n}{8}$; $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.** $50 - 25\sqrt{3}$. **4.** $\left(3; 3 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \bigcup (4; 10)$. **5.** $\frac{1}{2}$. **6.** -4; 2. **7.** $(20n^2 - 5n; 5n - 1)$; $n \in \mathbb{Z}$, верно.

Вариант 41. **1.** 2. **2.** $-\frac{15}{17}$ и -4. **3.** $(\frac{11}{3}; 4) \bigcup (4; +\infty)$. **4.** $(2; 3] \bigcup [7; 8)$. **5.** 25, 30 и 30. **6.** 1. **7.** $a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{85}}{2} - 1\right) \bigcup \left(\frac{\sqrt{85}}{2} + 1; +\infty\right)$.

Вариант 42. **1.** $-\frac{8}{3}$; $-\frac{4}{3}$. **2.** $83\frac{1}{3}\%$. **3.** $\pi(2n+1)$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2 \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **4.** $(-\infty; -2] \bigcup [4; +\infty)$. **5.** 30°.

Вариант 43. **1.** $\frac{1}{5}$; $\frac{4}{5}$. **2.** 400 человек. **3.** $\pi(2n+1)$, $-\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + (-1)^{k+1} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **4.** $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{145}}\right)$. **5.** $x = 3$; $y = 4$.

Вариант 44. **1.** 300 кг. **2.** $[1; 2) \bigcup (10; +\infty)$. **3.** 2. **4.** $x_{1,2} = \frac{1-4k}{4} \pm \frac{\sqrt{16k^2 - 8k + 17}}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$; $x_{3,4} = \frac{1 + 4k \pm \sqrt{16k^2 + 8k - 15}}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, $k \neq -1$. **5.** $(0; \frac{1}{12}]$.

Вариант 45. **1.** 28. **2.** $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.** 1 : 3. **4.** $\frac{4}{3}$. **5.** $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + \sqrt{11}}$.

Вариант 46. **1.** $\frac{4}{a-4}$ при $a > 0$, $a \neq 4$. **2.** 1. **3.** 8. **4.** $\frac{3}{4}$. **5.** $-\frac{1}{2}$ **6.** 9. **7.** 1. **8.** $-\sqrt{3}$. **9.** $\frac{\pi}{2}$. **10.** $(-\infty; -1) \bigcup (-1; 1)$. **11.** $(-2; 1]$. **12.** $[-2; -1) \bigcup (-1; +\infty)$. **13.**

$(1;3]$. **14.** $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **15.** Четыре вектора: $(-3;3)$; $(-1;1)$; $(1;-1)$; $(3;3)$. **16.** -1; $\frac{1}{3}$. **17.** 3. **18.** $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **19.** 20 или 80. **20.** 4.

Вариант 47. **1.** -2 при $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$. **2.** 12. **3.** 20. **4.** 2. **5.** 1. **6.** -2. **7.** 1; 3. **8.** 1; 16. **9.** -3. **10.** -1. **11.** πn, $-\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **12.** $(-2;1) \bigcup (1;2)$. **13.** $\sqrt{2}$. **14.** $[-3;-1) \bigcup \{0\}$. **15.** $(-2;0)$, $(-1;1)$. **16.** $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$. **17.** $(0;4]$. **18.** -1; 2. **19.** 3. **20.** $-1 \leqslant p \leqslant 0$.

Вариант 48. **2.** $x \in (-\infty; -7-\sqrt{5}] \bigcup [-7+\sqrt{5}; -4{,}5)$. **3.** $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{k\pi}{2}$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **4.** 32. **5.** $\sqrt{S \operatorname{tg} \alpha}$. **6.** $\left(1;\frac{1}{3}\right)$. **7.** $\frac{1}{4}$.

Вариант 49. **1.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **2.** $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.** 50% и $58\frac{1}{3}$%. **4.** $(\pm 3; \pm 4)$, $\left(\pm\frac{8}{\sqrt{11}}; \pm\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$. **5.** $\frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$, -4, -6. **6.** $b \in (-\infty; -3-\sqrt{3}) \bigcup (-1+\sqrt{3}; +\infty)$. **7.** $(-1)^n \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 50. **1.** $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.** $4 : (3 + 2\sqrt{2})$. **3.** $\arccos\left(\frac{2\sin^2\alpha - \cos^4\alpha}{2\sin\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}\right)$. **4.** На полминуты. **5.** Нет решений при $a \in \left(-\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}; \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}\right) \cup \{-1\} \cup \{1\}$; два решения при $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$; четыре решения при $|a| > \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$, $a \neq \pm 1$.

Вариант 51. **1.** 4. **2.** $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{14}$, $\frac{2\pi}{7}$. **3.** $t_1 = -2$, $t_2 = 13$.

Вариант 52. **1.** $S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9V^2\sin\alpha}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}}$. **2.** $x_1 = \pi + 2\pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$. **3.** 3 млн руб. **4.** $(6; +\infty)$. **5.** $x = 4$.

Вариант 53. **1.** $7 \cdot 10^{n+3} + 125 \cdot 10^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. числа вида $71250\ldots0$. **2.** $(-\infty; -2) \cup (0;1) \cup (1; +\infty)$. **3.** $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = -1$, $y_2 = -2$; $x_3 = \sqrt{5}$, $y_3 = 3 - \sqrt{5}$; $x_4 = -\sqrt{5}$, $y_4 = -3 - \sqrt{5}$; $x_5 = 3$, $y_5 = 0$; $x_6 = -3$, $y_6 = 0$. **4.** **5.** 4, 12, 36 и $\frac{4}{9}$, $-\frac{20}{9}$, $-\frac{100}{9}$.

Вариант 54. **1.** $x = \pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.** $x = -\frac{4}{3}$. **3.** 39. **4.** 6 см. **5.** $S = \frac{\sqrt{3}h^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Список вузов с указанием сокращенных названий

АГА — Академия гражданской авиации.

АГАУ — Алтайский государственный аграрный университет.

АТиСО — Академия труда и социальных отношений.

БГАРФ — Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота.

БГАУ — Башкирский государственный аграрный университет.

БГИНХ — Белорусский государственный институт народного хозяйства.

БГПИ — Балашовский государственный педагогический институт.

БГУ — Белорусский государственный университет.

БСА — Белорусская сельскохозяйственная академия.

БрПИ — Брестский педагогический институт.

ВА им. Дзержинского — Военная академия им. Ф. Э. Дзержинского.

ВАХЗ — Военная академия химической защиты.

ВВИА — Военно-воздушная инженерная академия.

ВГАВТ — Волжская государственная академия водного транспорта.

ВГПИ — Витебский государственный педагогический институт.

ВГУ — Воронежский государственный университет.

ВЗФЭИ — Всероссийский заочный финансово-экономический институт.

ВОКУ — Московское высшее общевойсковое командное училище.

ВШЭ — Высшая школа экономики.

ВлПУ — Владимирский государственный педагогический университет.

ВятГПИ — Вятский государственный педагогический институт.

ГАНГ (РГУНГ) — Российский государственный университет нефти и газа.

ГАСБУ (МГУС) — Московский государственный университет сервиса.

ГАУ (ГУУ) — Государственный университет управления.

ГУЗ — Государственный университет по землеустройству.

ГФА — Финансовая академия при Правительстве Российской Федерации.

ДВГУ — Дальневосточный государственный университет.

ИЕНиЭ — Институт естественных наук и экологии при «Курчатовчком институте».

КГАЦМЗ — Красноярская государственная академия цветных металлов и золота.

КГТУ — Красноярский государственный технический университет.

КГУ — Казанский государственный университет.

КПИ — Коломенский педагогический институт.

КФЭИ — Казанский финансово-экономический институт.

ЛГПИ — Липецкий государственный педагогический институт.

МАДИ — Московский государственный автомобильно-дорожный институт (технический университет).

МАИ — Московский государственный авиационный институт (технический университет).

МАМИ — Московская государственная академия автомобильного и тракторного машиностроения.

МАРХИ — Московский архитектурный институт (государственная академия).

МАСИ — Московский автомобилестроительный институт (втуз–ЗИЛ).

МАТИ — Московский государственный авиационный технологический университет.

МВВДИУ — Московское высшее военное дорожное инженерное училище.

МВИПВ — Московский военный институт пограничных войск РФ.

МВМИ — Московский вечерний металлургический институт.

МГАВТ — Московская государственная академия водного транспорта.

МГАЛП — Московская государственная академия легкой промышленности.

МГАП — Московский государственный университет печати.

МГАПБ — Московская государственная академия прикладной биотехнологии.

МГАПИ — Московская государственная академия приборостроения и информатики.

МГАПП — Московская государственная академия пищевых производств.

МГАТХТ — Московская государственная академия тонкой химической технологии.

МГАУ — Московский государственный агроинженерный университет.

МГАХМ (МГУИЭ) — Московский государственный университет инженерной экологии.

МГГА — Московская государственная геологоразведочная академия.

МГГУ — Московский государственный горный университет.

МГЗИПП — Московский государственный заочный институт пищевой промышленности.

МГОПУ — Московский государственный открытый педагогический университет.

МГОУ — Московский государственный открытый университет.

МГСУ — Московский государственный строительный университет.

МГСоцУ — Московский государственный социальный университет.

МГТА — Московская государственная текстильная академия.

МГТУ — Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана.

МГТУГА — Московский государственный технический университет гражданской авиации.

МГУ — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова:

- **биолог. ф-т** — биологический факультет;
- **ВМиК** — факультет вычислительной математики и кибернетики;
- **геогр. ф-т** — географический факультет;
- **геолог. ф-т** — геологический факультет;
- **ИСАА** — институт стран Азии и Африки;
- **мех.-мат.** — механико-математический факультет;
- **ф-т почвовед.** — факультет почвоведения;
- **псих. ф-т** — психологический факультет;
- **физ. ф-т** — физический факультет;
- **филолог. ф-т** — филологический факультет;
- **филос. ф-т** — философский факультет;
- **хим. ф-т** — химический факультет;
- **эк. ф-т** — экономический факультет.

МГУГиК — Московский государственный университет геодезии и картографии.

МГУК — Московский государственный университет коммерции.

МГУЛ — Московский государственный университет леса.

МГУП — Московский государственный университет природообустройства.

МИИ — Московский институт-интернат для инвалидов с нарушением опорно-двигательной системы.

МИИТ — Московский государственный университет путей сообщения.

МИКХС — Московский институт коммунального хозяйства и строительства.

МИРЭА — Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет).

МИСИ — Московский государственный строительный университет.

МИСиС — Московский государственный институт стали и сплавов (технологический университет).

МИФИ — Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет).

МИЭМ — Московский государственный институт электроники и математики (технический университет).

МИЭТ — Московский государственный институт электронной техники (технический университет).

ММИ — Могилевский машиностроительный институт.

МПГУ — Московский педагогический государственный университет.

МПУ — Московский педагогический университет.

МСХА — Московская сельскохозяйственная академия им. Тимирязева.

МТИ — Могилевский технологический институт.

МТУСИ — Московский технический университет связи и информатики.

МУПОЧ «Дубна» — Международный университет природы, общества и человека «Дубна».

МФТИ — Московский физико-технический институт (государственный университет).

МЭИ — Московский энергетический институт (технический университет).

МЭСИ — Московский экономико-статистический институт.

НГПУ — Нижегородский государственный педагогический университет.

НГТУ — Нижегородский государственный политехнический университет.

НГУ — Новосибирский государственный университет.

НМУ — Независимый московский университет.

НижГУ — Нижегородский государственный университет.

ОИАЭ — Обнинский институт атомной энергетики.

ОКИ — Орловский коммерческий институт.

ОмГАПС — Омская государственная академия путей сообщения.

ОмГТУ — Омский государственный технический университет.

ОмГУ — Омский государственный университет.

ОмПУ — Омский государственный педагогический университет.

ПИИРС — Поволжский институт информатики, радиотехники и связи.

РГАЗУ — Российский государственный аграрный заочный университет.

РГГУ — Российский государственный гуманитарный университет.

РГМУ — Российский государственный медицинский университет.

РГОТУПС — Российский государственный открытый технический университет путей сообщения.

РГПУ — Российский государственный педагогический университет.

РЗИТЛП — Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности.

РУДН — Российский университет дружбы народов.

РХТУ — Российский химико-технологический университет.

РЭА — Российская экономическая академия.

САА — Сибирская аэрокосмическая академия.

СГАПС — Сибирская государственная академия путей сообщения.

СГПИ — Саратовский государственный педагогический институт.

СГУ — Саратовский государственный университет.

СГЭА — Саратовская государственная экономическая академия.

СПбААП — Санкт-Петербургская государственная академия аэрокосмического приборостроения.

СПбГТУ — Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет).

СПбГУ — *Санкт-Петербургский государственный университет.*

СПбГЭУ — Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет.

СПбИЭА — Санкт-Петербургская государственная инженерно-экономическая академия.

СТАНКИН — Московский государственный технологический университет «Станкин».

СамТУ — Самарский государственный технический университет.

СмПИ — Смоленский государственный педагогический институт.

ТГТУ — Тамбовский государственный технический университет.

ТПУ — Томский политехнический университет.

ТбГУ — Тамбовский государственный университет.

ТвГУ — Тверской государственный университет.

УГГА — Уральская государственная горно-геологическая академия.

УГПУ — Ульяновский государственный педагогический университет.

УПИ — Уральский государственный технический университет.

УрГУ — Уральский государственный университет.

УфНТУ — Уфимский государственный нефтяной технический университет.

ЧГУ — Чувашский государственный университет.

ЯВВФУ — Ярославское высшее военное финансовое училище.

ЯГУ — Ярославский государственный университет.

ЯрПУ — Ярославский государственный педагогический университет.

Принятые обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$m \vdots n$ — число m делится на n без остатка;

$\smile{AB}$ — дуга AB;

$\cup$ — знак объединения множеств;

$\cap$ — знак пересечения множеств;

$x \in M$ — элемент x принадлежит множеству M;

$\varnothing$ — пустое множество.

По вопросам оптовых закупок обращаться:
тел./факс: (095) 785-15-30, e-mail: trade@airis.ru
Адрес: Москва, пр. Мира, 106

Наш сайт: www.airis.ru

Вы можете приобрести наши книги
с 11^{00} до 17^{30}, кроме субботы, воскресенья,
в киоске по адресу: пр. Мира, д. 106, тел.: 785-15-30

Адрес редакции: 129626, Москва, а/я 66

Издательство «Айрис-пресс» приглашает к сотрудничеству
авторов образовательной и развивающей литературы.
По всем вопросам обращаться
по тел.: (095) 785-15-33, e-mail: editor@airis.ru

Учебное издание

Куланин Евгений Дмитриевич
Норин Владимир Павлович
Федин Сергей Николаевич
Шевченко Юрий Алексеевич

3000 КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Издание пятое, исправленное

Научный редактор *В. В. Черноруцкий*
Оформление *А. М. Драговой*
Оформление обложки *А. М. Кузнецов*
Технический редактор *С. С. Коломеец*
Иллюстрации *Е. В. Панкратьев*

Подписано в печать 26.01.03. Формат 60×90/16. Печать офсетная.
Печ. л. 39. Усл.-печ. л. 39. Доп. тираж 5000 экз. Заказ № 7070.

ООО «Издательство “Айрис-пресс”»
113184, Москва, ул. Б. Полянка, д. 50, стр. 3.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Можайский полиграфический комбинат»
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93

В РЕГИОНАХ
книги издательства «Айрис-пресс»
Вы можете приобрести по следующим адресам:

Воронеж	• **ООО «Амиталь»** ☎ (0732)23-63-26 ✉ Воронеж, ул. 25-го января, д. 28
Екатеринбург	• **ООО «Алис»** ☎ (3432)55-10-06 ✉ Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, д. 137
Иркутск	• **ООО «ПродаЛитЪ»** ☎ (3952)59-13-80 ✉ Иркутск, ул. Байкальская, д. 172
Казань	• **ООО «Аист-Пресс»** ☎ (8432)43-60-31 ✉ Казань, ул. Декабристов, д. 182
Калининград	• **ООО «Торговая компания»** ☎ (0112)32-48-48, 35-37-65 ✉ Калининград, ул. Озерная, д. 8
Красноярск	• **ООО «Литэкс»** ☎ (3912)55-50-35/36/37 ✉ Красноярск, ул. Дудинская, д. 3а
Минск	• **ИООО «Современное слово»** ☎ (10-375-172)42-07-52, 38-38-52 e-mail: newbook@tut.by ✉ Минск, ул. Центральная, д. 14
Набережные Челны	• **«Книги»** ☎ (8552)56-24-67 ✉ Набережные Челны, Новый Город, д. 27/12
Нижний Новгород	• **ЧП Эллинский О. Г.** ☎ (8312)64-97-18 ✉ Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 50
Новосибирск	• **ООО «Топ-книга»** ☎ (3832)36-10-28 ✉ Новосибирск, ул. Арбузова, д. 1/1
Пермь	• **«Азбука +»** ☎ (3422)41-11-35 ✉ Пермь, ул. Героев Хасана, 10
Самара	• **ООО «Метида»** ☎ (8462)59-45-52 ✉ Самара, ул. Юных пионеров, д. 146
Санкт-Петербург	• **«Санкт-Петербургский Дом книги»** (розничная продажа) ☎ (812)219-64-02 ✉ Санкт-Петербург, Невский пр-т, д. 28
Тюмень	• **ЗАО «Фолиант»** ☎ (3452)27-36-06, 27-36-11 ✉ Тюмень, ул. Харьковская, д. 83
Уфа	• **ПКП «Азия»** ☎ (3472)50-39-00 ✉ Уфа, ул. Зенцова, д. 70 (для оптовых закупок)
Хабаровск	• **«Мирс»** ☎ (4212)23-54-47; 22-74-58 ✉ Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 21
Челябинск	• **ООО «ИнтерСервис ЛТД»** ☎ (3512)21-33-74 ✉ Челябинск, Свердловский тракт, д. 14
Южно-Сахалинск	• **ООО «Эврика-Трейд»** ☎ (4242)79-64-33 ✉ Южно-Сахалинск, НПР Новоалександровск, ул. Советская, д. 104